गणित

अध्याय-9: सरल रेखाएँ

Fukey Education

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रस्तावना (Introduction)

गणित और दर्शनशास्त्र का गहरा सम्बन्ध है, प्रत्येक गणितज्ञ पहले दार्शनिक होता है। ज्यामिति के क्रमबद्ध विकास को पढ़ने पर स्पष्ट होता है कि पाइथागोरस, टोल्मी, यूक्लिड और रेने डिकार्टेज आदि जिन्होंने ज्यामिति को विकसित किया, वे सभी उच्च कोटि के विचारक एवं दार्शनिक थे।

रेने डिकार्टेज के पहले ज्यामिति किसी-न-किसी अभिगृहीत (Postulates) पर निर्भर तथा सीमित थी। यह केवल तार्किक चर्चाओं द्वारा प्रमाणित थी और त्रिकोणमिति का उपयोग साध्यों को सिद्ध करने या प्रश्नों को हल करने में नहीं होता था। वर्तमान में हम जिस वैश्लेषिक निर्देशांक ज्यामिति (Analytical coordinate geometry) का अध्ययन करते हैं, उसका शुभारम्भ करने का श्रेय डिकार्टेज महोदय को जाता है। उन्होंने ही ज्यामिति में बीजगणित (Algebra) का उपयोग करके इसे प्रभावशाली विषय बनाया। यहाँ पर निर्देशांक ज्यामिति के सिद्धान्तों तथा उसकी उपयोगिता का वर्णन करने से पहले महान दार्शनिक एवं ज्यामितिविद् रेने डिकार्टेज महोदय के विषय में संक्षिप्त जानकारी देना में उनके प्रति श्रद्धांजलि देने जैसा समझता हूँ।

निर्देशांक ज्यामिति की परिभाषा (Definition of Coordinate Geometry)

निर्देशांक ज्यामिति, ज्यामिति की वह शाखा है, जिसमें वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म द्वारा समतल (Plane) या अन्तरिक्ष (Space) में स्थित किसी बिन्दु की स्थिति को व्यक्त किया जाता है। समतल में स्थित बिन्दु की स्थिति (Position) दो वास्तविक संख्याओं के क्रम (x,y)द्वारा व्यक्त की जाती है। इस प्रकार की निर्देशांक ज्यामिति को द्विविमीय निर्देशांक ज्यामिति (Two-dimensional coordinate geometry) कहते हैं तथा इसके अन्तर्गत उन आकृतियों का अध्ययन किया जाता है जो केवल लम्बाई और क्षेत्रफल रखती हैं, जैसे-बिन्दु, रेखा, वृत्त, दीर्घवृत्त, परवलय, अतिपरवलय इत्यादि। अन्तरिक्ष में स्थित किसी बिन्द की स्थिति तीन वास्तविक संख्याओं के क्रम (x,y,z) द्वारा व्यक्त की जाती है, इस प्रकार की निर्देशांक ज्यामिति को त्रिविमीय निर्देशांक ज्यामिति (Three-dimensional coordinate geometry) कहते हैं। इसके अन्तर्गत उन ठोस पिण्डों (Solids) का अध्ययन किया जाता है जो आयतन रखते हैं, जैसे-गोला (Sphere), दीर्घवृत्तज (Ellipsoid), बेलन (Cylinder), शंकु (Cone) इत्यादि। चूँकि

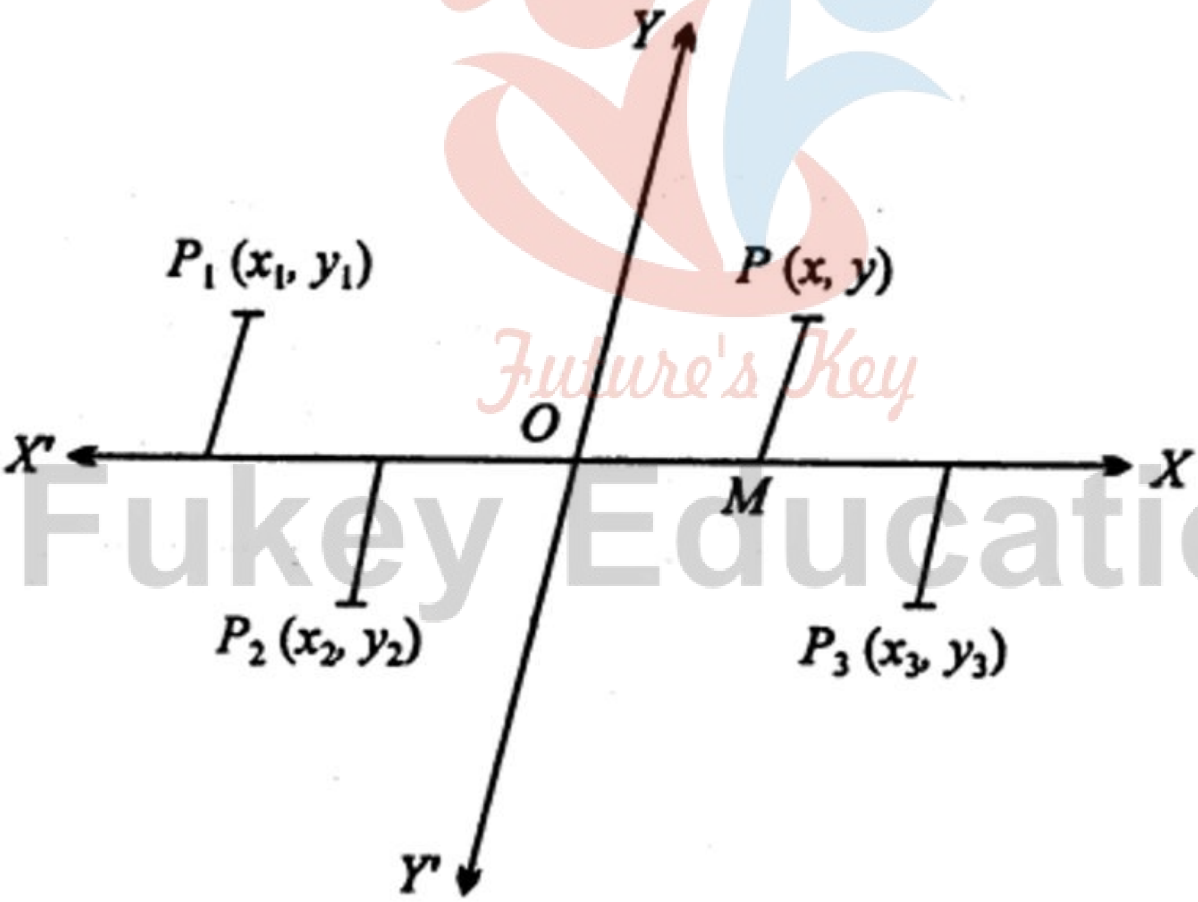
Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

वर्तमान में निर्देशांक ज्यामिति में बीजगणित के सूत्र और नियमों का उपयोग होता है, अतः इसे वैश्लेषिक निर्देशांक ज्यामिति (Analytical coordinategeometry) कहा जाता है।

निर्देशांक ज्यामिति का व्यापक सिद्धान्त (General Principle of Coordinate Geometry)

माना कागज के तल पर दो स्थिर (Fixed) सरल रेखाएँ XX' तथा YY' हैं जो एक-दूसरे को बिन्दु 0 पर प्रतिच्छेद करती हैं

(आवश्यक नहीं कि वे लम्बवत् ही हों)। रेखा XX' को X-अक्ष (Axis of X) एवं रेखा YY' को Y-अक्ष (Axis of Y) कहते हैं तथा दोनों अक्षों के युग्म को निर्देशांक (Axes of coordinates) कहते हैं। प्रतिच्छेद बिन्दु o को मूलबिन्दु (Origin) कहा जाता है।



समतल में स्थित किसी भी बिन्दु की स्थिति को निर्देशित करने के लिये दो दूरियों को ज्ञात किया जाता है, एक x-अक्ष के समान्तर तथा दूसरी दूरी Y-अक्ष के समान्तर होती है।

नियम- दूरियों के मापन में निम्न नियमों का पालन किया जाता है-

1. प्रेक्षक (Observer) अर्थात् दूरी का मापन करने वाला, मूलबिन्दु O पर स्थिर हुआ माना जाता है। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक दूरी मूलबिन्दु O से ही मापी जाती है।

2. प्रत्येक बिन्दु के लिए दो दूरियों का मापन किया जाता है।

(i) x-अक्ष के समान्तर, (ii) Y-अक्ष के समान्तर।

3. मूलबिन्दु से X-अक्ष के समान्तर मापी गई दूरी भुज (Abscissa) कहलाती है तथा इसे x या अधिक बिन्दु होने पर x_1, x_2, ...,x_n संकेतों से व्यक्त किया जाता है।

4. मूलबिन्दु से Y-अक्ष के समान्तर मापी गई दरी कोटि (Ordinate) कहलाती है। इसे y तथा अधिक बिन्दु होने पर y_1,y_2,........y_n संकेतों से व्यक्त किया जाता है।

माना P कोई बिन्दु है। P से PM रेखाखण्ड YY' के समान्तर खींचा तो दूरी OM = x (भुज) तथा दूरी PM = y (कोटि) से व्यक्त की जाती है और इन्हें क्रमित युग्म (Ordered pair) (x, y) के रूप में लिखने पर बिन्दु P के निर्देशांक कहे जाते हैं (यहाँ क्रम पर ध्यान देना आवश्यक है, पहले x निर्देशांक होगा उसके बाद) निर्देशांक होगा, इसके विपरीत क्रम में कभी नहीं)।

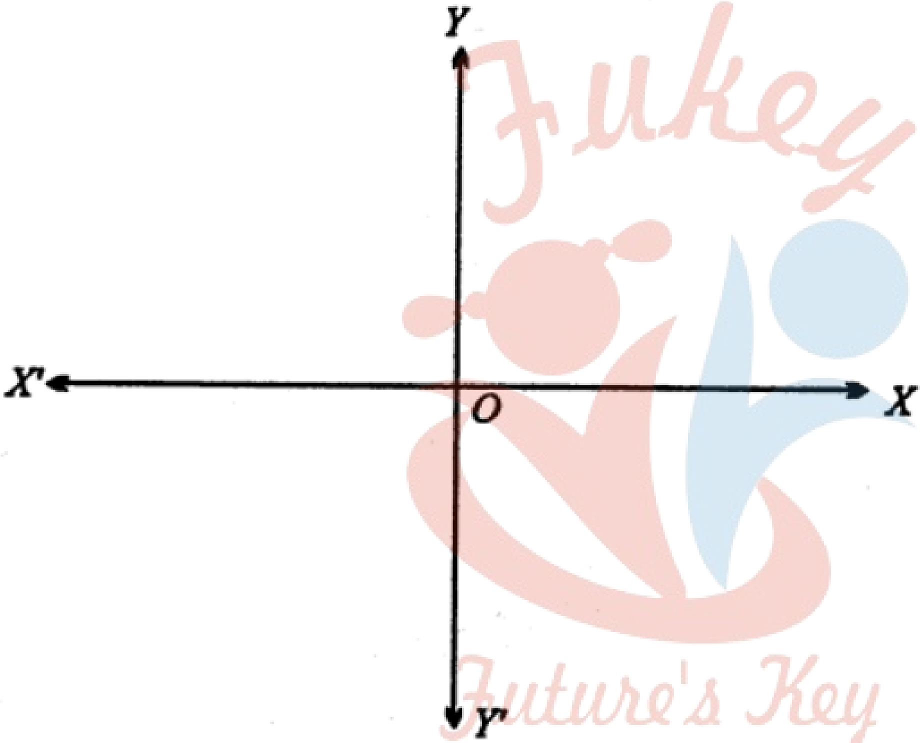
इसी प्रकार अन्य बिन्दुओं P_1,P_2,P_3 के लिये निर्देशांक क्रमश: (x_1,y_1), (x_2,y_2) एवं (x_3,y_3) होंगे।

इसके विपरीत यदि किसी बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात हों तो समतल में उसकी स्थिति (अर्थात् बिन्दु कहाँ है) जानी जा सकती है। मूलबिन्दु से Ox या Ox-अक्ष के समान्तर भुज की माप तक जाइये, फिर उस बिन्दु से YY'-अक्ष के समान्तर कोटि की माप तक जाइये, यही समतल में दिये हुए बिन्दु की स्थिति होगी।

समकोणीय कार्तीय निर्देशांक (Rectangular Cartesian Coordinate)

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उपर्युक्त अनुच्छेद में वर्णित तथ्य किसी बिन्दु के निर्देशांक की मौलिक एवं दार्शनिक अवधारणा है। व्यावहारिक गणित में अक्षों का चुनाव कागज के तल पर स्वेच्छ प्रतिच्छेदी दो सरल रेखाओं के रूप में न लेकर समतल में क्षैतिज (Horizontal) तथा ऊर्ध्वाधर (Vertical) एक-दूसरे के लम्बवत् प्रतिच्छेदी रेखाओं को अक्षों के रूप में लिया जाता है। क्षैतिज रेखा को X-अक्ष तथा ऊर्ध्वाधर रेखा को Y-अक्ष कहा जाता है। दोनों अक्षों के प्रतिच्छेद बिन्दु O को मूलबिन्दु (Origin) कहा जाता है।



इस प्रकार किसी समतल में समकोण पर प्रतिच्छेद करने वाली (विशेषकर क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर) दो सरल रेखाएँसमकोणीय निर्देश तंत्र (Rectangular coordinate system) का निर्माण करती हैं। इन्हें कार्तीय समकोणीय निर्देश तंत्र या संक्षेप में केवल कार्तीय निर्देश तंत्र भी कहा जाता है, क्योंकि सर्वप्रथम इस प्रकार के निर्देश तंत्र की अवधारणा रेने डिकार्टेज ने दी थी।

तिर्यक निर्देश तंत्र (Oblique Coordinate System)

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

जब समतल में ली गई अक्षों के बीच कोण 90° या $\frac{\pi}{2}$ रेडियन न लेकर कोई अन्य कोण हो, तो उन्हें तिर्यक् अक्ष या तिर्यक् निर्देश तंत्र कहते हैं। अक्षों के बीच कोण $m\angle XOY = \omega$ से व्यक्त किया जाता है।

इस पुस्तक के समस्त सिद्धान्तों और प्रश्नों में समकोणिक निर्देश तन्त्र ही लिया गया है जब तक कि किसी विशेष स्थिति में तिर्यक् अक्षों का उल्लेख न किया गया हो।

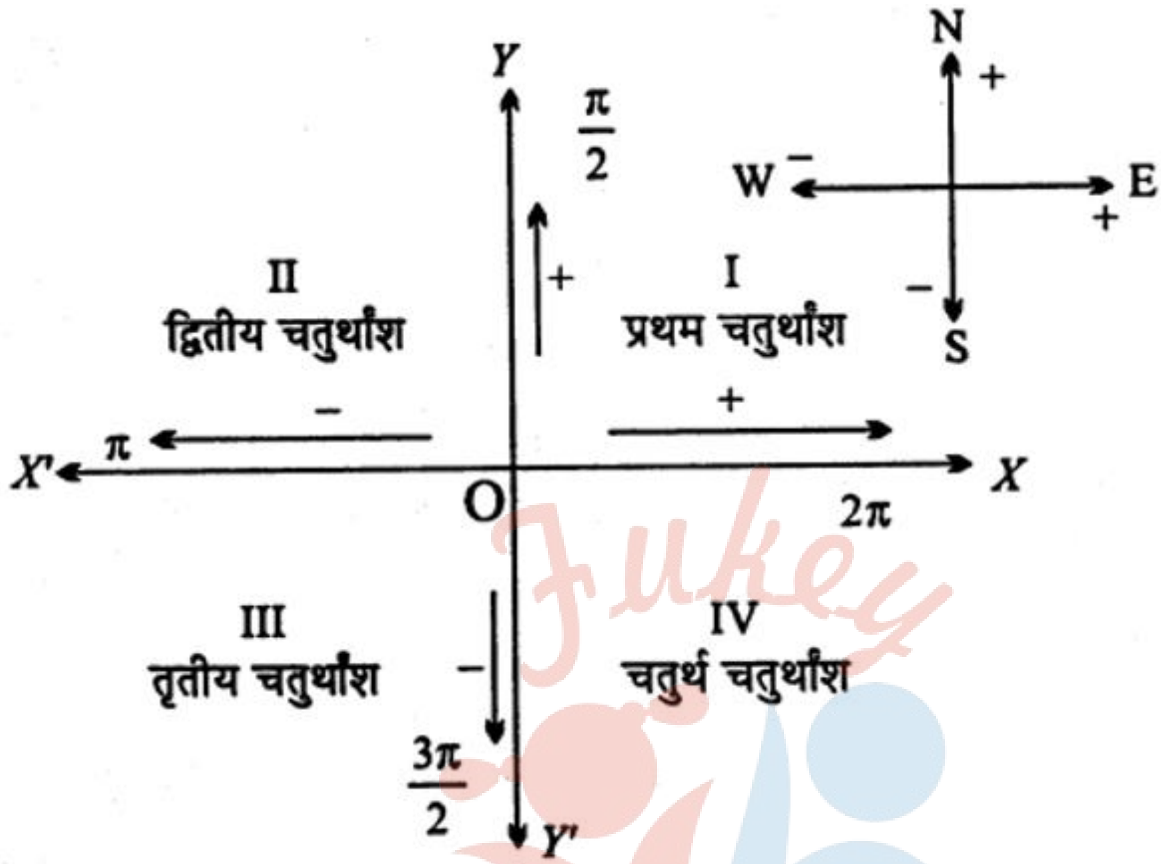
संकेतन (Notation)

चूँकि किसी बिन्दु के निर्देशांक एक क्रमित युग्म वास्तविक संख्या (y,x) के द्वारा ही व्यक्त किया जाता है, अतः किसी बिन्द के निर्देशांक लिखते समय छात्रों को इस बात का विशेष ध्यान रखना है कि छोटे कोष्ठक ( ) के अन्दर, पहले x निर्देशांक अर्थात् भुज और उसके बाद के क्रम में y निर्देशांक अर्थात् कोटि को लिखना है। विपरीत क्रम में अर्थात् (y,x) के क्रम में कदापि नहीं। यदि किसी बिन्दु के भुज की लम्बाई की माप 4 इकाई है तथा कोटि की लम्बाई की माप 5 इकाई है, तो बिन्दु के निर्देशांक (4, 5) होंगे न कि (5,4)।

चिन्हों की परिपाटी (Convention of Signs)

हम जानते हैं कि समतल में खींची गई दो समकोणिक प्रतिच्छेदी रेखाएँ समतल को चार चतुर्थांशों या पादों में विभाजित करती हैं।

Fukey Education



भाग XOY (0^c से $\frac{\pi}{2}$ तक) प्रथम, भाग YOX'($\frac{\pi}{2}$ से π^c तक)

द्वितीय, भाग X'OY' (π^c से $\frac{3\pi^c}{2}$,तक)

तृतीय और भाग Y'OX($\frac{3\pi^c}{2}$ से $2\pi^c$ तक) को चतुर्थ चतुर्थांश कहा जाता है।

कोई भी बिन्दु P (x,y) समतल में इन्हीं चार चतुर्थांशों में से किसी एक चतुर्थांश में होगा तथा सभी दूरियाँ मूलबिन्दु O से मापी जानी हैं।

गणितज्ञों द्वारा चिन्हों के लिये जो परिपाटी प्रचलित की गई है, उसके अनुसार OX दिशा (दाहिने हाथ या पूर्व दिशा) में मापी गई दूरी धनात्मक होगी तथा OX' दिशा (बाएँ हाथ या पश्चिम दिशा) में मापी गई दूरी ऋणात्मक होगी।

इसी प्रकार OY दिशा (ऊपर या उत्तर दिशा) में मापी गई दूरी धनात्मक होगी और OY' दिशा (नीचे या दक्षिण दिशा) में मापी गई दूरी ऋणात्मक होगी।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

अतः P के प्रथम चतुर्थांश में होने पर निर्देशांक (x,y) होगा, P के द्वितीय चतुर्थांश में होने पर निर्देशांक (-x,y), P के तृतीय चतुर्थांश में होने पर निर्देशांक (-x-y) तथा P के चतुर्थ चतुर्थांश में होने पर निर्देशांक (x,-y) होगा।

नीचे दी गई सारणी में विभिन्न स्थितियों में निर्देशांकों के चिन्ह दिये जा रहे हैं

क्र.	बिन्दु की स्थिति चतुर्थांश में	भुज x का चिन्ह	कोटि y का चिन्ह	बिन्दु के निर्देशांक
1.	I	+	+	(x, y)
2.	II	–	+	$(-x, y)$
3.	III	–	–	$(-x, -y)$
4.	IV	+	–	$(x, -y)$

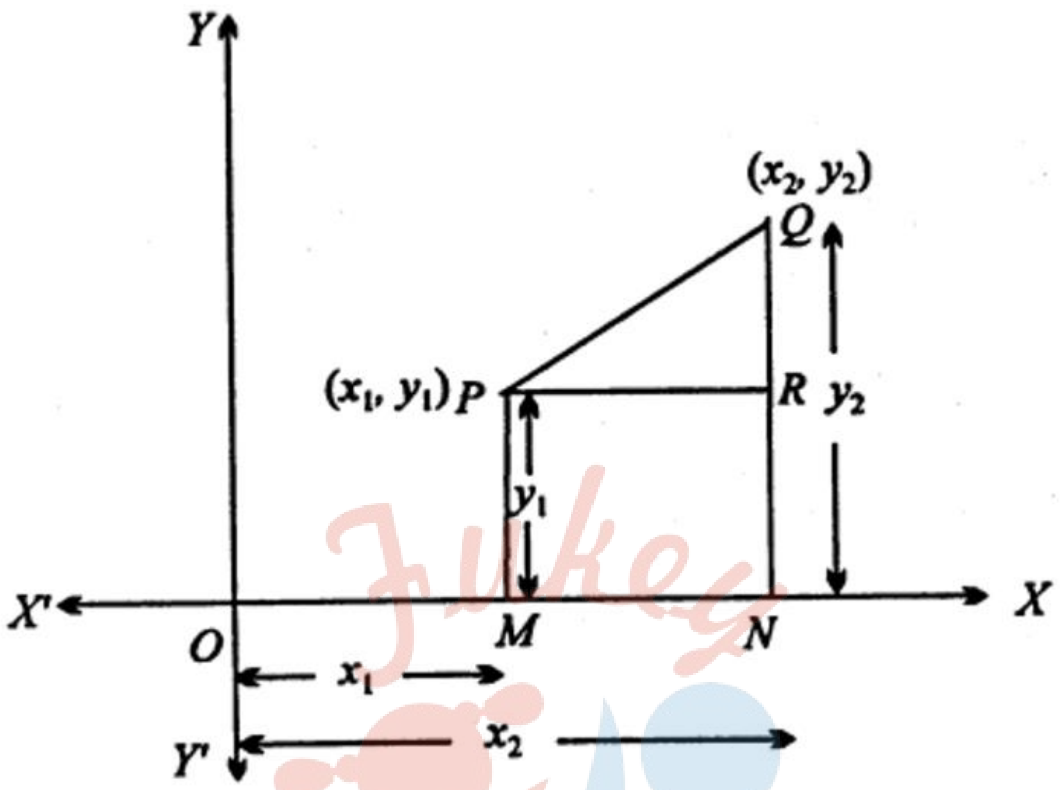
बिन्दु का आलेखन जबकि निर्देशांक दिए हुए हों (Plotting ofaPoint, When its Coordinates are Given)

जब किसी बिन्दु P (x, y) के निर्देशांक दिये हुए हों, तो समतल में P की स्थिति ज्ञात की जा सकती है। ग्राफ पेपर में अथवा कागज के तल पर दो परस्पर लम्बवत् प्रतिच्छेदी रेखाएँ लेकर तथा उचित पैमाना मानकर अक्षों का अंशांकन कर लिया जाता है। उसके बाद P की स्थिति ज्ञात की जाती है।

दो दिए हुए बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना (To find the Distance between Two Given Points)

माना P और ए दो दिए हुए बिन्दु हैं (दिये हुए बिन्दु के निर्देशांक, ज्यामिति की समस्याओं में, हमेशा यह अर्थ रखता है कि बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात हैं)।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



माना बिन्दु P (x_1,Y_1) और $Q(x_2,y_2)$ हैं। अब X- अक्ष पर बिन्दु P से PM और Q से QN लम्ब डाला तथा P से ON पर PR लम्ब खींचा। तो निर्देशांकों की परिभाषा से,

$OM = X_1$, $PM = y_1$,

$ON = x_2$, $QN = y_2$.

