गणित

अध्याय-9: वृत

वृत्त तथा वृत्त का केंद्र

वृत्त

एक तल पर उन सभी बिन्दुओं का समूह, जो तल के एक स्थिर बिन्दु से एक स्थिर दूरी पर स्थित हों, एक वृत्त कहलाता है।

वृत्त का केन्द्र

स्थिर बिन्दु को वृत्त का केन्द्र कहते हैं

वृत्त की त्रिज्या

केन्द्र को वृत्त के किसी बिन्दु से मिलाने वाला रेखाखंड भी वृत्त की त्रिज्या कहलाता है।

वृत्तीय क्षेत्र

एक वृत्त उस तल को, जिस पर वह स्थित है, तीन भागों में विभाजित करता है। ये हैं:

1) वृत्त के अन्दर का भाग, जिसे अभ्यंतर भी कहते हैं,
2) वृत्त एवं वृत्त के बाहर का भाग, जिसे बहिर्भाग भी कहते हैं।
3) वृत्त तथा इसका अभ्यंतर मिलकर वृत्तीय क्षेत्र बनाते हैं।

वृत्त की जीवा तथा वृत्त का व्यास

वृत्त की एक जीवा

एक रेखाखंड, जो वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलने पर बनता है।

वृत्त का व्यास

उस जीवा को जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाती है, वृत्त का व्यास कहते हैं। व्यास वृत्त की सबसे लम्बी जीवा होती है तथा सभी व्यासों की लम्बाई समान होती है जो त्रिज्या की दो गुनी होती है।

चाप तथा अर्धवृत्त

चाप

दो बिन्दुओं के बीच के वृत्त के भाग को एक चाप कहते हैं। आप पाएँगे कि दोनों भागों में से एक बड़ा है तथा एक छोटा है। बड़े भाग को दीर्घ चाप कहते हैं तथा छोटे भाग को लघु चाप कहते हैं।

अर्धवृत्त

वृत्त का वह भाग, जो एक ओर व्यास और दूसरी ओर परिधि से घिरा होता है, अर्द्धवृत्त कहलाता है।

नोट: अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल का आधा होता है।

वृत्त की परिधि तथा वृत्तखंड

वृत्त की परिधि

संपूर्ण वृत्त की लम्बाई को उसकी परिधि कहते हैं।

वृत्तखंड

जीवा तथा प्रत्येक चाप के मध्य क्षेत्र को वृत्तीय क्षेत्र का खंड या सरल शब्दों में वृत्तखंड कहते हैं। आप पाएँगे कि दो प्रकार के वृत्तखंड होते हैं। ये हैं: दीर्घ वृत्तखंड तथा लघु वृत्तखंड।

त्रिज्यखंड

केन्द्र को एक चाप के सिरों से मिलाने वाली त्रिज्याओं एवं चाप के बीच के क्षेत्र को त्रिज्यखंड कहते हैं। वृत्तखंड की तरह, आप पाते हैं कि लघु चाप लघु त्रिज्यखंड के तथा दीर्घ चाप दीर्घ त्रिज्यखंड के संगत है।

जीवा द्वारा एक बिन्दु पर अंतरित कोण

चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण भी संगत जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण से इस अर्थ में परिभाषित किया जाता है कि लघु चाप कोण को अंतरित करता है और दीर्घ चाप संगत प्रतिवर्ती कोण अंतरित करता है। किसी वृत्त के सर्वांगसम चाप (या बराबर चाप) केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।

प्रमेय: वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

उपपत्ति:

आपको एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की दो बराबर जीवाएँ AB और CD दी हुई हैं तथा आप सिद्ध करना चाहते हैं कि $\angle AOB = \angle COD$ है।

त्रिभुजों AOB तथा COD में,

$OA = OC$ (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OB = OD$ (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

AB = CD (दिया है)

अत: $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (SSS नियम)

इस प्रकार हम पाते है कि $\angle AOB = \angle COD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

प्रमेय: यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं।

उपर्युक्त प्रमेय, प्रमेय 10.1 का विलोम है।

$\angle AOB = \angle COD$ लें, तो

दोनों जीवाओं को केंद्र से मिलाने वाली रेखाएं बराबर हैं। (सभी वृत्त की त्रिज्या हैं)

और केंद्र पर बन रहे अंतरित कोण भी बराबर हैं।

इसलिए, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (SSA नियम से)

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि दोनों जीवायें बराबर होंगी।

स्मरणीय तथ्य:

1. एक वृत्त किसी तल के उन सभी बिन्दुओं का समूह होता है, जो तल के एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर हों।
2. एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र (या संगत केन्द्रों) पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।
3. यदि किसी वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) दो जीवाएँ केन्द्र पर (या संगत केन्द्रों पर) बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।

केन्द्र से जीवा पर लम्ब

इसको एक क्रियाकलाप के माध्यम से समझ सकते हैं:

एक वृत्त खींचिए।

माना इसका केन्द्र O है। एक जीवा AB खींचिए। कागज को O से जाने वाली एक रेखा के अनुदिश इस प्रकार मोड़िए कि जीवा का एक भाग दूसरे भाग पर पड़े।

मान लीजिए कि मोड़ का निशान AB को M पर काटता है।

तब $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ अथवा OM, AB पर लम्ब है।

क्या बिन्दु B, A के संपाती होता है?