$\therefore$ PR = MN = ON - OM

$= x2 - x$ QR=QN – RN

$= x_2 - x_1$

और QR = QN – RN

= QN – PM

$= y_2 - y_1$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

∴ समकोण △PRQ में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$PQ^2 = PR^2 + QR^2$

$\Rightarrow PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore PQ = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

चूँकि दो बिन्दुओं के बीच की दूरी एक अदिश राशि है, अतः इसे धनात्मक लेना है, जिससे $\pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ का निरपेक्ष मान स्वीकार करना है।

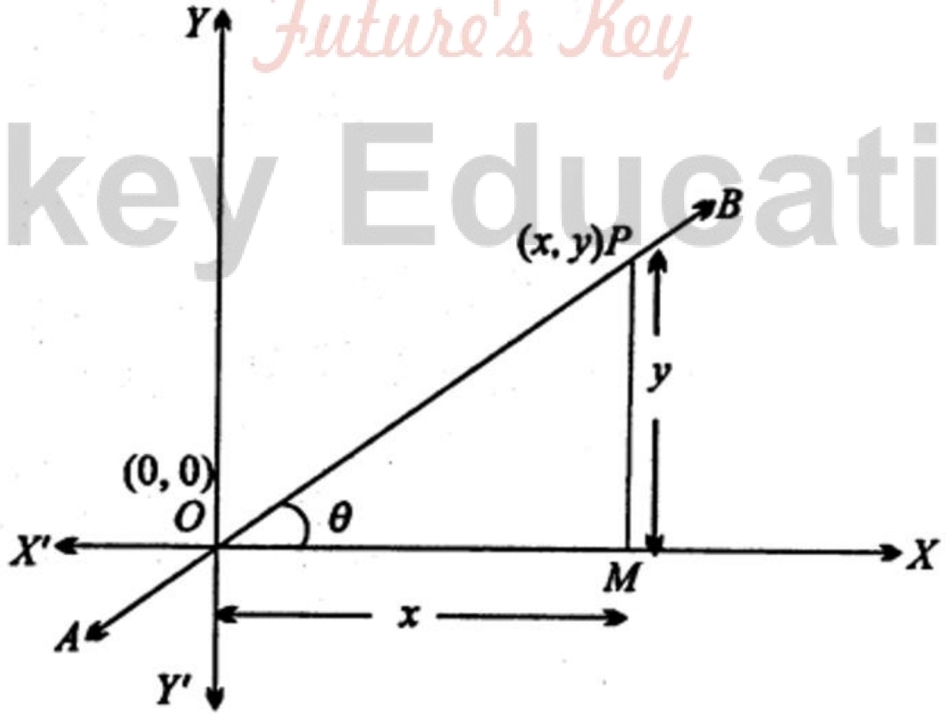
अतः $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

उपप्रमेय 1. उपर्युक्त दो बिन्दुओं के बीच की दूरी के सूत्र की सहायता से, किसी बिन्दु की मूलबिन्दु से दूरी सरलता से ज्ञात की जा सकती है।

मूलबिन्दु के निर्देशांक O(0, 0) हैं तथा माना P (x, y) कोई बिन्दु है। तब,

$OP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\Rightarrow OP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

अतः OP = $\sqrt{x^2 + y^2}$

उदाहरण 1. बिन्दु (5,- 4) तथा (7,- 5)के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : माना P (x_1 , y_1) = (5,- 4)

तथा Q (x_2 , y_2) = (7,- 5)

$\therefore PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(7-5)^2 + (-5+4)^2}$

$= \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1}$

$= \sqrt{5}$

= 15 मात्रक।

उदाहरण 2. किसी बिन्दु के निर्देशांक (0, 1) हैं तथा दूसरे बिन्दु की कोटि -3 है, तो उसका भुज ज्ञात कीजिये यदि उनके बीच की दूरी 5 इकाई हो।

हल : दिया है कि

P (x_1,y_1) = P (0,1)

माना दूसरे बिन्दु Q का भुज x है। तब Q के निर्देशांक (x,-3) होंगे तथा PQ = 5.

$\therefore PQ^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\Rightarrow 5^2 = (x-0)^2 + (-3-1)^2$

$\Rightarrow 25 = x^2 + 16$

$\Rightarrow x^2 = 25 - 16 = 9$

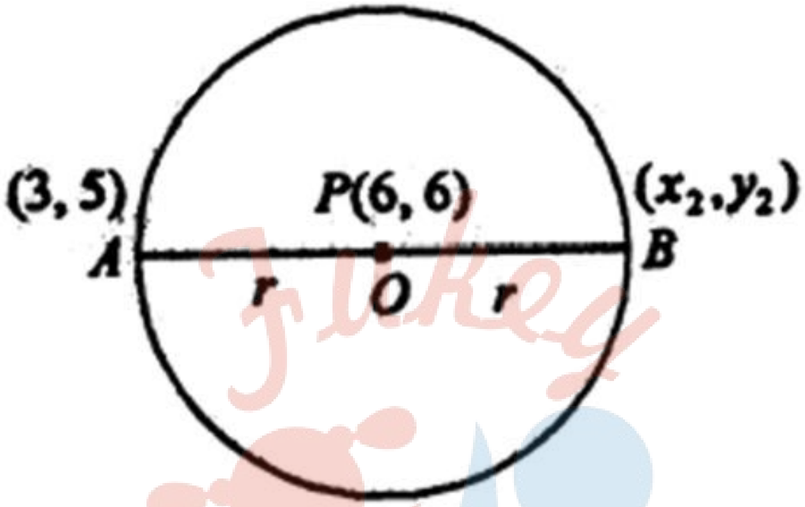
$\therefore x = \pm 3$

x=+3 अतः दूसरे बिन्दु का भुज $\pm$ 3 होगा।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उदाहरण 3. यदि किसी वृत्त के व्यास के एक सिरे के निर्देशांक (3,5) तथा इसके केन्द्र के निर्देशांक (6,6) हों, तो व्यास के दूसरे सिरे के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना व्यास के दूसरे सिरे के निर्देशांक (x_2,y_2) हैं।



केन्द्र P (6,6), व्यास का मध्य बिन्दु है।

$\therefore x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$\Rightarrow 6 = \frac{3 + x_2}{2}$

$\Rightarrow 3 + x^2 = 12$

$\therefore x_2 = 12 - 3 = 9$

इसी प्रकार, $y = \frac{y_1+y_2}{2} \Rightarrow 6 = \frac{5+y_2}{2}$

$\Rightarrow 5 + y_2 = 12$

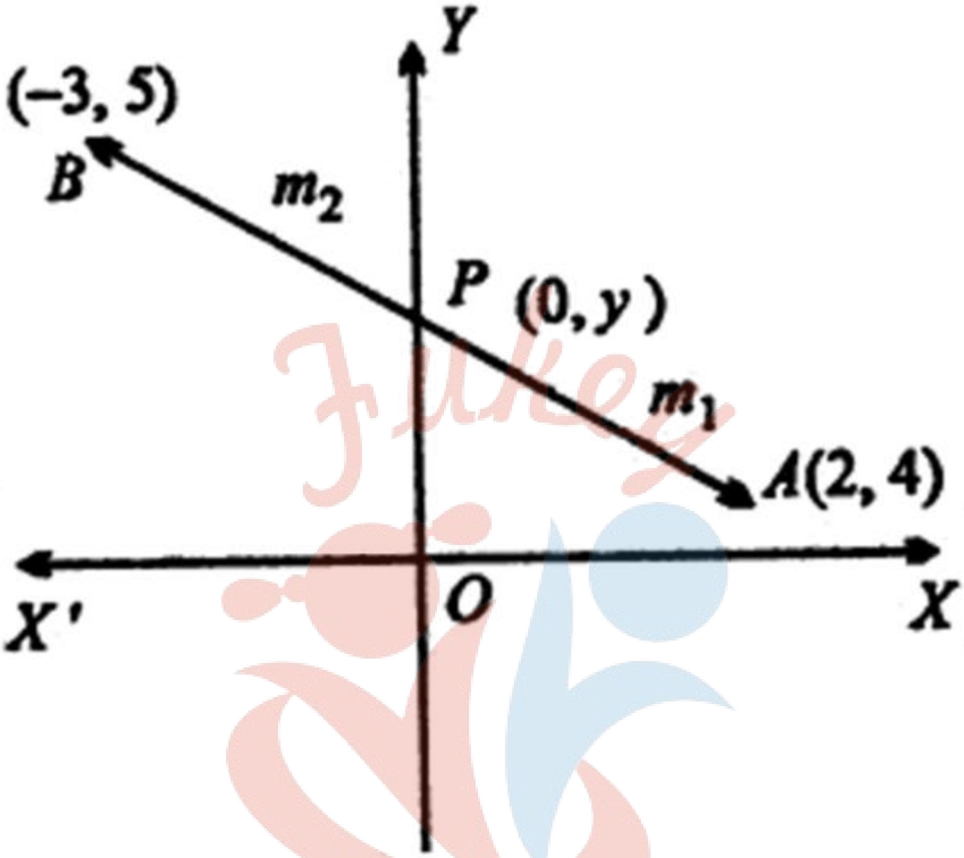
$\therefore y^2 = 12 - 5 = 7$

अत: व्यास के दूसरे सिरे के निर्देशांक (9, 7) होंगे।

उदाहरण 4. बिन्दुओं (2, 4) और (-3, 5) को मिलाने वाली रेखा को -अक्ष किस अनुपात में विभाजित करती है

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

हल : चूँकि Y-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु का x- निर्देशांक 0 होता है, अतः माना कि P- अक्ष पर विभाजक बिन्दु P के निर्देशांक (0,y) हैं।



$$\therefore x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{m_1(-3) + m_2(2)}{m_1 + m_2}$$

$\Rightarrow 0 = -3m_1 + 2m_2$

$\Rightarrow 3m_1 = 2m_2$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow m_1 : m_2 = 2 : 3$

अतः दिये हुए बिन्दुओं को Y-अक्ष अनुपात 2:3 में विभाजित करती है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

सरल रेखा का समीकरण (Equation of a Straight Line)

जब समतल में कोई चर बिन्दु किन्हीं एक या एक से अधिक शर्तों के अन्तर्गत किसी पथ पर गति करता है तो उसे चर बिन्दु का बिन्दुपथ कहते हैं तथा चर बिन्दु के निर्देशांकों के बीच (x और y में) जो समीकरण प्राप्त होता है वह बिन्दुपथ का समीकरण कहलाता है। अब यदि प्राप्त समीकरण में और y के पद केवल एकघातीय हों तो वह बिन्दुपथ एक सरल रेखा होगा। इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि किसी सरल रेखाका समीकरण चर बिन्द के निर्देशांकों (x और y) के बीच एक, एकघातीय सम्बन्ध है। व्यापक रूप में सम्बन्ध $Ax + By + C = 0$ हमेशा एक सरल रेखा के समीकरण को व्यक्त करता है।

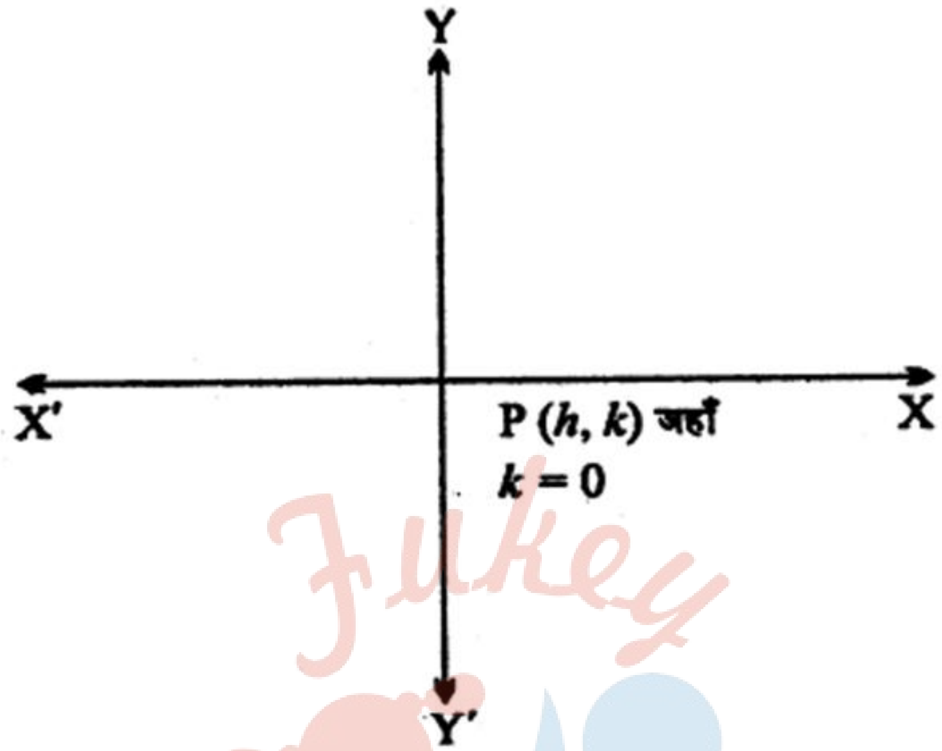
अब हम भिन्न-भिन्न स्थितियों या शर्तों के अन्तर्गत सरल रेखा के समीकरण को व्युत्पन्न करते हैं।

x-अक्ष का समीकरण (Equation of x-axis)

माना x-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु P के निर्देशांक (h, k) हैं। बिन्दु P इस प्रकार गति करता है कि उसकी कोटि अर्थात् y निर्देशांक हमेशा शून्य रहे, क्योंकि x-अक्ष पर प्रत्येक बिन्दु की कोटियाँ शून्य होती हैं। फलत: $k = 0$.

अतः x-अक्ष का समीकरण $y = 0$ हुआ।

Fukey Education

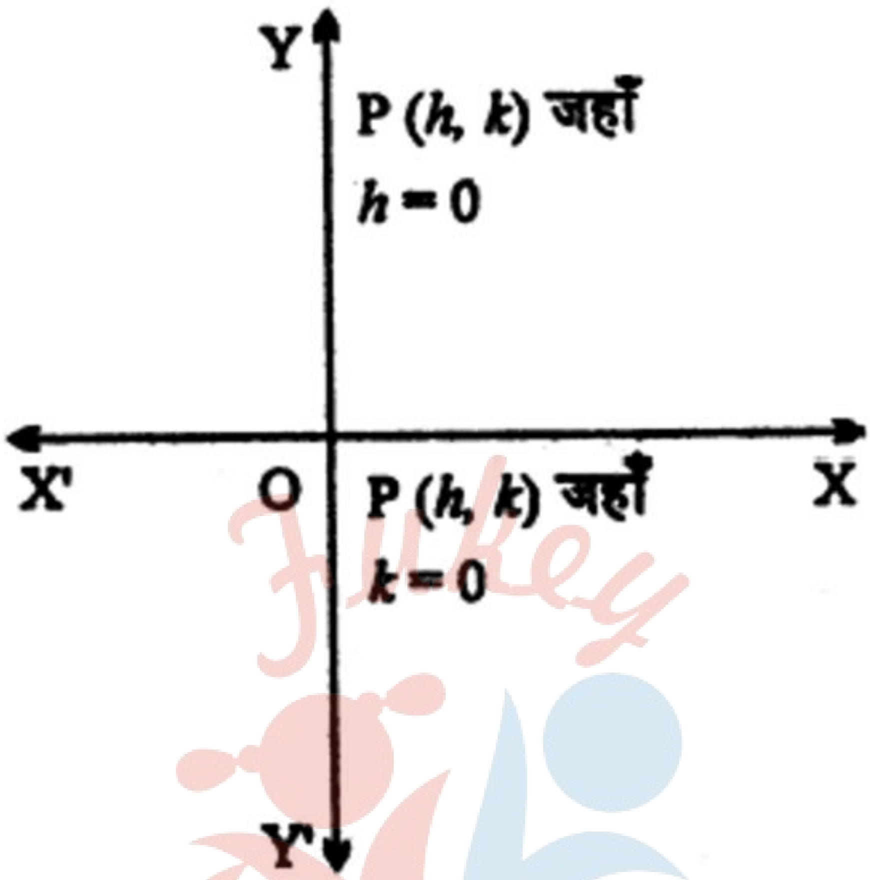


Y-अक्ष का समीकरण (Equation of Y-axis)

माना Y-अक्ष पर स्थित किसी चर बिन्दु P के निर्देशांक (h, k) हैं। बिन्दु P इस प्रकार गति करता है कि उसका भुज अर्थात् x- निर्देशांक हमेशा शून्य रहे, क्योंकि Y-अक्ष के प्रत्येक बिन्दु का x-निर्देशांक शून्य होता है। फलत: h = 0.

अत: Y-अक्ष का समीकरण x = 0 हुआ।

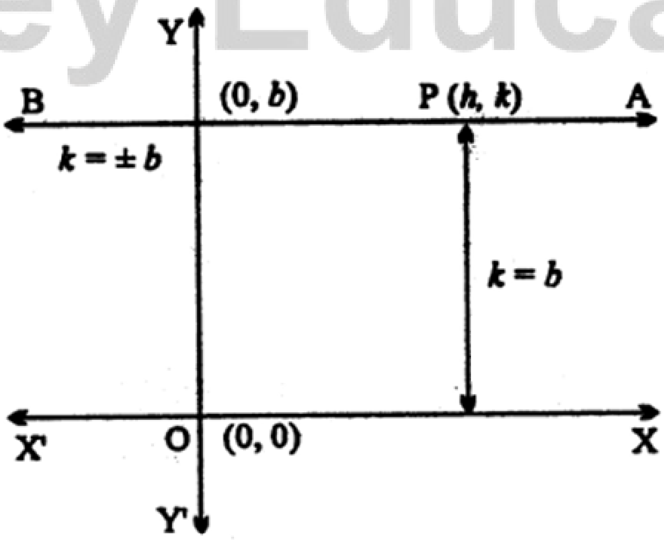
Fukey Education



उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जो x-अक्ष के समान्तर हो (Find the Equation of a Straight Line Which is Parallel to X-axis)

माना AB कोई सरल रेखा है जो x-अक्ष के समान्तर है।

Fukey Education



रेखा AB पर कोई चर बिन्दु P (h, K) लिया। अब यह चर बिन्दु Pइस प्रकार गति करता है कि x-अक्ष से इसकी दूरी सदैव अचर बनी रहे, जिससे चर बिन्दु की कोटि (-निर्देशांक) हमेा अचर रहेगी। (दिया हुआ है कि रेखा AB, X-अक्ष के समान्तर है)

अत: $k = b$ (अचर)

जहाँ, । रेखा AB की x- अक्ष से दूरी है, जिससे x- अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण $y = \pm b$ हुआ, यहाँ b का मान धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है,

अर्थात् $y = \pm b$

उस रेखा का समीकरण ज्ञात करना जो अक्ष के समान्तर हो (Find the Equation of Straight Line Which is Parallel to Y-axis)

माना Y-अक्ष के समान्तर AB कोई सरल रेखा है तथा रेखा AB पर कोई चर बिन्दु P (h, k) है।

रेखा AB एक ऐसे चर बिन्दु का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार गति करता है कि Y-अक्ष से उसकी दूरी सदैव अचर बनी रहे, अर्थात् बिन्दु P का भुज (x-निर्देशांक) हमेशा अचर रहेगा। (दिया . हुआ है कि रेखा AB, Y-अक्ष के समान्तर है)

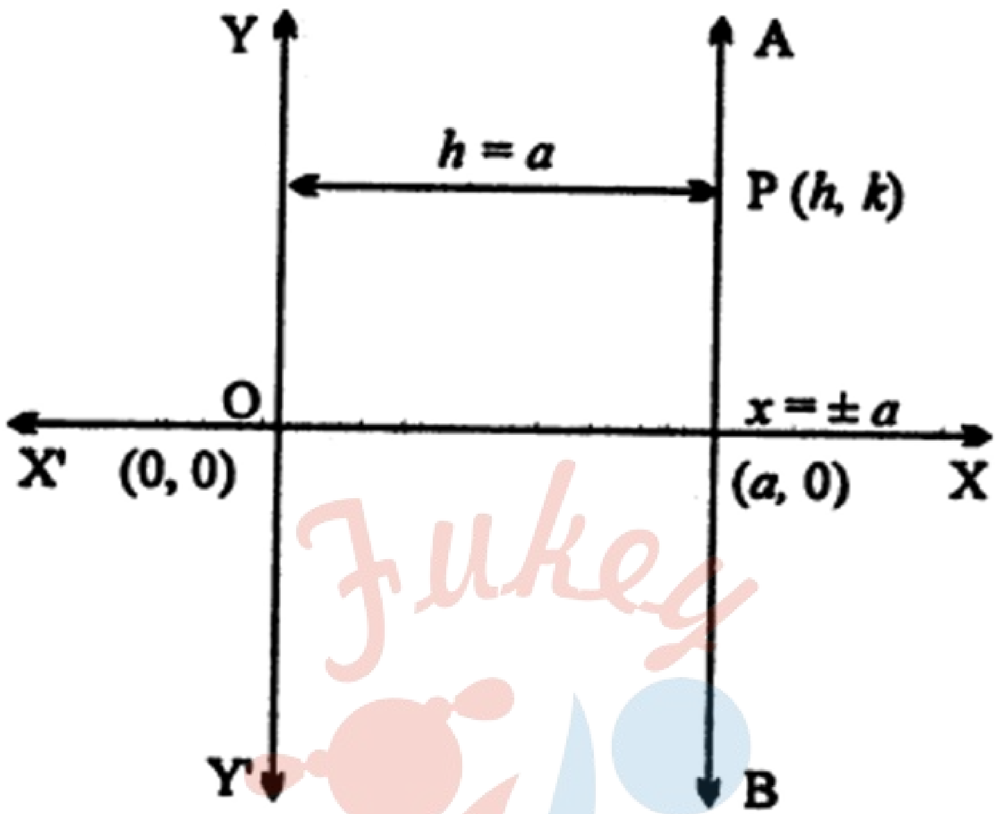
अत: $h = a$, जहाँ रेखा AB की Y-अक्ष से दूरी a है।

इस प्रकार, Y-अक्ष के समान्तर रेखा AB का समीकरण $x = a$ हुआ, जहाँ a का मान धनात्मक या ऋणात्मक दोनों में से कोई भी हो सकता है।

अतः Y-अक्ष के समान्तर रेखा AB का समीकरण है,

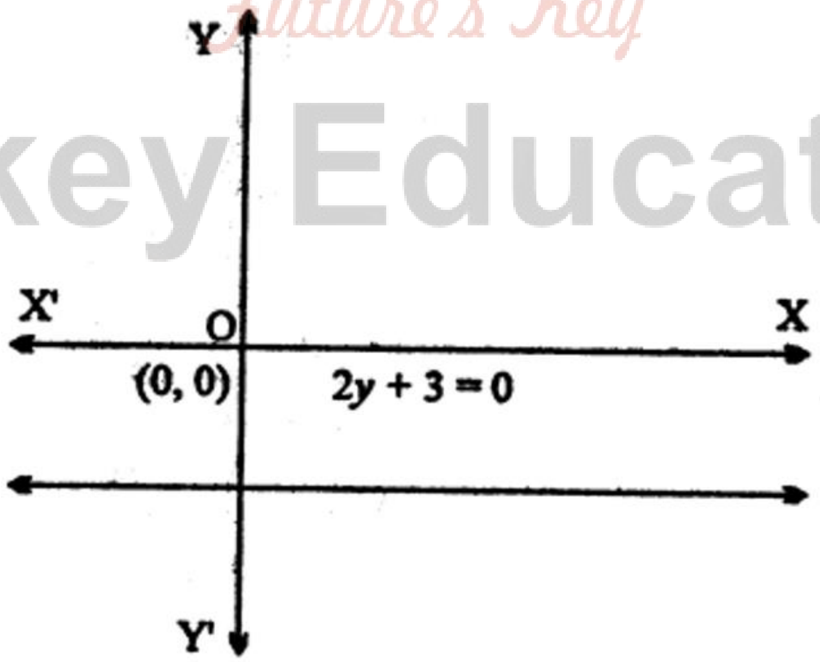
$x = \pm a$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



उदाहरण 1. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x- अक्ष के समान्तर तथा इससे $-\frac{3}{2}$ इकाई दूरी पर है।

हल : दी गई रेखा X- अक्ष के समान्तर है। अत: रेखा का समीकरण y = b (अचर) होगा।



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

यह रेखा X- अक्ष से $-\frac{3}{2}$ की दूरी पर है।

$$\therefore b = -\frac{3}{2}$$

अत: रेखा का समीकरण है :

$$y = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2y = -3$$

$$\Rightarrow 2y + 3 = 0.$$

उदाहरण 2. बिन्दु (p,q) से गुजरने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो Y-अक्ष के समान्तर हो।

हल: माना Y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण x = a (अचर) है।

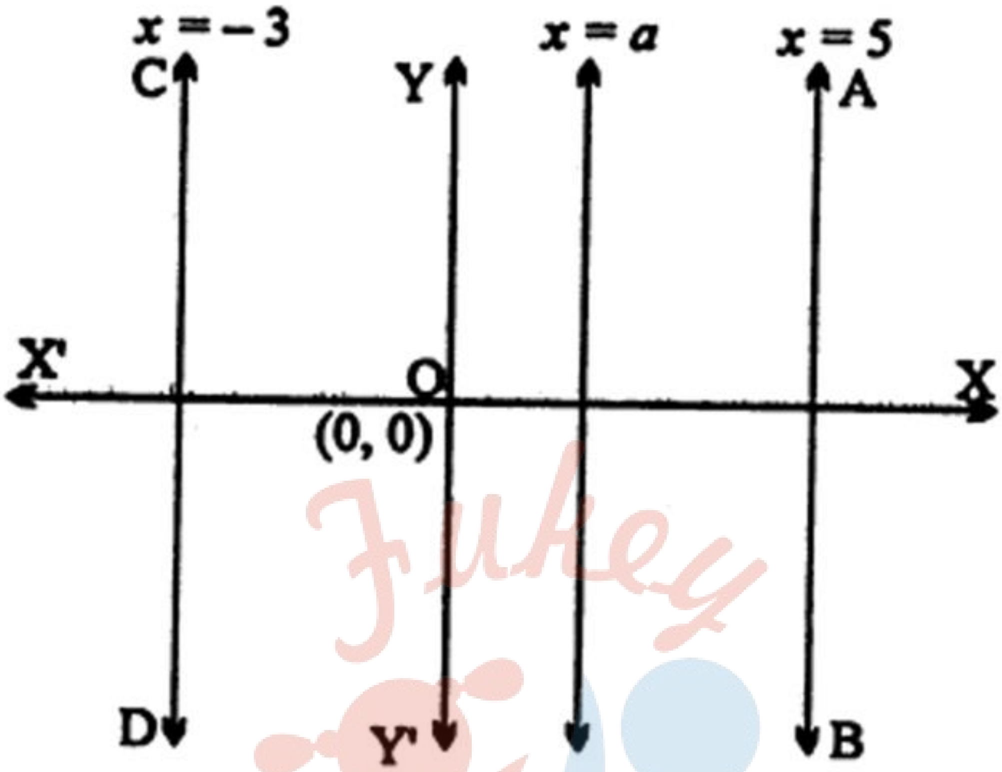
यह रेखा दिये हुए बिन्दु (p, q) से जाती है।

अतः बिन्दु (p. q) रेखा के समीकरण को संतुष्ट करेगा जिससे रेखा का समीकरण x = p होगा।

उदाहरण 3. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं x = -3 तथा x = 5 से समान दूरी पर है।

हल : दी हुई रेखायें x = -3 तथा x= 5. Y-अक्ष के समान्तर हैं। अतः अभीष्ट रेखा भी Y-अक्ष के समान्तर होगी।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



माना रेखा का समीकरण है:

X = a ...(1)

चूँकि दी गई रेखाएँ अभीष्ट रेखा से बराबर दूरी पर हैं, अतः अभीष्ट रेखा की Y-अक्ष से दूरी

$$x = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow x = 1$$

यही अभीष्ट रेखा का समीकरण होगा।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 10.1 (पृष्ठ संख्या 225-226)

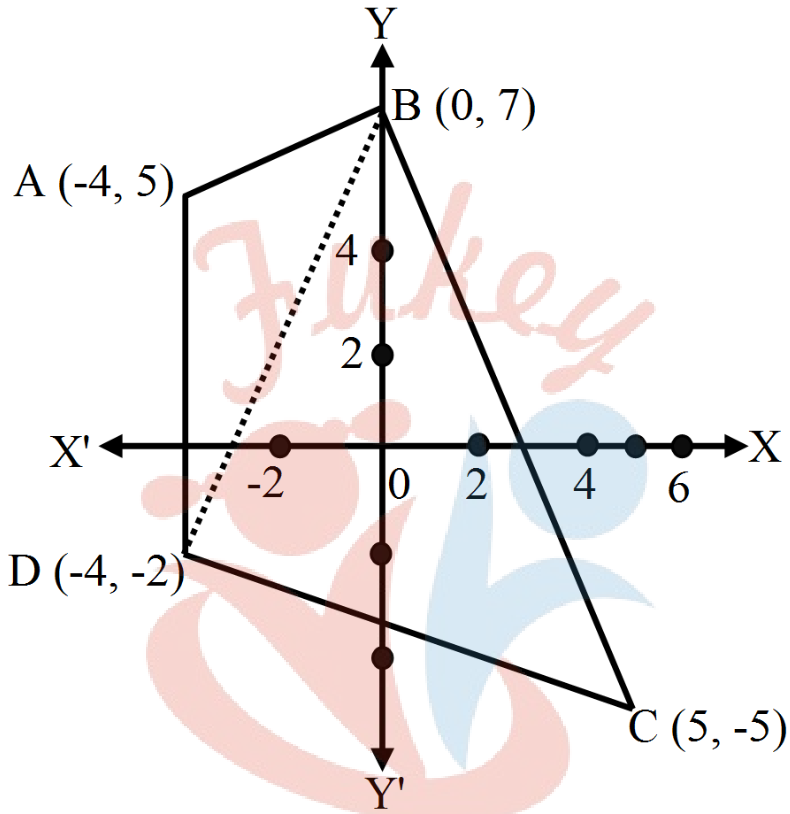
प्रश्न 1 कार्तीय तल में एक चतुर्भुज खींचिए जिसके शीर्ष (-4, 5), (0, 7), (5, - 5) और (-4, -2) हैं। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

दिए गए बिन्दुओं (-4, 5), (0, 7), (5, -5) और (-4, -2) क्रमशः A, B, C, D द्वारा दर्शाया गया है। चतुर्भुज ABCD को दो भागों में बाँटा गया है।

जो △ABD तथा △ABD के रूप में हैं।



$\triangle ABD$ के शीर्ष A(-4, 5), B(0, 7), D(-4, -2) है

$\therefore \triangle ABD$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|[-4(7+2)+0(-2-5)+(-4)(5-7)]|$

$= \frac{1}{2}|[-36+8]| = \frac{1}{2} \times 28$

= 14 वर्ग इकाई

$\triangle BDC$ के शीर्ष B(0, 7), D(-4, -2), C (5, -5) हैं।

$\triangle BDC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[0(-2+5)-4(-5-7)+5(7+2)]$

$= \frac{1}{2}[48+45] = \frac{1}{2} \times 93$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

= 46.5 वर्ग इकाई

$\therefore$ चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \triangle ABD$ का क्षेत्रफल $+ \triangle BDC$ का क्षेत्रफल

= 14 + 46.5

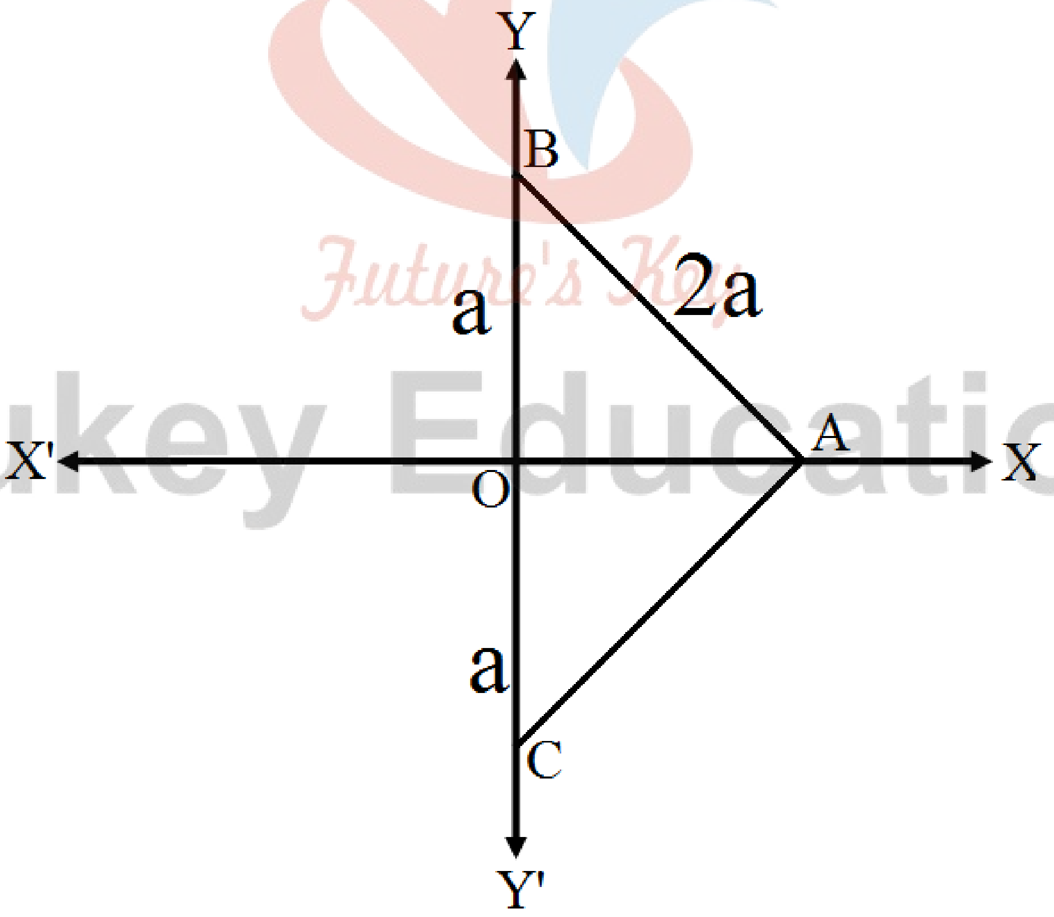
= 60.5 वर्ग इकाई

प्रश्न 2 2a भुजा के समबाहु त्रिभुज का आधार y-अक्ष के अनुदिश इस प्रकार है कि आधार का मध्य बिन्दु मूल बिन्दु पर है। त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना △ABC की भुजा BC, y- अक्ष के अनुदिश है जिसका मध्य बिन्दु मूल बिन्दु O है।

⇒ B और C के शीर्ष बिन्दु (0, a) और (0, -a) हैं।

बिन्दु A, x- अक्ष पर है, AB = 2a, OB = a



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

समकोण त्रिभुज OAB में,

$OA^2 = AB^2 - OB^2 = (2a)^2 - a^2$

$= 4a^2 - a^2 = 3a^2$

$\therefore OA = \sqrt{3}a$

$\therefore$ A के निर्देशांक $(3\sqrt{a}, 0)$ हैं।

अतः $\triangle ABC$ के निर्देशांक $(3\sqrt{a}, 0), (0, a), (0 - a)$ हैं।

प्रश्न 3 $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, Y_2)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए जब-

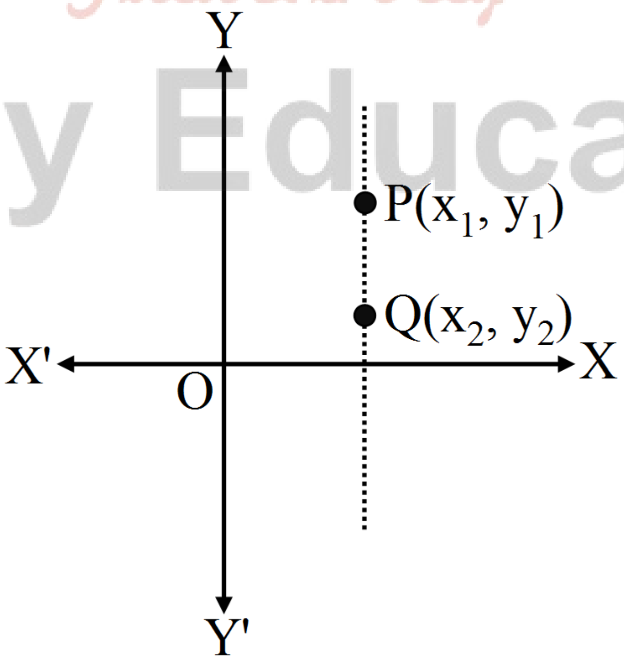
i. PQ,y- अक्ष के समांतर है,

ii. PQ, x- अक्ष के समांतर है।

उत्तर-

i. जब कोई रेखा y-अक्ष के समांतर होती है तो उस पर जितने भी बिन्दु होंगे उनके x-निर्देशांक बराबर होते हैं अर्थात् $X_1 = X_2$

PQ = $|y_2 - y_2|$



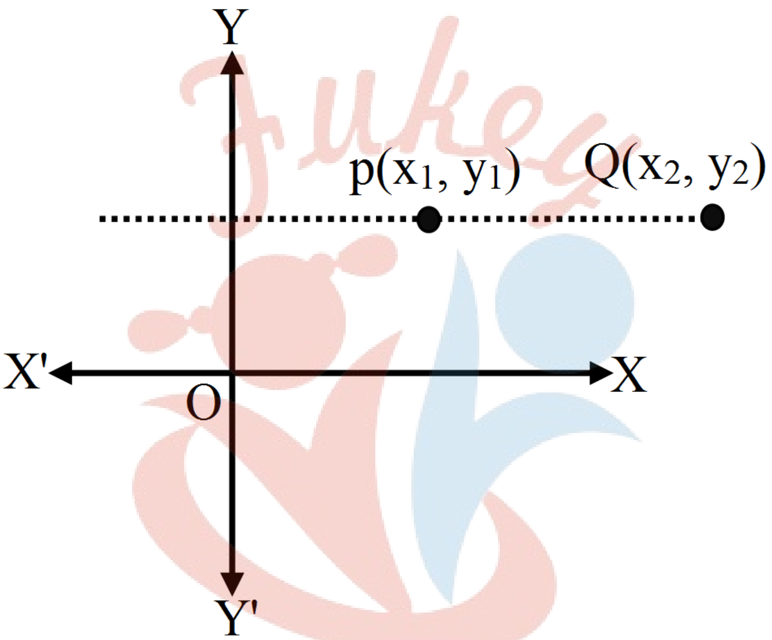
Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

ii. जब कोई रेखा x-अक्ष के समांतर होती है तो उसके प्रत्येक बिन्दु का y- निर्देशांक बराबर होता है।

अर्थात्

$y_1 = Y_2$

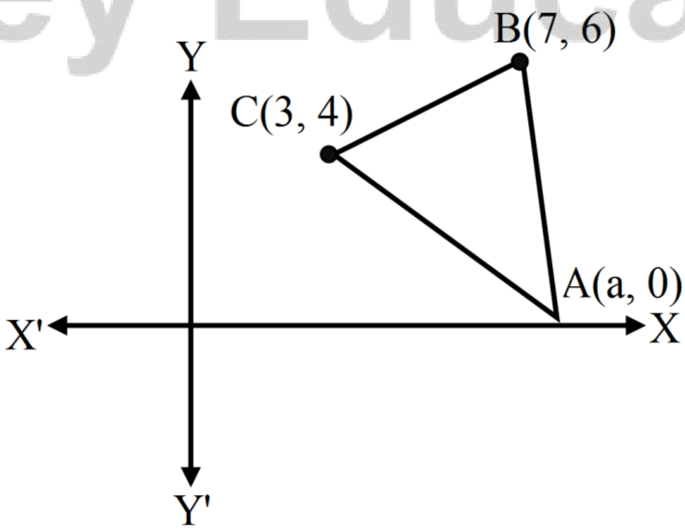
$PQ=|x_2-x_1|$



प्रश्न 4 x-अक्ष पर एक बिन्दु ज्ञात कीजिए जो (7, 6) और (3, 4) बिन्दुओं से समान दूरी पर है।

उत्तर- मान लीजिए x-अक्ष पर बिन्दु A(a, 0), बिन्दु B(7, 6) और C(3, 4) से समान दूरी पर है।

Fukey Education



अर्थात् AB = AC

$AB_2 = AC_2$

$(a - 7)^2 + (0 - 6)^2 = (a - 3)^2 + (0 - 4)^2$

$\therefore a^2 - 14a + 49 + 36 = a^2 - 6a + 9 + 16$

$-14a + 6a = 25 - 85$

$= -60$

$-8a = -60$

$$a = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$$

अतः बिन्दु 4 के निर्देशांक $\left(\frac{15}{2}, 0\right)$ है।

प्रश्न 5 रेखा की ढाल ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु और P(0, -4) तथा B(8, 0) बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिन्दु से जाती है।

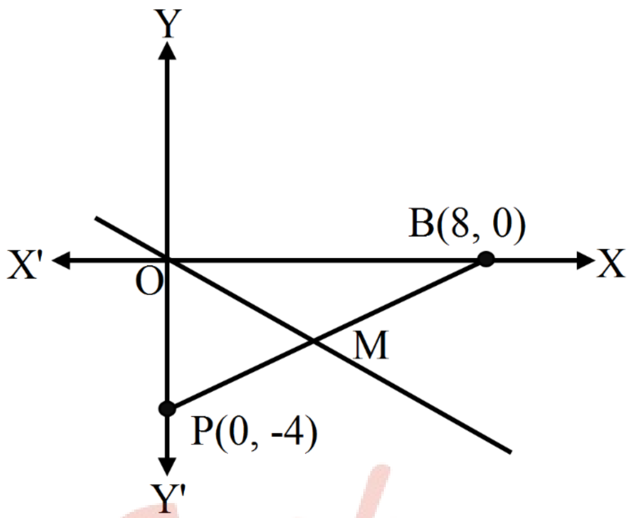
उत्तर-

बिन्दु P(0, -4) और B(8, 0) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिन्दु

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$= \frac{0+8}{2} = 4$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



$$y = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{-4+0}{2}$$

$$= \frac{-4}{2} = -2$$

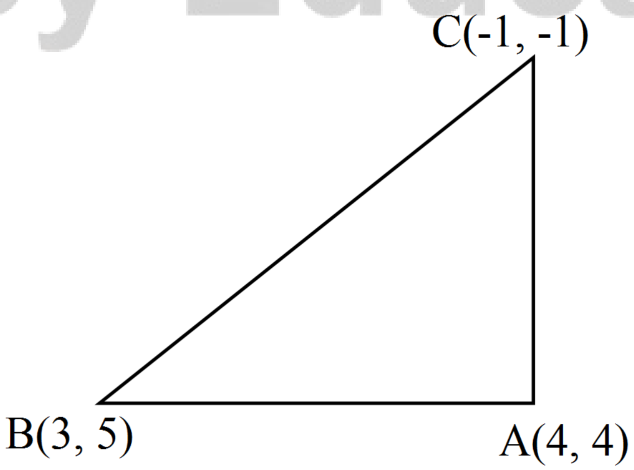
⇒ PB का मध्य बिन्दु M के निर्देशांक (4, -2) है।

मूल बिन्दु O के निर्देशांक (0, 0) हैं।

∴ OM की ढाल $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2-0}{4-0} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

प्रश्न 6 पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग बिना दिखलाइए कि बिन्दु (4, 4), (3, 5) और (-1, -1) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

उत्तर- माना दिए गए बिन्दु A(4, 4), B(3, 5) और C(-1, -1) हैं, तब



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

AB की ढाल $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{5-4}{3-4} = \frac{1}{-1} = -1 = m_1$

BC की ढाल $= \frac{-1-5}{-1-3} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

CA की ढाल $= \frac{4+1}{4+1} = \frac{5}{5} = 1 = m_2$

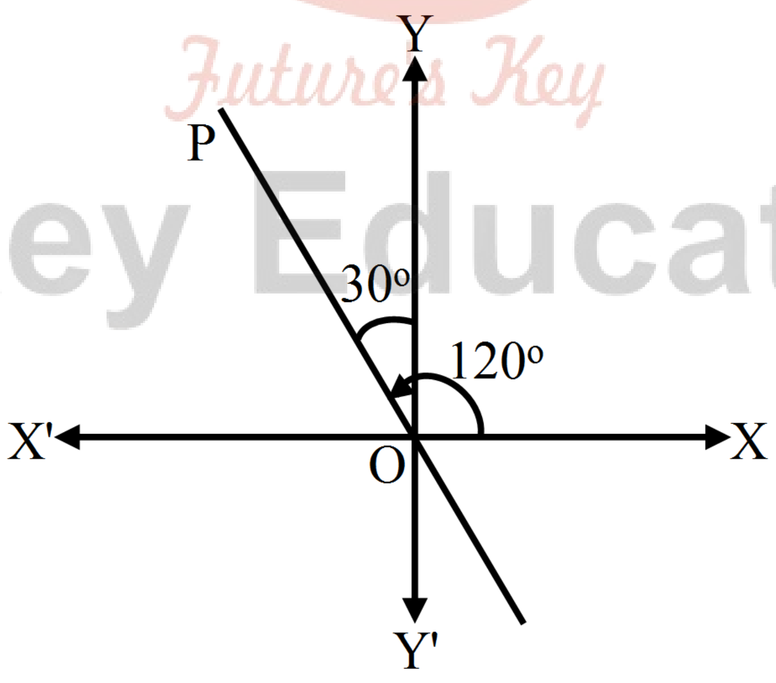
AB की ढाल × CA की ढाल = $m_1 \times m_2 = -1 \times 1 = -1$

अतः AB ⊥ CA

⇒ A, B, C एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष है।

प्रश्न 7 उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष की धन दिशा से वामावर्त्त मापा गया 30° का कोण बनाती है।

उत्तर-



Fukey Education

माना रेखा OP, y-अक्ष से वामावर्त 30° का कोण बनाती है।

$\therefore$ x-अक्ष की धन दिशा से $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ का कोण बनाती है।

$\Rightarrow$ रेखा OP की ढाल $= \tan 120 = -\sqrt{3}$

यह रेखा मूल बिन्दु (0, 0) से होकर जाती है। रेखा का बिन्दु ढाल रूप है

$y - y_1 = m(x - x_1)$

OP का समीकरण $y - 0 = -\sqrt{3}(x - 0)$

$$y = -\sqrt{3}x$$

प्रश्न 8 x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु (x, -1), (2, 1) और (4, 5) संरेख हैं।

उत्तर-

मान लीजिए बिन्दु A (x, -1), B(2, 1), C(4, 5) संरेख हैं यदि

AB की ढाल $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1+1}{2-x} = \frac{2}{2-x} \ldots (1)$

BC की ढाल $= \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2 \ldots (2)$

$\therefore$ समीकरण (1) और (2) से,

$$\frac{2}{2-x} = 2$$

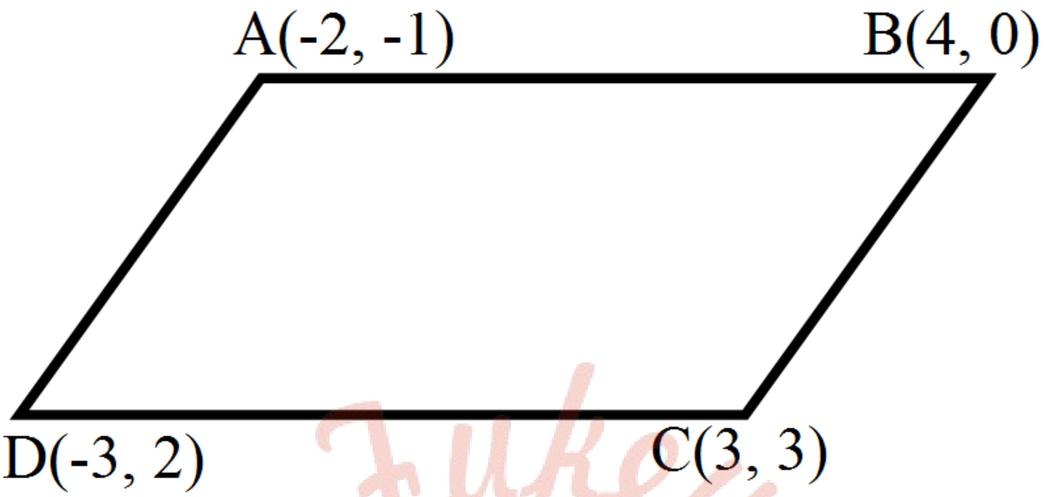
$$1 = 2 - x$$

$$x = 1$$

प्रश्न 9 दूरी सूत्र का प्रयोग किए बिना दिखलाइए कि बिन्दु (-2,-1), (4, 0), (3, 3) और (-3, 2) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर- मान लीजिए एक चतुर्भुज के शीर्ष A(-2, -1), B(4, 0), C(3, 3), तथा D(-3, 2) हैं।



AB की ढाल $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0+1}{4+2} = \frac{1}{6}$

DC की ढाल $= \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$

AB की ढाल = DC की ढाल

अर्थात् AB || DC

BC की ढाल $= \frac{3-0}{3-4} = \frac{3}{-1} = -3$

AD की ढाल $= \frac{2+1}{-3+2} = \frac{3}{-1} = -3$

∴ BC की ढाल = AD की ढाल

अर्थात् BC || AD

अतः AB || DC, BC || AD

अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

प्रश्न 10 x-अक्ष और (3, -1) और (4, -2) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर- माना 4(3, -1), B(4, -2) को मिलाने वाली रेखा AB की ढाल = $\frac{-2+1}{4-3} = \frac{-1}{1} = -1$

यदि x- अक्ष और AB के बीच θ कोण हो, तो

$\tan\theta = -1 = \tan 135°$

$\theta = 135°$

प्रश्न 11 एक रेखा की ढाल दूसरी रेखा की ढाल का दुगुना है। यदि दोनों के बीच के कोण की स्पर्शज्या (tangent) $\frac{1}{3}$ है तो रेखाओं की ढाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना रेखाओं की ढाल m_1, m_2 हों, तब

$\therefore m_1 = 2m_2$

यदि दोनों रेखाओं के बीच कोण हो, तो

$$\tan\theta = \frac{1}{3}$$

हम जानते है कि

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{1}{3} \text{ जहाँ } m_1 = 2m_2$$

$$\therefore \pm\frac{2m_2 - m_2}{1 + 2m_2^2} = \frac{1}{3}$$

$$\pm\frac{m_2}{1 + 2m_2^2} = \frac{1}{3}$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर,

$$\therefore 1 + 2m_2^2 = 3m_2$$

$$\text{या } 2m_2^2 - 3m_2 + 1 = 0$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\Rightarrow (m_2 - 1)(2m_2 - 1) = 0$$

$$\therefore m_2 = 1, \frac{1}{2}$$

$m_1 = 2m_2$ में $m_2 = 1$ रखने पर,

$m_1 = 1 \times 2 = 2$

रेखाओ की ढाल 2 और 1 है तथा $1, \frac{1}{2}$ है।

-ve चिन्ह लेने पर, $1 + 2m_2^2 = -3m_2$

या $2m_2^2 + 3m_2 + 1 = 0$

$(m_2 + 1)(2m_2 + 1) = 0$ अर्थात् $m_2 = -1, -\frac{1}{2}$

$\therefore$ रेखा की ढाल -2, -1 तथा $-1, -\frac{1}{2}$ है।

प्रश्न 12 एक रेखा (x_1, y_1) और (h, k) से जाती है। यदि रेखा की ढाल m है तो दिखाइए

$k - y_1 = m(h - x_1)$

उत्तर- माना रेखा AB बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और $B(h, k)$ से गुजरती हो, तब

$\therefore$ AB की ढाल $= \frac{k - y_1}{h - x_1} = m$

अर्थात् $k - y_1 = m(h - x_1)$

प्रश्न 13 यदि तीन बिन्दु (h, 0), (a, b) और (0, k) एक रेखा पर हैं तो दिखाइए कि $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

मान लीजिए बिन्दु A (h, 0), B(a, b), तथा C(0, k) एक रेखा पर हों, तब

$\therefore$ AB की ढाल $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b - o}{a - h} = \frac{b}{a - h}$

BC की ढाल $= \frac{k - b}{o - a} = \frac{k - b}{-a}$

$\Rightarrow$ AB की ढाल = BC की ढाल

$\therefore \frac{b}{a - h} = \frac{k - b}{-a}$

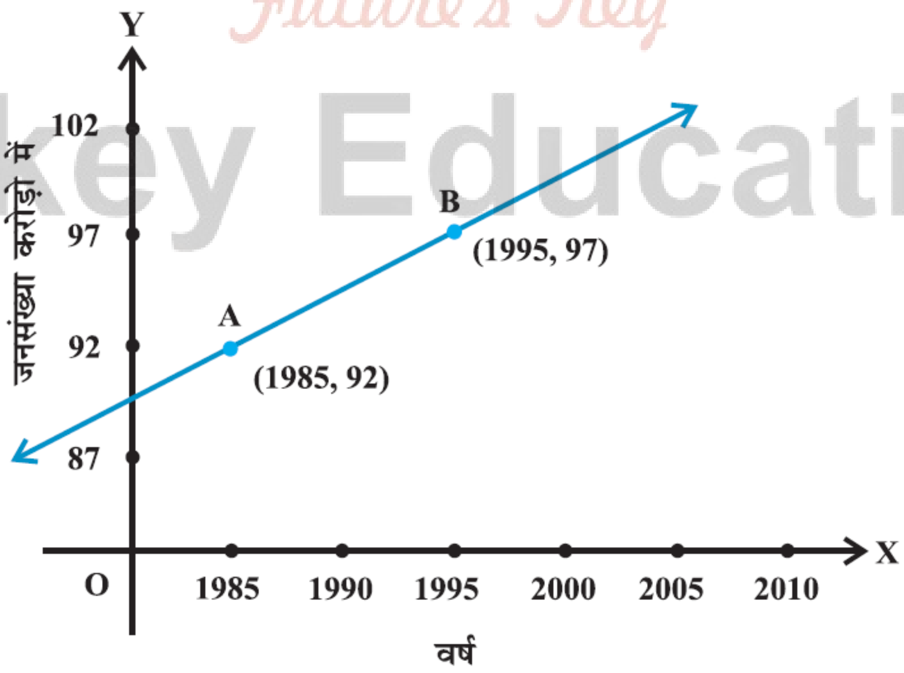
(a - h) (k - b) = -ab

ak - ab - hk + hb = -ab

$\therefore$ ak + hb = hk

hk से भाग देने पर, $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$

प्रश्न 14 जनसंख्या और वर्ष के निम्नलिखित लेखाचित्र पर विचार कीजिए। (देखिए आकृति में) रेखा AB की ढाल ज्ञात कीजिए और इसके प्रयोग से बताइए कि वर्ष 2010 में जनसंख्या कितनी होगी?



उत्तर-

दी गयी आकृति में रेखा AB बिन्दु A(1985, 92) और B(1995,97) से होकर जाती है।

AB की ढाल $= \frac{97-92}{1995-1985} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

मान लीजिए सन् 2010 में जनसंख्या y_1 करोड़ होगी जो बिन्दु P(2010, y_1), AB पर पड़ता है।

∴ ABP संरेखीय है।

AB की ढाल = BP की ढाल

$$= \frac{1}{2} = \frac{y_1-97}{2010-1995} = \frac{y_1-97}{15}$$

$$\therefore 2(y_1 - 97) = 15$$

$$2y_1 = 15 + 2 \times 97$$

$$= 15 + 194 = 209$$

$$\therefore y_1 = \frac{209}{2} = 104.5$$

सन् 2010 में जनसंख्या 104.5 करोड़ होगी।

प्रश्नावली 10.2 (पृष्ठ संख्या 234-235)

Fukey Education

प्रश्न 1 रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

x- अक्ष और y-अक्षों के समीकरण लिखिए।

उत्तर- x-अक्ष का समीकरण y = 0

तथा y-अक्ष का समीकरण x = 0

प्रश्न 2 रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

ढाल $\frac{1}{3}$ और बिन्दु (-4, 3) से जाने वाली।

उत्तर-

ढाल $m = \frac{1}{2}$, बिन्दु (-4, 3)

अभीष्ट रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x + 4)$$

$$2y - 6 = x + 4$$

$$\therefore x - 2y + 10 = 0$$

प्रश्न 3 रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

बिन्दु (0, 0) से जाने वाली और ढाल m वाली।

उत्तर- दिया है- बिन्दु (0, 0), ढाल = m

ढाल m, तथा (x_1, y_1) से जाने वाली रेखा का समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore$ y - 0 = m(x - 0)

अतः अभीष्ट समीकरण y = mx

प्रश्न 4 रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

बिन्दु $(2, 2\sqrt{3})$ से जाने वाली और x-अक्ष से 75° के कोण पर झुकी हुई।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

चूँकि रेखा x-अक्ष के साथ 75° पर झुकी हुई है, तब रेखा की ढाल

$$m = \tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

रेखा बिंदु $(2, 2\sqrt{3})$ से होकर जाती है।

रेखा जो (x_1, y_1) से होकर जाती है तथा ढाल m हो तो उसका समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$

यहाँ $x_1 = 2$ तथा $y_1 = 2\sqrt{3}$ रखने पर,

$$y - 2\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})(x - 2)$$

$$= (2 + \sqrt{3})x - (4 + 2\sqrt{3})$$

$$(2 + \sqrt{3})x - y + 2\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} = 0$$

अतः $(2 + \sqrt{3})x - y - 4 = 0$

प्रश्न 5 रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

मूल बिन्दु के बाईं ओर x-अक्ष को 3 इकाई की दूरी पर प्रतिच्छेद करने तथा ढाल -2 वाली।

उत्तर- मूल बिन्दु से बाईं ओर 3 इकाई की दूरी पर स्थित बिन्दु (-3, 0) होगा तथा ढाल m = -2m तथा (x_1, y_1) के द्वारा रेखा का समीकरण,

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$y - y_1 = m(x - x_1)$

यहाँ $x_1 = -3$ तथा $y_1 = 0$ रखने पर,

$y - 0 = -2(x + 3)$

$y = -2x - 6$

$2x + y + 6 = 0$

प्रश्न 6 रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

मूल बिन्दु से ऊपर y-अक्ष को 2 इकाई की दूरी पर प्रतिच्छेद करने वाली और x-अक्ष की धन दिशा के साथ 30° का कोण बनाने वाली।

उत्तर- मूल बिन्दु से y-अक्ष पर 2 इकाई की दूरी पर स्थित बिन्दु (0, 2) होगा। x-अक्ष की धन दिशा के साथ रेखा 30° का कोण बनाती है।

$$\therefore m = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 0)$$

$$\sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = x$$

$$x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$$

प्रश्न 7 रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

बिन्दुओं (-1, 1) और (2 - 4) से जाते हुए।

Fukey Education

उत्तर-

बिन्दुओ (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से जाने वाली रेखा की ढाल $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore$ (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2}(x - x_1)$$

दिया है- x1 = -1, y1 = 1, x2 = 2 और y2 = -4 रखने पर

$$y - 1 = \frac{-4-1}{2+1}(x + 1)$$

$$= -\frac{5}{3}(x + 1)$$

$$3y - 3 = -5x - 5$$

अतः $5x + 3y + 2 = 0$

प्रश्न 8 रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी मूल बिन्दु से लांबिक दूरी 5 इकाई और लंब, धन x-अक्ष से 30° का कोण बनाती है।

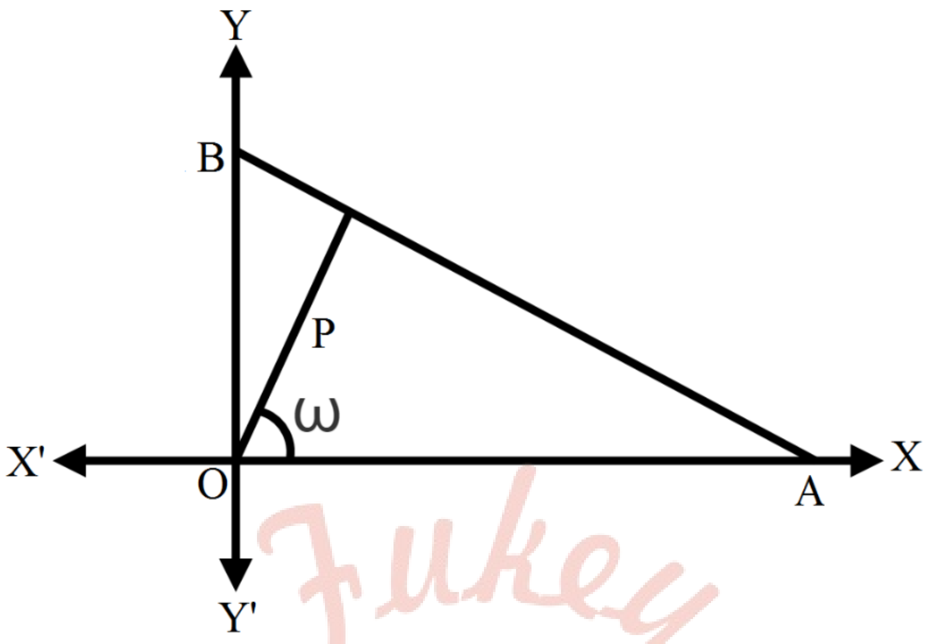
Fukey Education

उत्तर-

हम जानते हैं कि लंब रूप में रेखा AB का समीकरण,

$$x \cos w + y \sin w = P$$

यहाँ पर दिया है- $w = 30^\circ$, तथा $p = 5$



∴ रेखा AB का समीकरण,

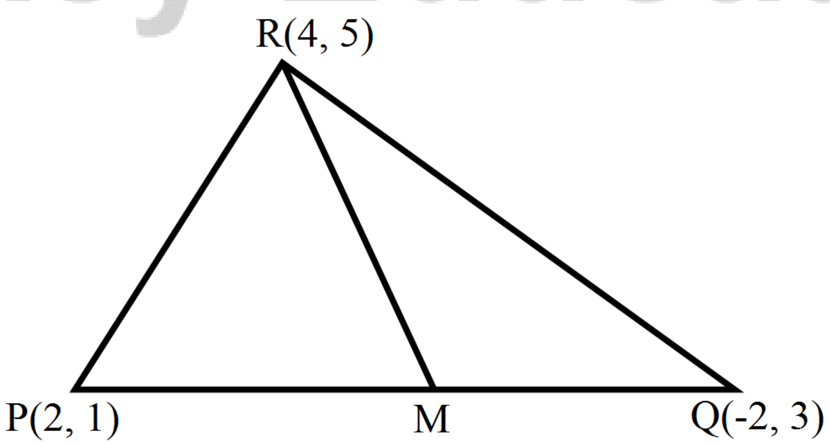
$$x\cos 30 + y\sin 30 = 5$$

$$x\frac{\sqrt{3}}{2} + y\frac{1}{2} = 5$$

$$\therefore \sqrt{3}x + y = 10$$

प्रश्न 9 △PQR के शीर्ष P(2, 1), Q(-2, 3) और R(4, 5) हैं। शीर्ष R से जाने वाली माध्यिका का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

PQ का मध्य बिन्दु $M\left(\frac{2-2}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ अर्थात् m(0, 2) है।

∴ दो बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

अब बिन्दुओ R(4, 5) तथा M(0, 2) से जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - 5 = \frac{2-5}{0-4}(x - 4)$$

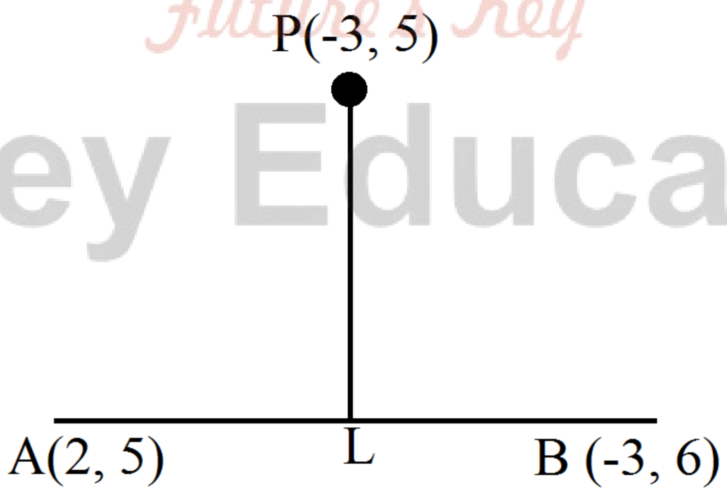
$$4(y - 5) = 3(x - 4)$$

$$3x - 4y + 8 = 0$$

अतः मध्यिका RM का समीकरण 3x - 4y + 8 = 0

प्रश्न 10 (-3, 5) से होकर जाने वाली और बिन्दु (2, 5) और (-3, 6) से जाने वाली रेखा पर लंब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

बिन्दु A(2, 5) और B(-3, 6) से होकर जाने वाली रेखा का ढाल

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{6-5}{-3-2} = \frac{1}{-5}$$

$$= -\frac{1}{5}$$

यदि PL बिन्दु P(-3, 5) से AB पर लम्ब डाला गया हो तो उसकी ढाल m_2 मान लीजिए

रेखाएँ PL और AB परस्पर लम्ब हैं।

यदि PL की ढाल × AB की ढाल = -1

अर्थात $m_2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -1$

∴ $m_2 = 5$

PL की ढाल 5 है और P(-3, 5) से होकर जाती है तो PL का समीकरण,

$y - y_1 = m_2(x - x_1)$

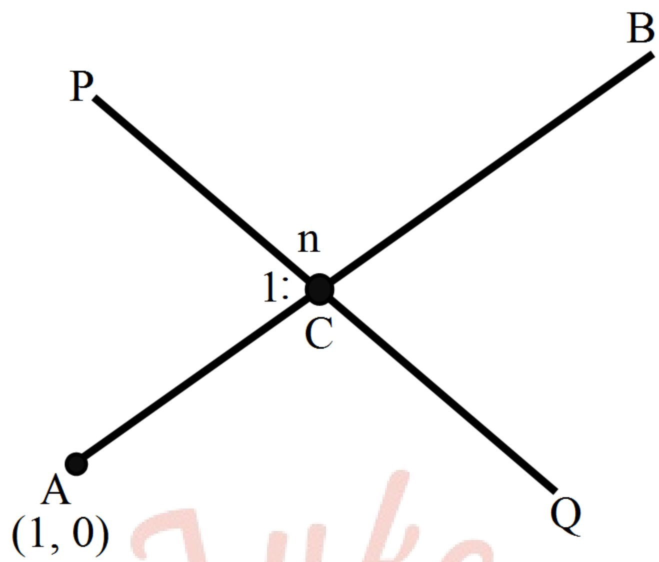
$y - 5 = 5(x + 3)$

∴ $5x - y + 20 = 0$

प्रश्न 11 एक रेखा (1, 0) तथा (2, 3) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखंड पर लम्ब है तथा उसको 1 : n के अनुपात में विभाजित करती है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



रेखा AB बिन्दु A(1, 0) तथा B(2, 3) से होकर जाती है।

AB की ढाल $= \frac{3-0}{2-1} = \frac{3}{1}$

$$PQ \perp AB$$

AB की ढाल $= \frac{3}{1}$

PQ की ढाल, $m = \frac{1}{\frac{-3}{1}} = -13$

PQ रेखा AB को C पर प्रतिछेदन करती है।

साथ ही बिन्दु C रेखाखंड AB को 1 : n के अनुपात में बांटता है।

अर्थात् $C\left(\frac{1\times2+n\times1}{n+1}, \frac{1\times3+n\times0}{n+1}\right)$

$$C\left(\frac{n+2}{n+1}, \frac{3}{n+1}\right)$$

Fukey Education

अब रेखा PQ का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

जहाँ $x_1 = \frac{n+2}{n+1}$ और $y_1 = \frac{3}{n+1}$

$$y - \frac{3}{n+1} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$3(n+1)y = -[(n+1)x - (n+2)]$$

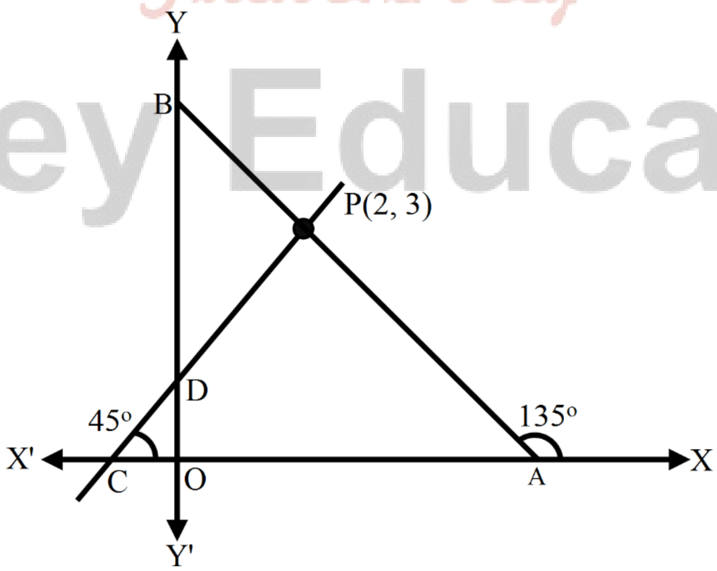
$$= (n+1)x + 3(n+1)y$$

$$= n + 2 + 9 = n + 11$$

$$= (n+1)x + 3(n+1)y = n + 11$$

प्रश्न 12 एक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षों से समान अंत:खण्ड काटती है और बिन्दु (2, 3) से जाती है।

उत्तर- रेखा AB बिन्दु P(2, 3) से होकर जाती है और निर्देशांक अक्षों पर समान अंत: खंड बनाती है।



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$OA = OB$

$\angle BAO = 45^\circ$

$\angle BAX = 135^\circ$

AB की ढाल, $m = \tan 135^\circ = -1$

रेखा का समीकरण, $y - y_1 = m(x - x_1)$

जहाँ $x_1 = 2$, $Y_1 = 3$ तथा $m = -1$

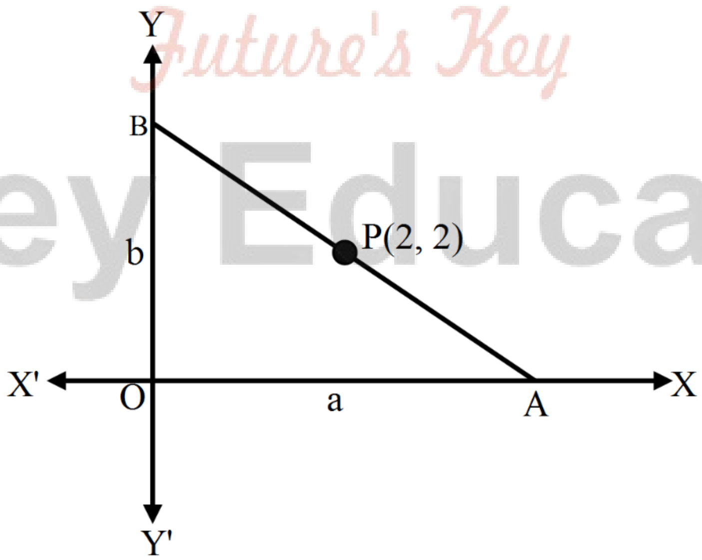
$y - 3 = -1(x - 2)$

$x + y - 5 = 0$

$x + y = 5$

प्रश्न 13 बिन्दु (2, 2) से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके द्वारा अक्षों से कटे अंतःखंडों का योग 9 है।

उत्तर- मान लीजिए P(2, 2) से होकर जाने वाली रेखा से अक्षों पर बने अंतः खंड a तथा b हैं।



अंतः खंड रूप में रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

यह रेखा P(2, 2) से होकर जाती है।

$\therefore \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1$

दिया है कि अंतः खंडों का योग 9 है।

$\therefore a + b = 9$

$\Rightarrow b = 9 - a$

b का मान (1) में रखने पर,

$\frac{2}{a} + \frac{2}{9 - a} = 1$

$2(9 - a) + 2a = a\,(9 - a)$

$18 - 2a + 2a = 9a - a_2$

$a_2 - 9a + 18 = 0$

$(a - 6)(a - 3) = 0$

$a = 6, 3$

$\therefore b = 3, 6$

जब $a = 6$ तथा $b = 3$ हो, तो रेखा का अभीष्ट समीकरण

$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$

$3x + 6y = 18$

$x + 2y = 6$

जब $a = 3$ तथा $b = 6$ हो, तब रेखा का अभीष्ट समीकरण,

Fukey Education

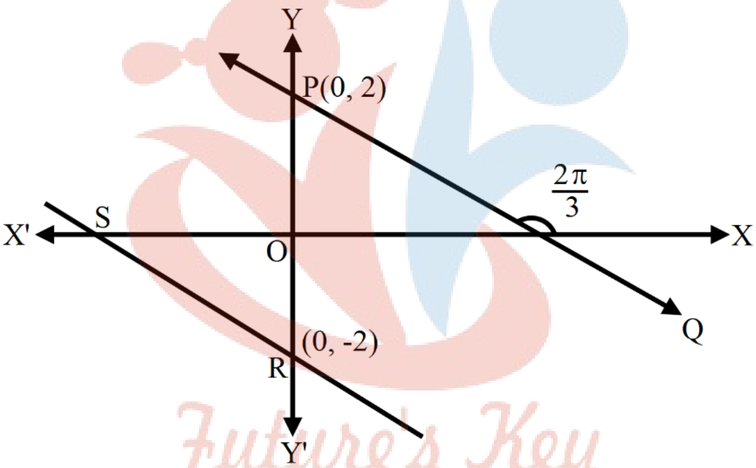
$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$

6x + 3y = 18

2x + y = 6

प्रश्न 14 बिन्दु (0, 2) से जाने वाली और धन x-अक्ष से $\frac{2\pi}{3}$ के कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। इसके समांतर और y-अक्ष को मूल बिन्दु से 2 इकाई नीचे की दूरी पर प्रतिच्छेद करती हुई रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना एक रेखा PQ बिन्दु P(0, 2) से होकर जाती है और धन x-अक्ष के साथ 2π3 का कोण बनाती है।



∴ PQ की ढाल $= \tan \frac{2\pi}{3}$

Fukey Education

$= -\sqrt{3}$

∴ रेखा PQ का समीकरण, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -\sqrt{3}(x - 0)$

$\sqrt{3}x + y - 2 = 0$

दूसरी रेखा RS रेखा PQ के समांतर है

∴ RS का ढाल $= -\sqrt{3}$

यह रेखा (0, -2) से होकर जाती है।

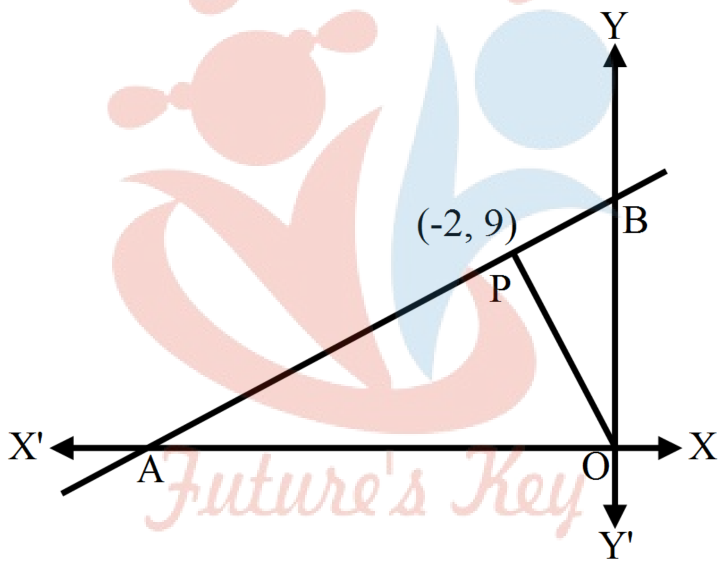
रेखा RS का समीकरण, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 2 = -\sqrt{3}(x - 0)$$

$$\sqrt{3}x + y + 2 = 0$$

प्रश्न 15 मूल बिन्दु से किसी रेखा पर डाला गया लम्ब रेखा से बिन्दु (-2, 9) पर मिलता है, रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



मान लीजिए रेखा AB पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब AB पर मिलता है।

OP की ढाल $= -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{9 - 0}{-2 - 0} = -\frac{9}{2}$$

परन्तु $AB \perp OP$

$\therefore$ AB की ढाल $= -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{9}{2}} = \frac{2}{9}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

अब AB की ढाल $\frac{2}{9}$ है और P(-2, 9) से होकर जाती है।

∴ AB का समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$

अर्थात् $y - 9 = \frac{2}{9}(x + 2)$

9y - 81 = 2x +4

2x - 9y + 85 = 0

प्रश्न 16 तांबे की छड़ की लम्बाई L (सेमी में) सेल्सियस ताप C का रैखिक फलन है। एक प्रयोग में यदि L= 124.942, जब C = 20 और L= 125.134 जब C = 110 हो, तो L को C के पदों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर- L ताप C का रैखिक फलन है।

(20, 124.942), (110, 125.134) इसका रैखिक फलन है। इन दो बिन्दुओं से संतुष्ट फलन

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$L - 124.942 = \frac{125.134 - 124.942}{110 - 20}(C - 20)$$

$$L - 124.942 = \frac{0.192}{90}(C - 20)$$

$$L = \frac{0.192}{90}(C - 20) + 124.942$$

प्रश्न 17 किसी दूध भण्डार का स्वामी प्रति सप्ताह 980 लीटर दूध, 14 रू प्रति लीटर के भाव से और 1220 लीटर दूध 16 रू प्रति लीटर के भाव से बेच सकता है। विक्रय मूल्य तथा मांग के मध्य के संबंध को रैखिक मानते हुए ज्ञात कीजिए कि प्रति सप्ताह वह कितना दूध 17 रू प्रति लीटर के भाव से बेच सकता है?

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर- दूध के भाव और मात्रा में रैखिक सम्बन्ध है। यह रेखा दो बिन्दुओं (14, 980), (16, 1220) से होकर जाती है।

इससे प्राप्त रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 980 = \frac{1220 - 980}{16 - 14}(x - 14)$$

$$= \frac{240}{2}(x - 14)$$

$$= 120(x - 14)$$

$$y = 980 + 120(x - 14)$$

जब x का मान 17 है तो y का मान नीचे दिया गया है।

y = 980 + 120(17 - 14)

= 980 + 120 × 3

= 980 + 360

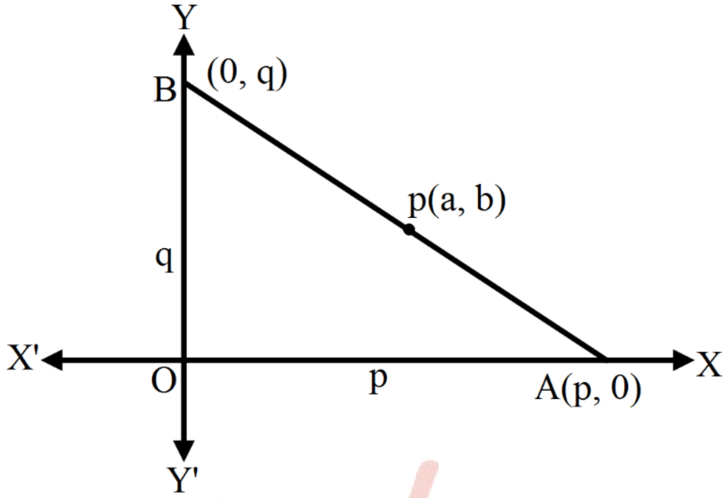
= 1340

अतः 17 रू प्रति लीटर भाव का 1340 लीटर दूध बिकेगा।

प्रश्न 18 अक्षों के बीच रेखाखंड का मध्य बिंदु P(a, b) है। दिखाइए कि रेखा का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ हैं।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



माना रेखा AB अक्षों पर p और q अंतःखंड बनते हैं।

बिन्दु A और B के क्रमशः निर्देशांक (p, 0) और (0, q) हैं।

AB के मध्य बिंदु P(a, b) इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

$$\frac{0+p}{2} = a$$

और $\frac{q+0}{2} = b$

$\therefore p = 2a$ और $q = 2b$

अंतः खंड रूप में रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

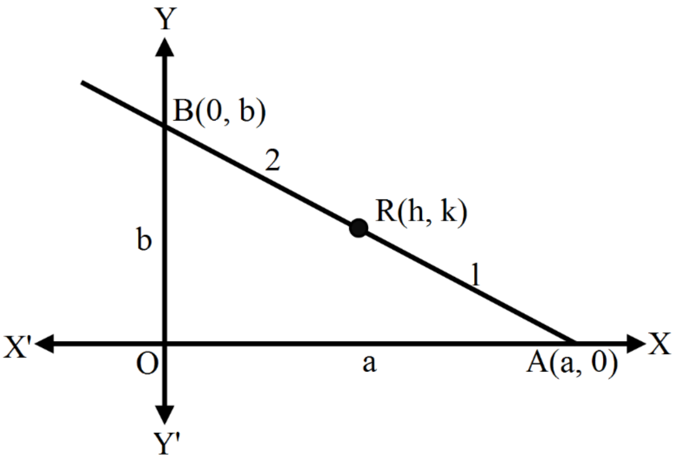
$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$$

प्रश्न 19 अक्षों के बीच रेखाखण्ड को बिन्दु R(h, k), 1 : 2 के अनुपात में विभक्त करता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



अक्षों के बीच रेखाखंड AB को R(h, k) AR : RB = 1 : 2 के अनुपात में विभक्त करता है।

मान लीजिए अक्षों पर अंत:खण्ड OA = a और OB = b है।

∴ A और B के निर्देशांक क्रमशः (a, 0) और (0, b) है।

बिंदु R के निर्देशांक इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

$\frac{1\times0+2\times a}{3}=h$ अर्थात् $a=\frac{3h}{2}$

और $\frac{1\times b+2\times0}{3}=k$ अर्थात् $b=3k$

अंतः खंड रूप में रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

a और b के मान रखने पर,

$$\frac{x}{\frac{3h}{2}}+\frac{y}{3k}=1$$

$$\frac{2x}{h}+\frac{y}{k}=3$$

$$2kx+hy=3hk$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 20 रेखा के समीकरण की संकल्पना का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि तीन बिन्दु (3, 0), (-2, -2) और (8, 2) संरेख हैं।

उत्तर- बिन्दु A(3, 0), B(-2, -2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{-2-0}{-2-3}(x - 3)$$

$$y = \frac{2}{5}(x - 3)$$

$$5y = 2x - 6$$

$$\Rightarrow 2x - 5y - 6 = 0$$

बिंदु C(8, 2) इस रेखा पर पड़ता है तब इसके निर्देशांक इस समीकरण को संतुष्ट करेंगे।

2 × 8 - 5 × 2 - 6 = 0

16 - 16 = 0

अतः दिए हुए बिंदु A, B, C संरेख है।

Fukey Education

प्रश्नावली 10.3 (पृष्ठ संख्या 242-243)

प्रश्न 1 समीकरण को ढाल अंतःखण्ड रूप में रूपान्तरित कीजिए और ढाल तथा y-अंतः खण्ड ज्ञात कीजिए-

(i) x + 7y = 0

(ii) 6x + 3y - 5 = 0

(iii) y = 0

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

(i) $x + 7y = 0$

$$\therefore y = -\frac{1}{7}x + 0$$

$\therefore$ ढाल $= -\frac{1}{7}$, y-अंत: खण्ड = 0

(ii) $6x + 3y - 5 = 0$

$3y = -6x + 5$

$$\therefore y = -2x + \frac{5}{3}$$

ढाल = -2, y-अंत: खण्ड $= \frac{5}{3}$

(iii) $y = 0$

$y = 0. x + 0$

ढाल = 0, y-अंत: खण्ड = 0

प्रश्न 2 समीकरण को अंतःखण्ड रूप में रूपान्तरित कीजिए और अक्ष पर इनके द्वारा काटे गए अंतःखण्ड ज्ञात कीजिए-

(i) $3x + 2y - 12 = 0$

(ii) $4x - 3y = 6$

(iii) $3y + 2 = 0$

उत्तर-

(i) $3x + 2y - 12 = 0$

$3x + 2y = 12$

12 से दोनों पक्षों में भाग देने पर

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$

अतः अंत: खण्ड 4 तथा 6 हैं।

(ii) 4x - 3y = 6

6 से दोनो पक्षों में भाग देने पर,

$\frac{4x}{6}-\frac{3y}{6}=1$

$\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-2}=1$

अत: अंत:खण्ड $\frac{3}{2}$ तथा -2 हैं।

(iii) 3y + 2 = 0

3y = 2

$y=-\frac{2}{3}$

अन्त: खण्ड हेतु समीकरण का रूप:

$\frac{x}{0}+\frac{y}{-\frac{2}{3}}=1$

अंत:खण्ड 0 और $-\frac{2}{3}$ हैं।

प्रश्न 3 समीकरण को लम्ब रूप में रूपान्तरित कीजिए। मूल बिन्दु से लांबिक दूरियाँ और लम्ब तथा धन x-अक्ष के बीच का कोण ज्ञात कीजिए-

(i) $x-\sqrt{3y}+8=0$

(ii) y - 2 = 0

(iii) x - y = 4

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर-

(i)

$$x-\sqrt{3}y+8=0$$

$$-x+\sqrt{3}y=8$$

$\sqrt{3+1}=2$ से भाग देने पर,

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=4$$

$$\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore -\frac{1}{2}$ और $\frac{\sqrt{3}}{2}$ के स्थान पर क्रमशः $\cos 120^\circ$ तथा $\sin 120^\circ$ रखने पर,

$$x\cos 120^\circ+y\sin 120^\circ=4$$

की तुलना $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ से करने पर,

$\Rightarrow p=4, \alpha=120^\circ=\frac{2\pi}{2}$ रेडियन।

(ii)

y - 2 = 0 या y = 2

0·x + y·1 = 2

$$x\cos 90^\circ+y\sin 90^\circ=2\ [\because \cos 90^\circ=0, \sin 90^\circ=1]$$

$$\therefore p=2, \alpha=90^\circ$$

(iii)

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

x - y =4

$\sqrt{2}$ से भाग देने पर

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x + (-\frac{1}{\sqrt{2}})y = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos 315^\circ$$

और $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 315^\circ$

∴ x - y = 4 का लम्ब रूप

$$x\cos 315^\circ + y\sin 315^\circ = 4$$

की तुलना $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ से करने पर,

$$p = 2\sqrt{2}, \alpha = 315^\circ$$

प्रश्न 4 बिन्दु (-1, 1) की रेखा 12(x + 6) = 5(y - 2) से दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- 12(x + 6) = 5(y - 2)

12x + 72 = 5y - 10

12x - 5y + 82 = 0

बिंदु (x_1, y_1) की रेखा ax + by + c = 0 से दूरी $\frac{(ax_1+by_1+c)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

∴ बिंदु (-1, 1) से रेखा 12x - 5y + 8 = 0 की दूरी

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$d = \frac{|12\times(-1)-5\times1+8|}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

$$= \left|\frac{12-5+82}{\sqrt{144+25}}\right|$$

$$= \frac{65}{13} = 5 \text{ इकाई।}$$

प्रश्न 5 x-अक्ष पर बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिनकी रेखा $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ से दूरियाँ 4 इकाई हैं।

उत्तर-

दिया गया समीकरण है- $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

12 से गुणा करने पर

4x + 3y - 12 = 0 ...(1)

x-अक्ष पर माना कोई बिन्दु (a, 0) हो, तो बिन्दु (a, 0) से रेखा (1) की दूरी

$$= \frac{4a+0-12}{\sqrt{16+9}} = \pm\frac{4a-12}{5}$$

$$\therefore \pm\frac{4a-12}{5} = 4$$

$$\pm(4a-12) = 20$$

+ve चिन्ह लेकर 4a = 32 या a = 8

x-अक्ष पर अभीष्ट बिन्दु (8, 0) है।

-ve चिन्ह लेकर, $-\frac{4a-12}{5} = 4$ या $-4a + 12 = 20$

$$4a = -8, a = -2$$

दूसरा अभीष्ट बिन्दु (-2, 0) है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 6 समान्तर रेखा के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए-

(i) $15x + 8y - 34 = 0$ और $15x + 8y + 31 = 0$

(ii) $l(x + y) + p = 0$ और $l(x + y) - r = 0$

उत्तर-

(i)

हम जानते है कि दो समान्तर रेखाओ के बीच की दूरी $= \left|\frac{C_1 \sim C_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

यहाँ पर $C_1 = -34$, $c_2 = 31$

$\therefore$ दी हुए समान्तर रेखाओ के बीच दूरी $= \left|\frac{-34-34}{\sqrt{15^2+8^2}}\right| = \frac{65}{\sqrt{225+64}}$

$= \frac{65}{\sqrt{289}} = \frac{65}{17}$ इकाई।

(ii)

हम जानते है कि दो समान्तर रेखाओ के बीच की दूरी $= \left|\frac{C_1 \sim C_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

यहाँ $a = l$, $b = l$, $C_1 = p$, $C_2 = -r$

$\therefore$ समान्तर रेखाओ के बीच की दूरी $= \left|\frac{C_1 \sim C_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\frac{p-(-r)}{\sqrt{l^2+l^2}}\right|$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{p+r}{l}\right|$ इकाई।

प्रश्न 7 रेखा $3x - 4y + 2 = 0$ के समान्तर और बिन्दु $(-2, 3)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$3x - 4y + 2 = 0$

$4y = 3x + 2$

$$\therefore y = \frac{3}{4}x + \frac{2}{4}$$

$$\therefore \text{रेखा की ढाल} = \frac{3}{4}$$

दिया गया बिन्दु (-2, 3) और ढाल $m = \frac{3}{4}$ से जाने वाली रेखा का समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 3 = \frac{3}{4}(x + 2)$$

$4y - 12 = 3x + 6$

$3x - 4y + 18 = 0$

दूसरी विधि- कोई भी रेखा $ax + by + c = 0$ के समान्तर $ax + by + k = 0$ के रूप में लिखी जा सकती है।

$\therefore$ $3x - 4y + 2 = 0$ के समान्तर रेखा $3x - 4y + k = 0$ है

यह (-2, 3) से होकर जाती है।

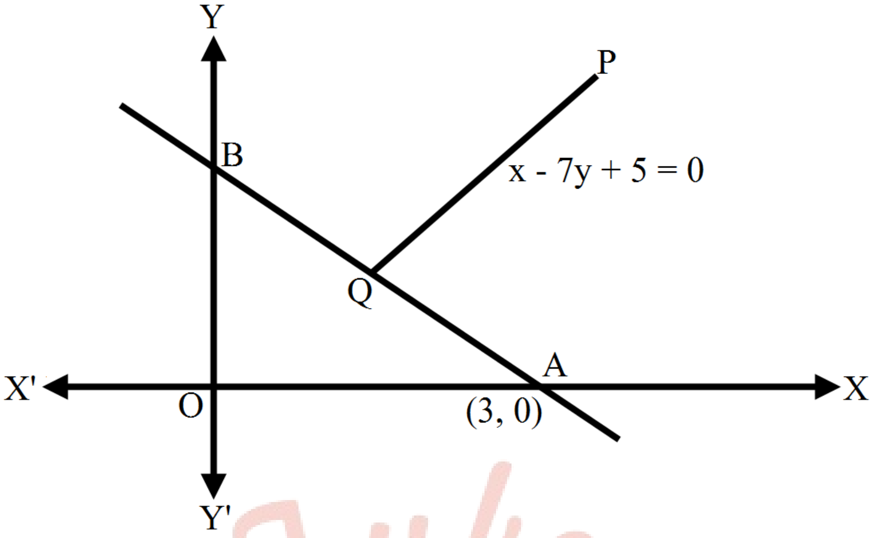
$\therefore$ $3 \times (-2) - 4 \times 3 + k = 0$ या $k = 18$

अभीष्ट समान्तर रेखा का समीकरण- $3x - 4y + 18 = 0$

प्रश्न 8 रेखा $x - 7y + 5 = 0$ पर लम्ब और x-अन्तः खण्ड 3 वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



∵ x-अंत:खण्ड = 3

∴ रेखा A(3, 0) से होकर जाती है।

रेखा PQ : x - 7y + 5 = 0

7y = x +5

$$y = \frac{1}{7}x + \frac{5}{7}$$

इसलिए PQ की ढाल $= \frac{1}{7}$

∵ PQ ⊥ AB

∴ A से होकर जाने वाली रेखा AB की ढाल = -7

∴ बिन्दु (3, 0) से रेखा AB का समीकरण,

y - 0 = -7(x - 3)

= -7x + 21

7x + y - 21 = 0

दूसरी विधि- ax + by + c = 0 की लम्ब कोई रेखा bx - ay + k = 0

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

∴ x - 7y + 5 = 0 की लम्ब रेखा 7x + y + k = 0

यह रेखा (3, 0) से होकर जाती है।

∴ 7 × 3 + 0 + k = 0, अर्थात् k = -21

∴ अभीष्ट रेखा का समीकरण 7x + y - 21 = 0

प्रश्न 9 रेखाओं $\sqrt{3x} + y = 1$ और $x + \sqrt{3y} = 1$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

पहली रेखा- $\sqrt{3}x + y = 1$ या $y = -\sqrt{3}x + 1$

ढाल $= -\sqrt{3} = m_1$

दूसरी रेखा- $x + \sqrt{3}y = 1$ या $= -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ ढाल $= -\frac{1}{\sqrt{3}} = m_2$

दो रेखाओ के बीच कोण θ हो, तब

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{(-\sqrt{3}) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + (-\sqrt{3})\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\right|$$

$$= \frac{\left|-\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right|}{1 + 1}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \left|\frac{-3+1}{2\sqrt{3}}\right|$$

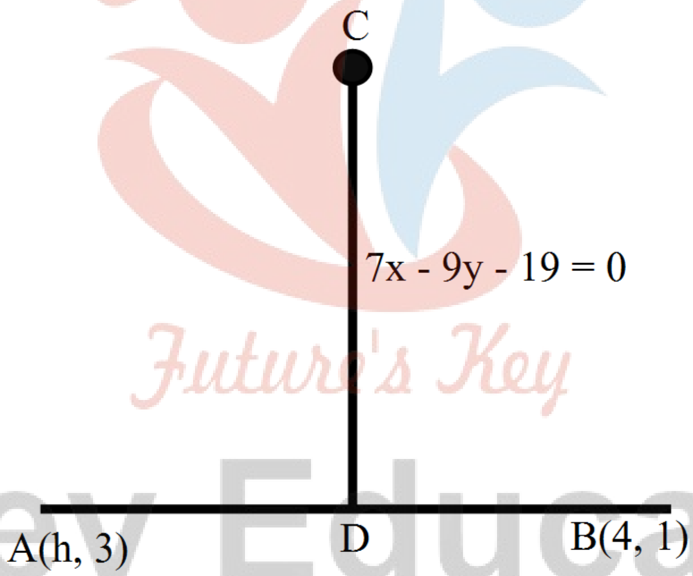
$$= \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ रेडियन।

प्रश्न 10 बिन्दुओं (h, 3) और (4, 1) से जाने वाली रेखा, रेखा 7x - 9y - 19 = 0 को समकोण पर प्रतिच्छेद करती है। h का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना रेखा AB बिन्दु A(h, 3), B(4, 1) से जाने वाली रेखा की ढाल,

$$m_1 = \frac{1-3}{4-h} = \frac{2}{h-4}$$



दूसरी रेखा का समीकरण

7x - 9y - 19 = 0

$$y = \frac{7}{9}x - \frac{19}{9}$$

$\therefore$ दूसरी रेखा की ढाल, $m_2 = \frac{7}{9}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

चूँकि दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं, ∴ $m_1, m_2 = -1$

$$\frac{2}{h-4} \times \frac{7}{9} = -1$$

$$14 = -9(h-4) = -9h + 36$$

$$\therefore 9h = 36 - 14 = 22$$

$$h = \frac{22}{9}$$

प्रश्न 11 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (x_1, y_1) से जाने वाली और रेखा $Ax + By + C = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ है।

उत्तर-

रेखा $Ax + By + C = 0$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

रेखा की ढाल $= -\frac{A}{B}$

∴ समान्तर रेखा की ढाल $= -\frac{A}{B}$

∴ समान्तर रेखा जो (x_1, y_1) से जाती है, उसकी समीकरण

$$y - y_1 = -\frac{A}{B}(x - x_1)$$

$$B(y - y_1) = A(x - x_1)$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

प्रश्न 12 बिन्दु (2, 3) से जाने वाली दो रेखाएँ परस्पर 60° के कोण पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि एक रेखा की ढाल 2 है तो दूसरी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर-

माना दूसरी रेखा की ढाल m है।

दोनों रेखाओं के बीच कोण

$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

जहाँ $\theta = 60^\circ, m_1 = m$ और $m_2 = 2$

$\therefore \tan 60 = \pm \frac{m-2}{1+2m} = 3$

+ve चिन्ह लेकर- $m - 2 = \sqrt{3} + 2\sqrt{30}m$

$\therefore (2\sqrt{3} - 1)m = -2 - \sqrt{3}$

$\therefore m = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$

$\therefore$ उस रेखा का समीकरण जो (2, 3) से होकर जाती है जिसकी ढाल $= -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$,

$y - 3 = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}(x - 2)$

$= (2\sqrt{3} - 1)y - 6\sqrt{3} + 3$

$= -(2 + \sqrt{3})x + 4 + 2\sqrt{3}$

$= (\sqrt{3} + 1)x + (2\sqrt{3} - 1)y - 8\sqrt{3} - 1 = 0$

-ve चिन्ह लेकर- $-\frac{(m-2)}{1+2m} = \sqrt{3}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$-m + 2 = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}m$$

$$(2\sqrt{3} + 1)m = 2 - \sqrt{3}$$

$$m = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$$

उस रेखा का समीकरण जो (2, 3) से होकर जाती है और ढाल $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$,

$$y - 3 = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}(x - 2)$$

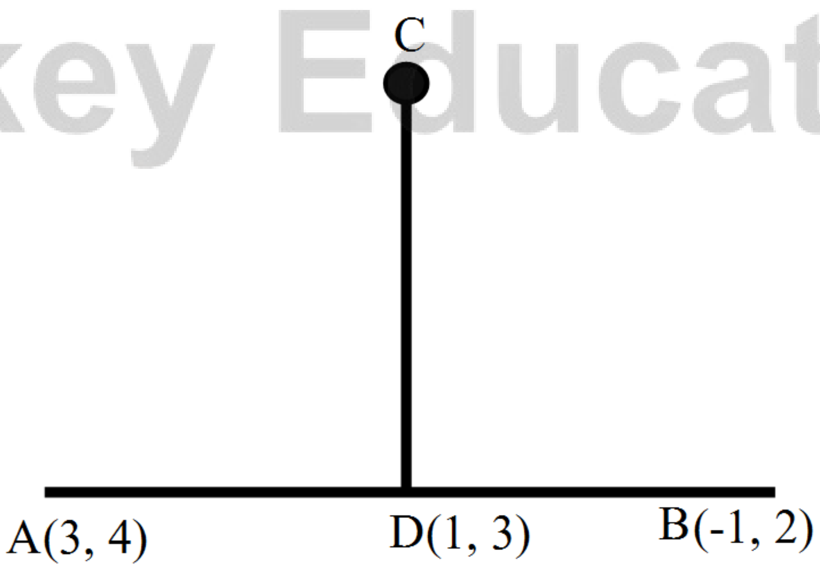
$$= (2\sqrt{3} + 1)y - 6\sqrt{3} - 3$$

$$= (2 - \sqrt{3})x - 4 + 2\sqrt{3}$$

$$= (2 - \sqrt{3})x - (2\sqrt{3} + 1)y + 8\sqrt{3} - 1 = 0$$

प्रश्न 13 बिन्दुओं (3, 4) और (-1, 2) को मिलाने वाली रेखाखण्ड के लम्ब समद्विभाजक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना बिन्दुओं A(3, 4) और B(-1, 2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$D\left(\frac{3-1}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$ या $D(1, 3)$

AB की ढाल, $m_1 = \frac{2-4}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

माना दूसरी रेखा CD रेखा AB पर लम्ब है

$\therefore$ CD की ढाल $= -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

रेखा CD बिन्दु D से होकर जाती है

$\therefore$ रेखा CD का समीकरण

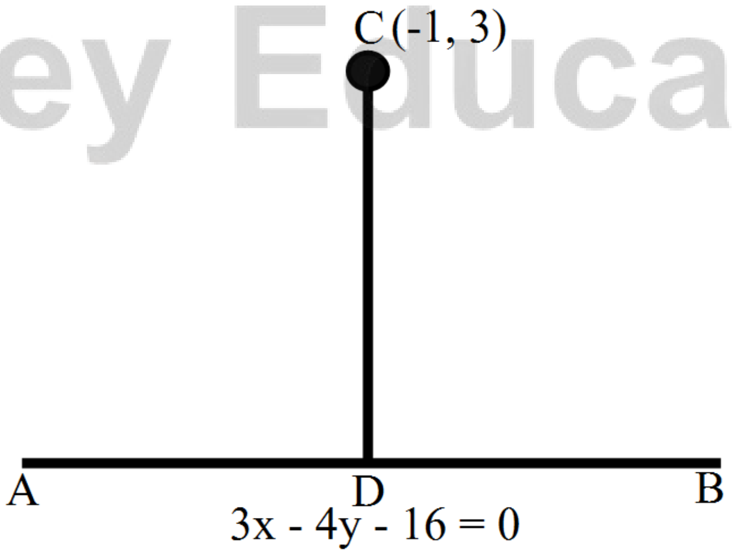
y - 3 = -2(x - 1)

= -2x + 2

$\therefore$ 2x + y - 5 = 0

प्रश्न 14 बिन्दु (-1, 3) से रेखा 3x - 4y - 16 = 0 पर डाले गए लम्बपाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

मान लीजिए रेखा AB का समीकरण, 3x - 4y - 16 = 0 ...(i)

$$y = \frac{3}{4}x - 4$$

रेखा AB की ढाल $= \frac{3}{4}$

बिन्दु C(-1, 3) से AB पर डाला गया लम्ब CD है

$$\therefore AB \perp CD$$

$$\therefore \text{CD की ढाल} = \frac{-1}{\text{रेखा AB की ढाल}}$$

$$= \frac{-1}{\frac{3}{4}} = \frac{-4}{3}$$

अतः रेखा CD का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 3 = \frac{-4}{3}(x + 1)$$

3y - 9 = -4x - 4

4x + 3y - 5 = 0 ...(ii)

समी (i) को 3 से और (ii) को 4 से गुणा करने पर,

9x - 12y = 48

16x + 12y = 20

इनको जोड़ने पर

25x = 68 या $x = \frac{68}{25}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

x का मान (i) में रखने पर,

$$3 \times \frac{68}{25} - 4y = 16$$

$$\therefore 4y = \frac{204}{25} - 16$$

$$= \frac{204-400}{25}$$

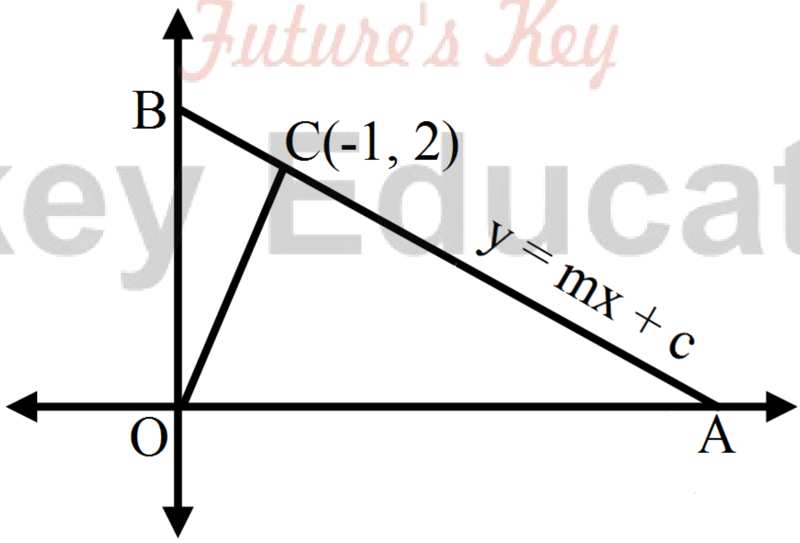
$$\therefore y = -\frac{196}{25} \times \frac{1}{5} = -\frac{49}{25}$$

अतः लम्ब पाद D के निर्देशांक $\left(\frac{68}{25}, -\frac{49}{25}\right)$ है।

प्रश्न 15 मूल बिन्दु से रेखा y = mx + c पर डाला गया लम्ब रेखा से बिन्दु (-1, 2) पर मिलता है। m और c के मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना रेखा AB का समीकरण, y = mx + c

रेखा AB की ढाल = m



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

O से रेखा AB पर लम्ब OC डाला गया है जो बिन्दु C(-1, 2) पर मिलता है।

$\therefore$ लम्ब रेखा OC की ढाल $= -\frac{1}{m}$

अब रेखा OC का समीकरण,

$$y - 0 = -\frac{1}{m}(x - 0)$$

x + my = 0

OC की प्रवणता $= \frac{2-0}{-1-0} = -2$

$\therefore$ लम्ब रेखा OC की ढाल $= -\frac{1}{m}$

$= \frac{1}{2}$

बिन्दु C (-1, 2) निम्न रेखा पर स्थित है :

y = mx + c

⇒ 2 = -m + c

$m = \frac{1}{2}$ रखने पर,

$$2 = -\frac{1}{2} + c$$

$$\therefore c = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

अतः $m = \frac{1}{2}, c = \frac{5}{2}$

प्रश्न 16 यदि p और q क्रमशः मूल बिन्दु से रेखाओं $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2$ और $x\sec\theta + y\text{cosec}\theta = k$ पर लम्ब की लंबाइयाँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि $p^2 + 4q^2 = k^2$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

मूल बिन्दु (0, 0) से $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$ की दूरी,

$$p = \frac{k\cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} \left[\because d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

$$= k\cos 2\theta \quad \ldots (1)$$

मूल बिंदु (0, 0) से $x\sec\theta + y\operatorname{cosec}\theta = k$ की दूरी,

$$q = \frac{k}{\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta}}$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}}}$$

$$= \frac{k\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}}$$

$$= k\sin\theta\cos\theta \; [\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{k}{2} \times 2\sin\theta\cos\theta$$

$$2q = k\sin 2\theta \quad \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) को वर्ग करके जोड़ने पर,

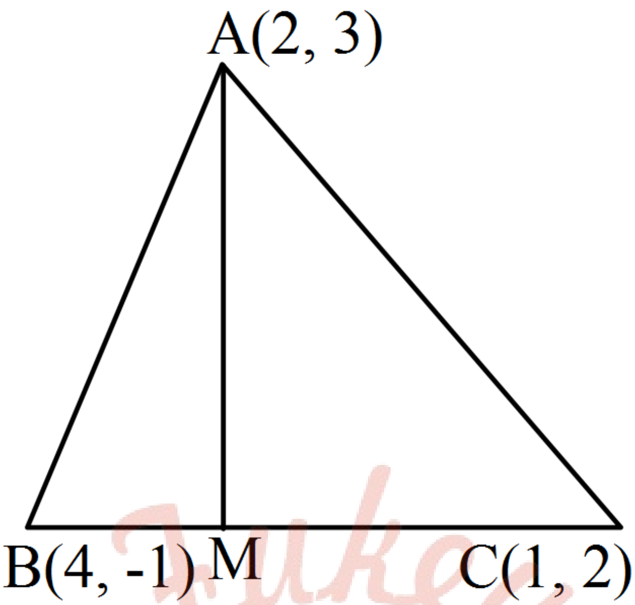
$k^2 = p^2 + 4q^2$

अतः $p^2 + 4q^2 = k^2$ इति सिध्दम्।

प्रश्न 17 शीर्षों A(2, 3), B(4, -1) और C(1, 2) वाले त्रिभुज ABC के शीर्ष A से उसकी सम्मुख भुजा पर लम्ब डाला गया है। लम्ब की लम्बाई तथा समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



मान लीजिए AM रेखा BC पर लंब डाला गया है

i. रेखा BC की ढाल

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{2+1}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$AM \perp BC$$

$\therefore$ लम्ब AM की ढाल $= \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1$

रेखा AM बिंदु A से जाती है और ढाल =1 है।

$\therefore$ Am का समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 1(x - 2)$

$x - y + 1 = 0$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

ii. बिन्दु B(4, -1) और C(1, 2) से होकर जाने वाली रेखा BC का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y + 1 = \frac{2+1}{1-4}(x - 4)$$

$$= \frac{3}{-3}(x - 4)$$

$$= -x + 4$$

$$x + y - 3 = 0$$

∴ बिंदु A से BC पर डाले गए लम्ब AM की लम्बाई

$$= \frac{2+3-3}{\sqrt{1^2+1^2}} \left[\because d = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

प्रश्न 18 यदि p मूल बिन्दु से उस रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई हो जिस पर अक्षों पर कटे अंत: खण्ड a और b हों, तो दिखाइए कि $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

उत्तर-

Fukey Education

उस रेखा का समीकरण, जिसकी अक्षों पर कटे अंत:खण्ड a और b हों,

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (अंत:खण्ड समीकरण)

मूल बिन्दु (0, 0) बसे इस रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \left[\because d = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

= p (दिया गया है)

$$\therefore p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}, p^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$ इति सिध्दम्।

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 248-249)

प्रश्न 1 k का मान ज्ञात कीजिए जब कि रेखा $(k - 3)x - (4 - k^2)y + K^2 - 7k + 6 = 0$

(i) x-अक्ष के समान्तर है।

(ii) y-अक्ष के समान्तर है।

(iii) मूल बिन्दु से जाती है।

उत्तर-

(i) x-अक्ष के समान्तर y = a

∴ प्रश्न में दिए गए समीकरण में x का गुणांक = 0 या k - 3 = a 0 अर्थात् k = 3

(ii) xy-अक्ष के समान्तर रेखा x = q

दिए गए समीकरण में y का गुणांक = 0 या $4 - k^2 = 0$ अर्थात् $k = \pm 2$

(iii) यदि रेखा मूल बिन्दु से जाती है तो (0, 0) इसके समीकरण को संतुष्ट करेगा।

$0 - 0 + K^2 - 7k + 6 = 0$

$(k - 6)(k - 1) = 0$

$k = 1, 6$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 2 θ और p के मान ज्ञात कीजिए यदि समीकरण $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ रेखा $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ का लम्ब रूप है।

उत्तर-

दी गयी रेखा का समीकरण $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$

$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$ से भाग देने पर,

$-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 1$

इसकी तुलना $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ से करने पर,

$\therefore p = 1$

और $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$

$\therefore \theta = 210^\circ = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ रेडियन।

प्रश्न 3 उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके अक्षों से कटे अंतः खण्डों का योग और गुणनफल क्रमशः 1 और -6 हैं।

उत्तर- मान लीजिए अक्षों पर कटे अतः खण्ड a और b हैं।

दिया है- $a + b = 1$, $ab = -6$

$b = 1 - a$

$\therefore a(1 - a) = -6$

$a - a^2 = -6$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$a^2 - a - 6 = 0$

$(a - 3)(a + 2) = 0$

$\therefore a = 3, -2$

$\therefore b = -2, 3$

3, -2 अंत:खण्ड वाली रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$$

$2x - 3y = 6$

और 2, 3 अंत:खण्ड वाली रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$$

$-3x + 2y = 6$

प्रश्न 4 y-अक्ष पर कौन से बिन्दु ऐसे हैं, जिनकी रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ से दूरी 4 इकाई है।

उत्तर- मान लीजिए y-अक्ष पर बिन्दु $(0, y_1)$ है।

$(0, y_1)$ की रेखा $4x + 3y = 12$ से दूरी

$$\frac{4 \times 0 + 3y_1 - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \pm 4$$

$$\frac{3y_1 - 12}{5} = \pm 4$$

$$3y_1 = 12 \pm 20 = 32, -8$$

$$\therefore y_1 = \frac{32}{3}, \frac{-8}{3}$$

अतः y-अक्ष पर बिंदु $\left(0,\frac{32}{3}\right)$ और $\left(0,\frac{-8}{3}\right)$ है जो दी हुई रेखा से 4 इकाई दूरी पर है।

प्रश्न 5 मूल बिन्दु से बिन्दुओं (cos θ, sin θ) और (cos ϕ, sin ϕ) को मिलाने वाली रेखा की लांबिक दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$(\cos\theta, \sin\theta), (\cos\phi, \sin\phi)$को मिलाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - \sin\theta = \frac{\sin\phi - \sin\theta}{\cos\phi - \cos\phi}(x - \cos\theta)$$

$$= \frac{2\cos\frac{\phi+\theta}{2}\sin\frac{\phi-\theta}{2}}{-2\sin\frac{\phi+\theta}{2}\sin\frac{\phi-\theta}{2}}(x - \cos\theta)$$

$$= \frac{-\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\sin\frac{\theta+\phi}{2}}(x - \cos\theta)$$

$$= y\sin\frac{\theta+\phi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}$$

$$= -x\cos\frac{\theta+\phi}{2} + \cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\theta$$

$$= x\cos\frac{\theta+\phi}{2} + y\sin\frac{\theta+\phi}{2}$$

$$= \cos\theta\cos\frac{\theta+\phi}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}$$

$$= \cos\left(\theta - \frac{\theta+\phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

∴ मूल बिंदु (0, 0)से इस रेखा की दूरी

$$= \left| \frac{0+0-\cos\frac{\theta-\phi}{2}}{\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}+\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}} \right| \left[\because d = \frac{ax_1+by_1+c_1}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]$$

$$= \cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

प्रश्न 6 रेखाओं x - 7y + 5 = 0 और 3x + y = 0 के प्रतिच्छेद बिन्दु से खीची गई और y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दी गयी रेखाएँ

x - 7y + 5 = 0 ...(1)

3x + y = 0 ...(2)

समी (2) से,

y = -3x

y का मान समी (1) में रखने पर,

$$x - 7(-3x) + 5 = 0$$

$$22x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-5}{22}$$

$$y = -3x = -3\left(\frac{-5}{22}\right)$$

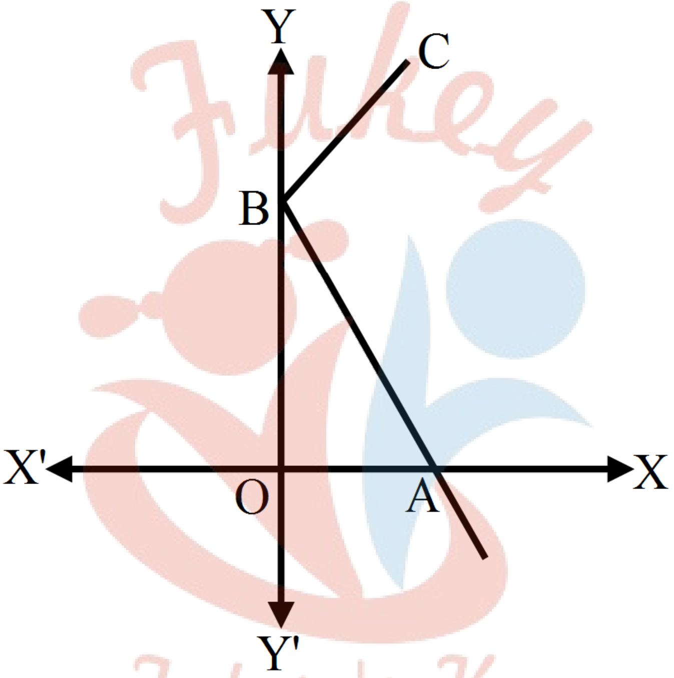
$$= \frac{15}{22}$$

Fukey Education

वह रेखा का जो $\left(-\frac{5}{22}, \frac{15}{22}\right)$ से जाती है और y-अक्ष के समान्तर है, समीकरण $x = -\frac{5}{22}$ या 22x + 5 = 0

प्रश्न 7 रेखा $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ पर लंब उस बिन्दु से खींची गई रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ यह रेखा y-अक्ष से मिलती है।

उत्तर-



रेखा AB का समीकरण,

$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ या $3x + 2y = 12,$

$2y = -3x + 12$

$y = \frac{-3}{2}x + \frac{12}{2}$

रेखा AB की ढाल $= \frac{-3}{2}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$AB \perp BC,$

$\therefore$ BC की ढाल $= \frac{2}{3}$

$\because$ रेखा y-अक्ष पर प्रतिच्छेद करती है, इसलिए बिन्दु B(0, 6) है।

$\therefore$ BC रेखा का समीकरण

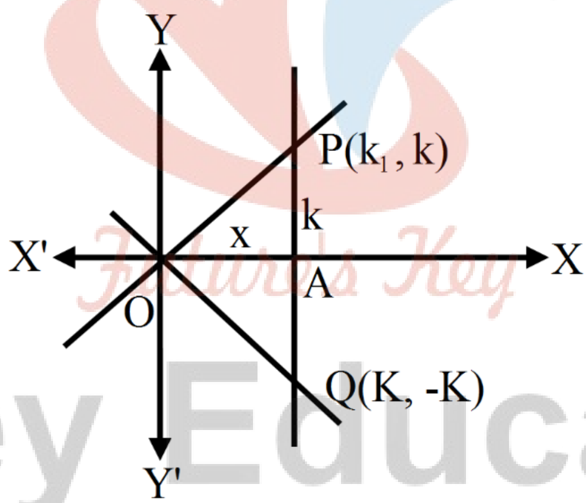
$$y - 6 = \tfrac{2}{3}(x - 0)$$

3y - 18 = 2x

2x - 3y + 18 = 0

प्रश्न 8 रेखाओं y - x = 0, x + y = 0, और x - k = 0 से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



Fukey Education

y - x = 0 और y + x = 0 बिन्दु (0, 0) पर मिलते हैं।

x = k को y - x = 0 में रखने से, y - k = 0 या y = k

x - k = 0 और y - x = 0 बिन्दु (k, k) पर मिलते हैं।

x = k को y + x = 0 में रखने से,

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

y + k = 0 या y = -k

x = k और y + x = 0 बिन्दु (k, -k) पर मिलते हैं।

अब बिन्दु (0, 0), (k, k) और (k, -k) से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \left|\frac{1}{2}[0.(-2k) + k(-k) + k(-k)]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}(-k^2 - k^3)\right|$$

$$= k^2 \text{ वर्ग इकाई।}$$

दूसरी विधि- त्रिभुज OPQ का क्षेत्रफल

$$= 2 \times \text{ क्षेत्रफल } \triangle OAP$$

$$= 2 \times \left[\frac{1}{2} \times k \times k\right] = k^2 \text{ वर्ग इकाई।}$$

प्रश्न 9 p का मान ज्ञात कीजिए जिससे तीन रेखाएँ 3x + y - 2 = 0, px + 2y - 3 = 0 और 2x - y - 3 = 0 एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें।

उत्तर- दी गयी रेखाएँ

3x + y = 2 ...(1)

2x – y = 3 ...(2)

समी. (1) और (2) को जोड़ने पर,

5x = 5 या x = 1

∴ y = 2 - 3x = 2 - 3 = -1

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

∴ समी. (1) और (2) वाली रेखाएँ बिन्दु (1, -1) पर प्रतिच्छेद करती हैं।

तीसरी रेखा $px + 2y - 3 = 0$ भी इसी बिन्दु से जाती है इसलिए (1, -1) इस समीकरण को संतुष्ट करेगा।

$p \times 1 + 2 \times (-1) - 3 = 0$

$p - 2 - 3 = 0$

$\therefore p = 5$

अतः दी गयी रेखाएँ संगामी हैं यदि $p = 5$

प्रश्न 10 यदि तीन रेखाएँ जिनके समीकरण $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ और $y = m_3x + c_3$ हैं, संगामी हैं, तो दिखाइए कि $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$

उत्तर-

समीकरण

$y = m_1x + c_1$

$y = m_2x + c_2$

समीकरण (2) को समीकरण (1) में से घटाने पर,

$$0 = (m_1 - m_2)x + c_1 - c_2$$

$$\therefore x = -\frac{c_1 - c_2}{m_1 - m_2}$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर,

$$y = -\frac{m_1(c_1 - c_2)}{m_1 - m_2} + c_1$$

$$= \frac{-m_1(c_1 - c_2) + c_1(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2}$$

अतः बिंदु $\left[-\frac{c_1-c_2}{m_1-m_2}, \frac{-m_1(c_1-c_2)+c_1(m_1-m_2)}{m_1-m_2}\right]$ रेखा $y = m_3x + c_3$ पर पड़ता है तो

$$\therefore \frac{-m_1(c_1-c_2)+c_1(m_1-m_2)}{m_1-m_2} = m_3\left(-\frac{c_1-c_2}{m_1-m_2}\right) + c_3$$

$m_1 - m_2$ से गुणा करने पर

$$-m_1(c_1-c_2) + c_1(m_1-m_2) = -m_3(c_1-c_2) + c_3(m_1-m_2)$$

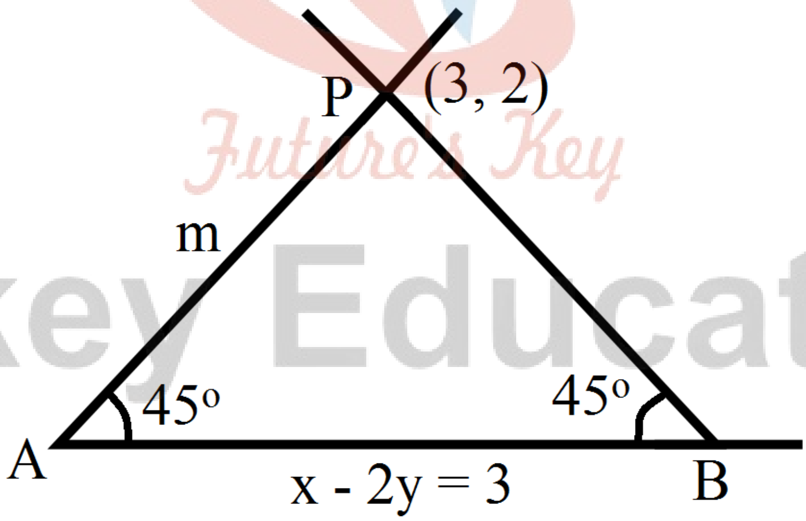
$$-m_1c_1 + m_1c_2 + m_2c_1 = -m_3c_1 + m_3c_2 + m_1c_3 - m_2c_3$$

$$m_1c_2 - m_2c_1 - m_1c_3 + m_2c_3 + m_3c_1 - m_3c_2 = 0$$

$$m_1(c_2-c_3) + m_2(c_3-c_1) + m_3(c_1-c_2) = 0$$

प्रश्न 11 बिन्दु (3, 2) से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा x - 2y = 3 से 45º का कोण बनाती है।

उत्तर-



माना रेखा AB का समीकरण- x - 2y = 3

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

तब रेखा AB की ढाल $= \frac{1}{2}$

मान लीजिए PA रेखा इसके साथ 45° का कोण बनती है और इसकी ढाल = m

$$\pm \tan 45 = \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + m \times \frac{1}{2}}$$

$$\pm 1 = \frac{2m - 1}{m + 2}$$

+ve चिन्ह लेने पर, $1 = \frac{2m-1}{m+2}$

2m - 1 = m + 2

∴ m = 3

-ve चिन्ह लेने पर, $-1 = \frac{2m-1}{m+2}$

2m - 1 = -m - 2

∴ 3m = -1

m $= \frac{-1}{3}$

अतः रेखा PA का समीकरण जहाँ बिन्दु P = (3, 2) हो और m $= \frac{-1}{3}$ हो।

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 3)$$

3y - 6 = -x + 3

x + 3y - 9 = 0

अब जब ढाल m = 3 हो, तब बिन्दु P(3, 2) से रेखा का समीकरण,

y - 2 = 3(x - 3)

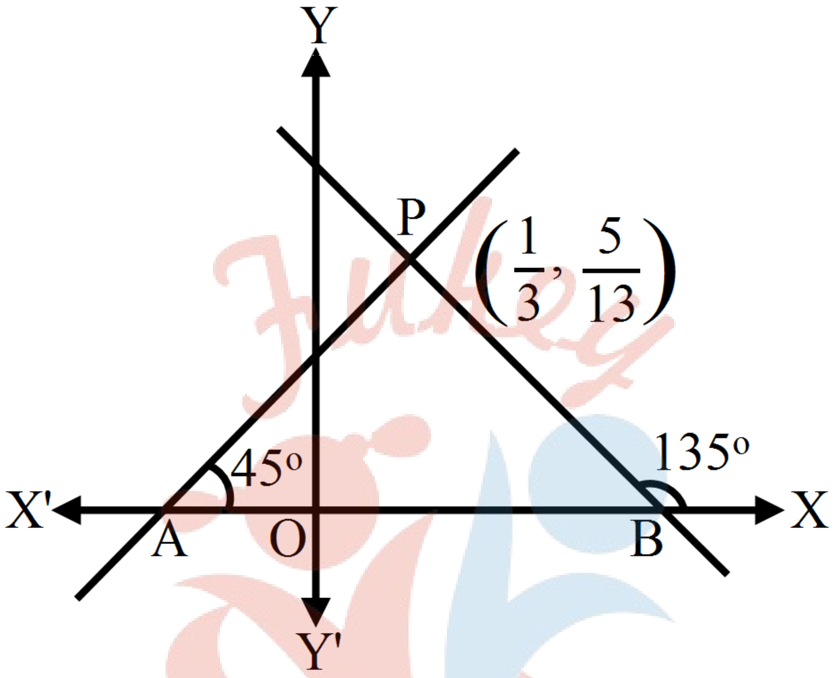
y - 2 = 3x - 9

3x - y - 7 = 0

Fukey Education

प्रश्न 12 रेखाओं 4x + 7y - 3 = 0 और 2x - 3y + 1 = 0 के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों से समान अंतः खण्ड बनाती हैं।

उत्तर-



4x + 7y = 3 ...(1)

2x - 3y = -1 ...(2)

समी. (2) को 2 से गुणा करने पर,

4x - 6y = -2 ...(3)

समी. (3) को (1) में से घटाने पर

13y = 5

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\therefore y = \frac{5}{13}$

y का मन समी. (1) में रखने पर,

$4x + 7 \times \frac{5}{13} = 3$

$4x = 3 - \frac{35}{13}$

$= \frac{39-35}{13} = \frac{4}{13}$

$\therefore x = \frac{1}{13}$

दी हुई रेखाएँ बिंदु $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{13}\right)$ का प्रतिच्छेद करती है।

जो रेखा अक्षों पर बने अंतः खण्ड समान हैं तो वह धन x-अक्ष के साथ 45° या 135° का कोण बनाती हैं। इसलिए उसकी ढाल ±1 होगी।

∴ PA और PB रेखाओं के समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$

i. जब m = 1 हो, तब $y - \frac{5}{13} = 1\left(x - \frac{1}{13}\right)$

13y - 5 = 13 x - 1

13x - 13y + 4 = 0.

ii. जब m = -1 हो, तब $y - \frac{5}{13} = -1\left(x - \frac{1}{13}\right)$

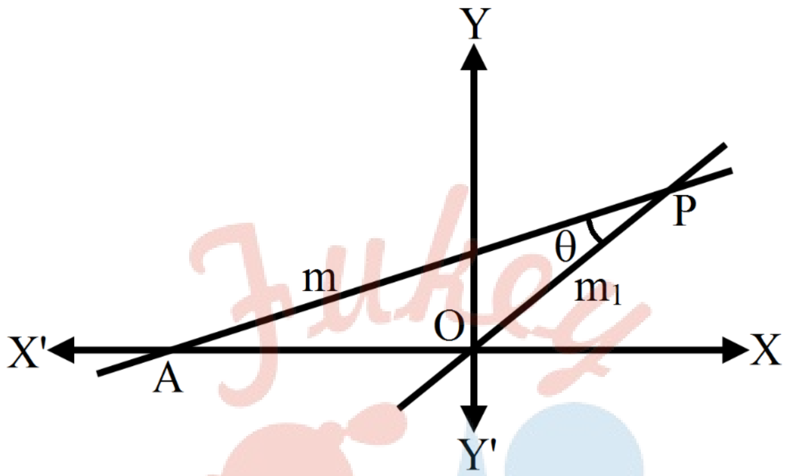
13y - 5 = -13x + 1

∴ 13x + 13y - 6 = 0

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 13 दर्शाइए कि मूल बिन्दु से जाने वाली और रेखा y = mx + c से θ कोण बनाने वाली उस रेखा का समीकरण $\frac{y}{x} = \pm\frac{m+\tan\theta}{1-m\tan\theta}$ हैं।

उत्तर-



रेखा PA का समीकरण y = mx + c है

यह रेखा OP के साथ कोण θ बनाती है।

रेखा PA की ढाल = m

मान लीजिए OP की ढाल = m_1 है।

अब $\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m}{1+m_1 m}$, जहाँ $m = \tan\theta$

+ve चिन्ह लेने पर,

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m}{1+m_1 m}$$

$$(1 + m_1 m)\tan\theta = m_1 - m$$

$$\tan\theta + m_1 m\tan\theta = m_1 - m$$

$$m + \tan\theta = m_1(1 - m\tan\theta)$$

$$m_1 = \frac{m+\tan\theta}{1-m\tan\theta}$$

-ve चिन्ह लेने पर,

$$\tan\theta = -\frac{m_1-m}{1+m_1m}$$

$$-(1+m_1m)\tan\theta = m_1 - m$$

या $(1+m_1m)\tan\theta = -m_1 + m$

$$m_1(1+m\tan\theta) = m - \tan\theta' \therefore m_1 = \frac{m-\tan\theta}{1+m\tan\theta}$$

इसलिए दोनों ढालो को $\frac{m\pm\tan\theta}{1\mp m\tan\theta}$ से दर्शाया जाता है।

$\therefore$ मूल बिंदु (0, 0) से जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$(y-0) = m_1(x-0)$$

$$y = m_1 \times x$$

$$\frac{y}{x} = m_1$$

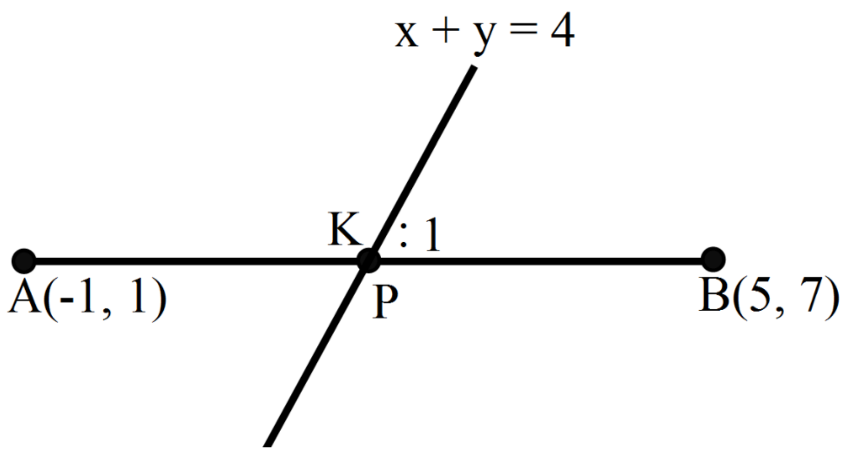
$\therefore$ अभीष्ट रेखाओं का समीकरण

$$\frac{y}{x} = \frac{m\pm\tan\theta}{1\mp m\tan\theta}$$

प्रश्न 14 (-1, 1) और (5, 7) को मिलाने वाली रेखाखण्ड को रेखा x + y = 4 किस अनुपात में विभाजित करती है?

उत्तर- मान लीजिए बिन्दु P रेखाखण्ड AB को k : 1 के अनुपात में विभाजित करता है। जबकि A और B के क्रमशः (-1, 1) और (5, 7) निर्देशांक हैं।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



$\therefore$ p के निर्देशांक $\left(\frac{5k-1}{k+1}, \frac{7k+1}{k+1}\right)$

रेखा x + y = 4 बिंदु p से होकर जाती है।

$\therefore \frac{5k-1}{k+1} + \frac{7k+1}{k+1} = 4$

$5k - 1 + 7k + 1 = 4k + 4$

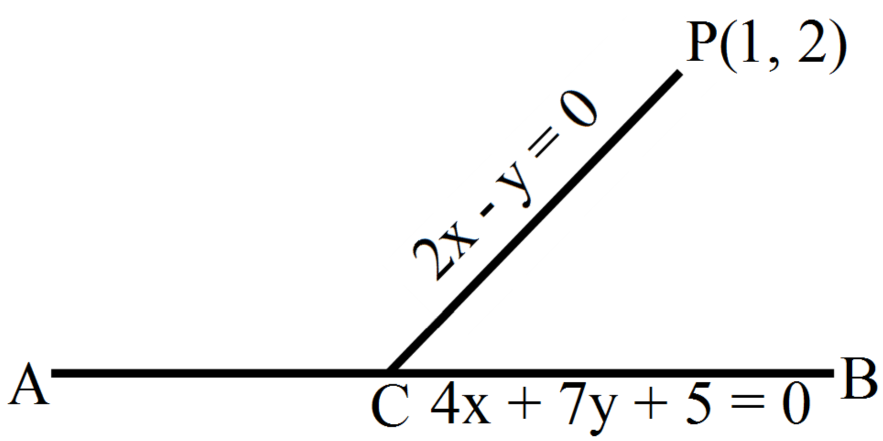
$8k = 4$

$k = \frac{1}{2}$

अतः बिन्दु P रेखाखण्ड AB को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है।

प्रश्न 15 बिन्दु (1, 2) से रेखा 4x + 7y + 5 = 0 की 2x - y = 0 के अनुदिश दूरी ज्ञात करो।

उत्तर- माना रेखा PC का समीकरण, 2x - y = 0 जिस पर बिन्दु P(1, 2) स्थित है।



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

रेखा AB का समीकरण 4x + 7y + 5 = 0 और 2x - y = 0 को हल करने पर,

$$\therefore x = \frac{-5}{18}$$

और $y = -\frac{5}{9}$

$\therefore$ C के निर्देशांक $\left(\frac{-5}{18}, \frac{-5}{9}\right)$ जो प्रतिच्छेद बिंदु है और p के निर्देशांक (1, 2) है।

अभीष्ट लम्बाई PC $= \sqrt{\left(\frac{-5}{18} - 1\right)^2 + \left(\frac{-5}{9} - 2\right)^2}$

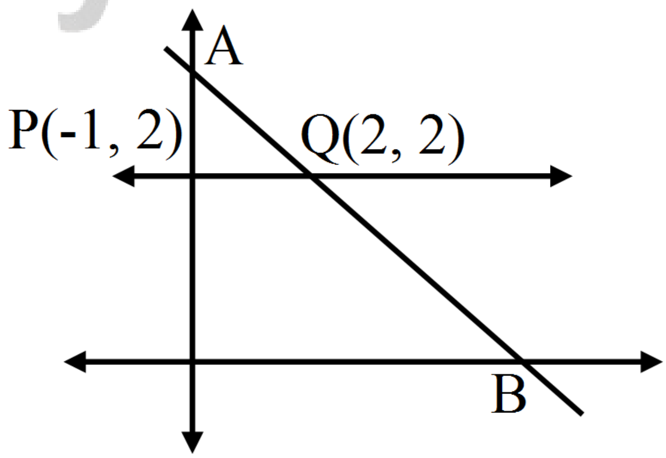
$$= \sqrt{\left(\frac{-23}{18}\right)^2 + \left(\frac{-23}{9} - 2\right)^2}$$

$$= \frac{23}{9}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{23}{9} \times \frac{\sqrt{5}}{9}$$

$$= \frac{23\sqrt{5}}{18}$$

प्रश्न 16 बिन्दु (-1, 2) से खींची जा सकने वाली उस रेखा की दिशा ज्ञात कीजिए जिसका रेखा x + y = 4 से प्रतिच्छेदन बिन्दु दिए बिन्दु से 3 इकाई की दूरी पर है।

उत्तर-



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

मान लीजिए अभीष्ट रेखा PQ की ढाल m है। रेखा PQ जो बिन्दु P(-1, 2) से होकर जाती है और ढाल m है, का समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = m(x + 1)$

$mx - y + m + 2 = 0$ ...(1)

रेखा AB का समीकरण $x + y = 4$

$\therefore y = 4 - x$

y का मान समी (1) में रखने पर,

$$mx(4 - x) + m + 2 = 0$$

$$(m + 1)x + m - 2 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{m-2}{m+1}$$

अब $y = 4 - x + \frac{m-2}{m+1}$

$$= \frac{4m+4+m-2}{m+1}$$

$$= \frac{5m+2}{m+1}$$

दिया है- PQ = 3 या $PQ^2 = 9$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\therefore \left(-\frac{m-2}{m+1}+1\right)^2+\left(\frac{5m+2}{m+1}-2\right)^2=9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-m+2+m+1}{m+1}\right)^2+\left(\frac{5m+2-2m-2}{m+1}\right)^2=9$$

$$\Rightarrow \frac{9}{(m+1)^2}+\left(\frac{3m}{m+1}\right)^2=9$$

$$\therefore 1+m^2=(1+m)^2$$

$$\Rightarrow 1+m^2=1+2m+m^2 \text{ या } 2m=0$$

$$m=0$$

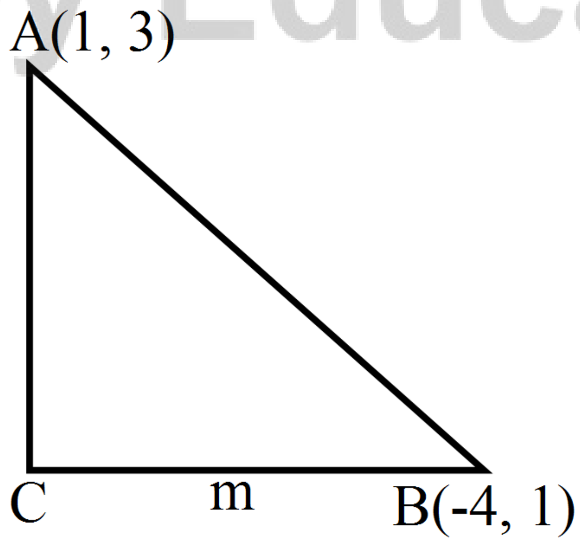
अतः रेखा PQ की ढाल 0 है अर्थात् रेखा x-अक्ष के समांतर है।

प्रश्न 17 समकोण त्रिभुज के कर्ण के अंत्य बिन्दु (1, 3) और (-4, 1) हैं। त्रिभुज के पाद (leg) (समकोणीय भुजाओ) का एक समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना त्रिभुज ABC एक समकोणीय त्रिभुज है जिसका कर्ण AB है। A और B के निर्देशांक क्रमशः (1, 3) और (-4, 1) हैं।

मान लीजिए BC की ढाल m है।

Fukey Education



AC ⊥ BC

∴ AC की ढाल = $-\frac{1}{m}$

रेखा BC का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = m(x + 4)$

$mx - y + 4m + 1 = 0$ ...(1)

रेखा AC का समीकरण

$y - 3 = -\frac{1}{m}(x - 1)$

$my - 3m = -x + 1$

$x + my - 3m - 1 = 0$ ...(2)

यह दोनों रेखाएँ m के दिए मान से इन का समीकरण ज्ञात कर सकते हैं। यदि BC भुजा x-अक्ष के समांतर हो तो $m = 0$.

BC का समीकरण, $y - 1 = 0$

$y = 1$

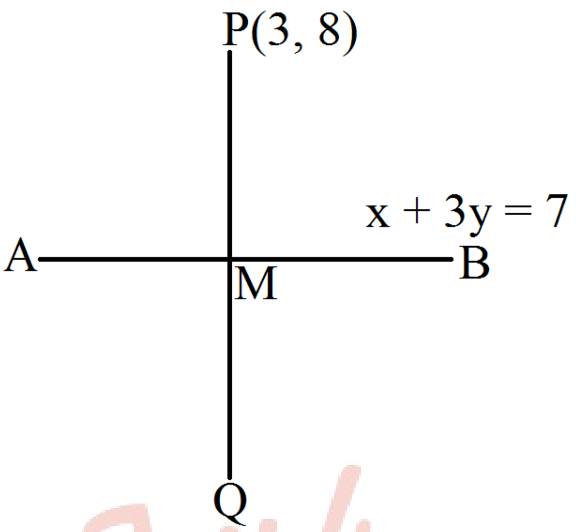
∴ AC, y-अक्ष के समांतर हो और यह A(1, 3) से जाती है। अतः AC का समीकरण $x = 1$

अत: BC और AC के समीकरण $y = 1$ और $x = 1$ हैं।

प्रश्न 18 किसी बिन्दु के लिए रेखा को दर्पण मानते हुए बिन्दु (3, 8) का रेखा $x + 3y = 7$ में प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



माना रेखा AB का समीकरण x + 3y = 7 है और बिन्दु P के निर्देशांक (3, 8) हैं।

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

बिन्दु P का प्रतिबिंब Q होगा यदि PQ ⊥ AB, PQ और AB बिन्दु M पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि

PM = QM

रेखा AB की ढाल = $-\frac{1}{3}$

और PQ की ढाल = 3

∴ PQ रेखा का समीकरण,

y - 8 = 3(x - 3)

= 3x - 9

3x - y = 1 ...(1)

AB का समीकरण x + 3y = 7 ...(2)

समी. (1) को 3 से गुणा करके समी. (2) में जोड़ने पर,

$10x = 10$ या $x = 1$

समी. (1) से $y = 3x - 1$

$= 3 - 1 = 2$

∴ बिन्दु M के निर्देशांक (1, 2) हैं।

मान लीजिए Q के निर्देशांक (x_1, y_1) हैं

बिन्दु M रेखाखण्ड PQ का मध्य बिन्दु है

∴ जबकि P(3, 8) है।

∴ $\frac{x_1+3}{2} = 1$ या $x_1 = -1$

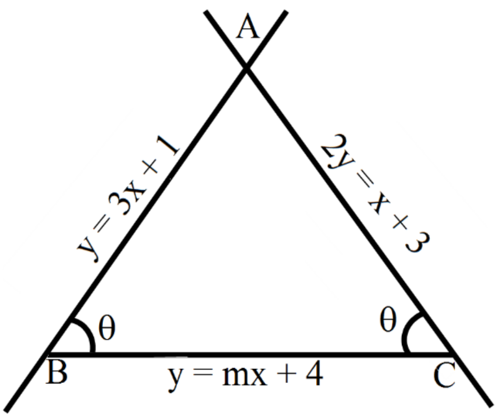
$\frac{y_1+8}{2} = 2$ या $y_1 = -4$

∴ P का प्रतिबिंब (-1, -4) हैं।

प्रश्न 19 यदि रेखाएँ $y = 3x + 1$ और $2y = x + 3$, रेखा $y = mx + 4$ पर समान रूप से आनत हो तो m का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- रेखा AB का समीकरण, $y = 3x + 1$ की ढाल = 3

रेखा BC का समीकरण, $y = mx + 4$ की ढाल = m



यदि इनके बीच में θ कोण हो, तो

$$\tan\theta = \frac{m-3}{1+3m} \quad \ldots(1)$$

रेखा AC का समीकरण, 2y = x + 3

या $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

AC की ढाल $= \frac{1}{2}$

जब AB और AC के बीच में θ कोण हो, तब

$$\tan\theta = \pm\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}$$

$$= \pm\frac{2m-1}{2+m} \quad \ldots(2)$$

समी. (1) और समी. (2) से,

$$\frac{m-3}{1+3m} = \pm\frac{2m-1}{2+m}$$

+ve चिन्ह लेकर, $\frac{m-3}{1+3m} = \frac{2m-1}{2+m}$

$$\therefore (2m-1)(3m+1) = (m+2)(m-3)$$

$$3m^2 - m - 1 = m^2 - m - 6$$

$\therefore m^2 = -1$ मान्य नहीं है।

-ve चिन्ह लेकर $\frac{m-3}{1+3m} = -\frac{2m-1}{2+m}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$(3m+1)(2m-1)+(m-3)(m+2)=0$$

$$(6m^2-m-1)+(m^2-m-6)=0$$

$$7m^2-02m-7=0$$

$$\therefore m=\frac{2\pm\sqrt{4+4\times49}}{14}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{200}}{14}=\frac{2\pm10\sqrt{2}}{14}$$

$$=\frac{1\pm5\sqrt{2}}{7}$$

अतः m का अभीष्ट मान $=\frac{1\pm5\sqrt{2}}{7}$

प्रश्न 20 यदि एक वर बिन्दु P(x, y) की रेखाओं x + y - 5 = 0 और 3x - 2y + 7 = 0 से लांबिक दूरियों का योग सदैव 10 रहे तो दर्शाइए कि P अनिवार्य रूप से एक रेखा पर गमन करता है।

उत्तर-

P(x, y) से रेखा x + y – 5 = 0 की दूरी

$$=\frac{x+y-5}{\sqrt{2}}$$

P(x, y) से रेखा 3x - 2y + 7 = 0 की दूरी

$$=\frac{3x-2y+7}{\sqrt{9+4}}$$

$$=\frac{3x-2y+7}{\sqrt{13}}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

दोनों दूरियों का योग = 10 (दिया है)

$$\therefore \sqrt{13}(x + y - 5) + \sqrt{2}(3x - 2y + 7) = 10\sqrt{26}$$

$$(\sqrt{13} + 3\sqrt{2})x + (\sqrt{13} - 2\sqrt{2})y$$
$$- 5\sqrt{13} + 7\sqrt{2} - 10\sqrt{26} = 0$$

जो कि एक सरल रेखा का समीकरण है।

अत: P एक अनिवार्य रूप से एक रेखा पर गमन करता है।

प्रश्न 21 समांतर रखाओं 9x + 6y - 7 = 0 और 3x + 2y + 6 = 0 से समदूरस्थ रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दी गयी समांतर रेखाएँ

9x + 6y – 7 = 0 ...(1)

3x + 2y + 6 = 0

9x + 6y + 18 = 0 ...(2)

एक रेखा जो इसके समांतर है, उसका समीकरण

9x + 6y + c = 0 ...(3)

रेखा (1) और (3) के बीच दूरी

$$\frac{(c+7)}{\sqrt{81+36}} = \frac{(c+7)}{\sqrt{117}} \quad \ldots(4)$$

रेखा (2) और (3) के बीच दूरी

$$\frac{(c-18)}{\sqrt{81+36}} = \frac{(c-18)}{\sqrt{177}} \quad \ldots(5)$$

दूरियाँ (4) और (5) आपस में समान हैं।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\frac{(c+7)}{\sqrt{117}} = \pm\frac{(c-18)}{\sqrt{177}}$ [+ve चिन्ह मान्य नहीं है।]

$c + 7 = -(c - 18)$

$= -c + 18$

$2c = 18 - 7 = 11$

$= c = \frac{11}{2}$

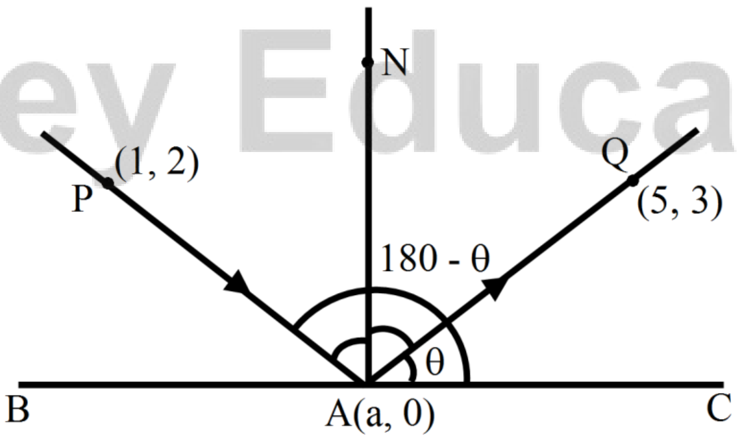
c का मान समी (3) में रखने पर,

$9x + 6y + \frac{11}{2} = 0$

$18x + 12y + 11 = 0$

प्रश्न 22 बिन्दु (1, 2) से होकर जाने वाली एक प्रकाश किरण x-अक्ष के बिन्दु A से परावर्तित होती है और परावर्तित किरण बिन्दु (5, 3) से होकर जाती है। A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान लीजिए BC, x-अक्ष के अनुदिश उस बिन्दु के निर्देशांक A (a, 0) है। AN इस पर लंब है। PA एक आपतित किरण है और AQ परावर्तित किरण है।



⇒ आपतित कोण PAN = परावर्तित कोण NAQ

⇒ ∠PAB = ∠QAC

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

⇒ यदि QA का झुकाव θ हो तो PA का झुकाव 180 – θ होगा।

QA की ढाल जबकि Q(5, 3) और A(a, 0) हो, तो

$$\tan\theta = \frac{0-3}{a-5} = \frac{-3}{a-5}$$

PA की ढाल जबकि P(1, 2) और A(a, 0) हो, तब

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{0-2}{a-1}$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$$

$$\therefore \frac{-2}{a-1} = \frac{-3}{a-5} = \frac{3}{a-5}$$

$$\Rightarrow -2(a-5) = 3(a-1)$$

$$\Rightarrow -2a + 10 = 3a - 3$$

$$\Rightarrow 5a = 13$$

$$\Rightarrow a = \frac{13}{5}$$

∴ बिंदु A के निर्देशांक $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ है।

Fukey Education

प्रश्न 23 दिखाइए कि $\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ और $\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ बिन्दुओं से रेखा $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ पर खींचे गए लम्बों की लंबाइयों का गुणनफल b_2 है।

उत्तर-

दी गयी रेखा $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta - 1 = 0 \ \ldots(1)$

$\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ से खींचे गए लम्ब की लम्बाई

$$P_1 = \frac{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos\theta - 1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}} \quad \left[\because d = \frac{ax_1+by_1+c_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

इसी प्रकार $\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ से रेखा (1) पर खींचे गए लम्ब की लम्बाई

$$P_2 = \frac{-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos\theta - 1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}}$$

$$P_1P_2 = \frac{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos\theta - 1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}} \times \frac{-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos\theta - 1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2\theta - 1\right)}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}$$

$$= \frac{-b^2[(a^2-b^2)\cos^2\theta - a^2]}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{-b^2[(a^2-b^2)\cos^2\theta - a^2]}{b^2\cos^2\theta + a^2(1-\cos^2\theta)} \quad [\therefore \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta]$$

$$= \frac{-b^2[(a^2-b^2)\cos^2\theta - a^2]}{(b^2-a^2)\cos^2\theta + a^2}$$

$$= \frac{-b^2[(a^2-b^2)\cos^2\theta - a^2]}{-(a^2-b^2)\cos^2\theta - a^2} = b^2$$ इति सिद्धम्।

Fukey Future's Key
Fukey Education

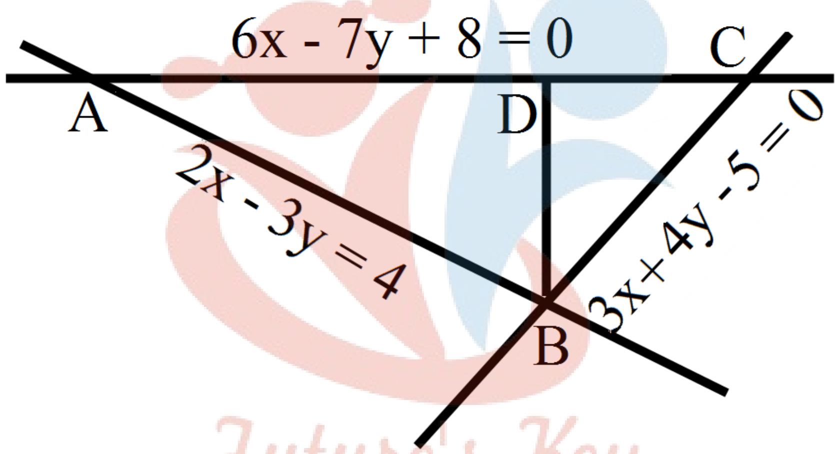
प्रश्न 24 एक व्यक्ति समीकरणों 2x - 3y + 4= 0 और 3x + 4y - 5 = 0 से निरूपित सरल रेखीय पथों के संधि बिन्दुओं (junction/crosing) पर खड़ा है और समीकरण 6x - 7y + 8 = 0 से निरूपित पथ पर न्यूनतम समय में पहुँचना चाहता है। उसके द्वारा अनुसरित पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

AB और BC दो रेखीय पथ हैं। AB व BC रेखाओं के समीकरण

$2x - 3y + 4 = 0$ ...(1)

$3x + 4y - 5 = 0$ ...(2)



AB और BC बिन्दु B पर मिलते हैं।

समी. (1) को 3 से तथा समी. (2) को 2 से गुणा करने पर

$6x - 9y = -12$ ....(3)

$6x + 8y = 10$ ....(4)

समी. (3) को समी. (4) में से घटाने पर,

$17y = 10 + 12 = 22$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\therefore y = \frac{22}{17}$

y का मान समी. (1) में रखने पर,

$2x - 3 \times \left(\frac{22}{17}\right) = -4$

$\Rightarrow 2x = -4 + \frac{66}{17} = \frac{-2}{17}$

$\therefore x = -\frac{1}{17}$

इस प्रकार B के निर्देशांक $\left(\frac{-1}{17}, \frac{22}{17}\right)$ है।

B से AC तक न्यूनतम समय में पहुंचने के लिए कम से कम दूरी BD(BD ⊥ AC) तय करनी है।

रेखा AC का समीकरण, 6x - 7y + 8= 0 की ढाल $= \frac{6}{7}$

BD की ढाल $= -\frac{7}{6}$

BD बिन्दु $B\left(\frac{-1}{17}, \frac{22}{17}\right)$ से होकर जाती है।

∴ रेखा BD का समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \frac{22}{17} = -\frac{7}{6}\left(x + \frac{1}{17}\right)$

102 से गुणा करने पर,

102y - 132 = -119x - 7

119x + 102y - 125 = 0

अतः B से AC तक पहुँचने के लिए BD पथ अपनाना है जिसका समीकरण 119x + 102y - 125 = 0 है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com