हाँ, यह होगा। इसलिए MA = MB है।

OA और OB को मिलाकर तथा समकोण त्रिभुजों OMA और OMB की रचना होती है जो आपस में सर्वांगसम हैं।

प्रमेय: एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

हल:

माना O वृत्त का केंद्र है, AB वृत्त की जीवा है तथा $OM \perp AB$

सिद्ध करना है: AM = BM

रचना:

केंद्र O को A से तथा B से मिलाया।

उपपति:

ΔOAM और ΔOBM में,

$\angle AMO = \angle BMO = 90^0$

OA = OB (वृत्त की त्रिज्याएँ)

OM = OM (ΔOAM और ΔOBM की उभयनिष्ठ भुजा)

अत: $\Delta OAM \cong \Delta OBM$

इसलिए, AM = BM (CPCT द्वारा)

इस प्रकार यह सिद्ध हो गया कि वृत्त के केन्द्र से एक जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

नोट: इस प्रमेय का विपरीत भी उतना ही सत्य है।

प्रमेय: एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लंब होती है।

हल:

मान लीजिए कि एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की AB एक जीवा है और O को AB के मध्य-बिन्दु M से मिलाया गया है।

सिद्ध करना है कि $OM \perp AB$ है।

रचना:

OA और OB को मिलाइए

उपपति:

त्रिभुजों OAM तथा OBM में,

OA =OB (वृत्त की त्रिज्याएँ)

AM = BM (दिया है)

OM = OM (ΔOAM और ΔOBM की उभयनिष्ठ भुजा)

अत: $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ हैं

इससे प्राप्त होता है कि $\angle OMA = \angle OMB = 90°$

इससे सिद्ध होता है कि $OM \perp AB$ है।

स्मरणीय तथ्य

1. किसी वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।
2. केन्द्र से होकर जाने वाली और किसी जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

तीन बिन्दुओं से जाने वाला वृत्त

हम तीन बिन्दु A, B और C लें, जो एक रेखा पर स्थित न हों या दूसरे शब्दों में, वे संरेखी न हों। AB तथा BC के क्रमश: लम्ब समद्विभाजक PQ और RS खींचिए। मान लीजिए ये लम्ब समद्विभाजक एक बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं (ध्यान दीजिए कि PQ और RS परस्पर प्रतिच्छेद करेंगे, क्योंकि वे समांतर नहीं हैं)।

अब क्योंकि O, AB के लम्ब समद्विभाजक PQ पर स्थित है, इसलिए OA = OB है।

ध्यान दीजिए कि अध्याय 7 में सिद्ध किया गया है कि रेखाखंड के लम्ब समद्विभाजक का प्रत्येक बिन्दु उसके अंत बिन्दुओं से बराबर दूरी पर होता है।

इसी प्रकार, क्योंकि O, BC के लम्ब समद्विभाजक RS पर स्थित हैं, इसलिए आप पाते हैं कि

OB = OC

इसीलिए OA = OB = OC है, जिसका अर्थ है कि बिन्दु A, B और C बिन्दु O से समान दूरी पर हैं। अतः यदि आप O को केन्द्र तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचे, तो वह B और B से भी होकर जाएगा। यह दर्शाता है कि तीन बिन्दुओं A, B और C से होकर जाने वाला एक वृत्त है। आप जानते हैं कि दो रेखाएँ (लम्ब समद्विभाजक) केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं। दूसरे शब्दों में, A, B और C से होकर जाने वाला एक अद्वितीय वृत्त है। आपने अब निम्न प्रमेय को सिद्ध कर लिया।

प्रमेय : तीन दिए हुए असंरेखी बिन्दुओं द्वारा होकर जाने वाला एक और केवल एक वृत्त है।

नोटः उपरोक्त प्रमेय को पहले ही सिद्ध किया जा चुका है।

टिप्पणी:

यदि ABC एक त्रिभुज हो, तो प्रमेय 10.5 से शीर्षों A, B और C से होकर एक अद्वितीय वृत्त खींचा जा सकता है। इस वृत्त को ΔABC का परिवृत्त कहते हैं। इसका केन्द्र तथा त्रिज्या क्रमशः त्रिभुज के परिकेन्द्र तथा परित्रिज्या कहलाते हैं।

हल सहित उदाहरण

एक वृत्त का चाप दिया हुआ है। इस वृत्त को पूरा कीजिए।

हल:

मान लीजिए एक वृत्त का चाप PQ दिया हुआ है। हमें वृत्त को पूरा करना है। इसका अर्थ है कि हमें इसका केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात करनी है। चाप पर एक बिन्दु R लीजिए। PR तथा RQ को मिलाइए। इन्हीं केन्द्र तथा त्रिज्या को लेकर वृत्त को पूरा कीजिए।

केंद्र का निर्धारण करने के लिए चाप PQ और RQ पर लम्ब डालते हैं दोनों लम्ब को आगे बढ़ाने पर बिंदु O पर दोनों एक दूसरे को प्रतिच्छेद करते हैं। यह बिंदु वृत्त का केंद्र है तथा OP = OR वृत्त की त्रिज्या हैं। इन सबकी सहायता से वृत्त की रचना करते हैं जो कि बिंदु P, Q और R से होकर गुजरता है।

स्मरणीय तथ्य

1. तीन असंरेखीय बिन्दुओं से जाने वाला एक और केवल एक वृत्त होता है।
2. एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या संगत केन्द्रों से) समान दूरी पर होती हैं।

समान जीवाएँ और उनकी केन्द्र से दूरियाँ

एक वृत्त में असंख्य जीवाएँ हो सकती हैं। आप एक वृत्त में जीवाएँ खींचकर जाँच कर सकते हैं कि लंबी जीवा, छोटी जीवा की तुलना में केन्द्र के निकट होती है। इसकी आप विभिन्न लम्बाई की कई जीवाएँ की खींचकर तथा उनकी केन्द्र से दूरियाँ मापकर जाँच कर सकते हैं। व्यास, जो वृत्त की सबसे बड़ी जीवा है, की केन्द्र से क्या दूरी है? क्योंकि केन्द्र इस पर स्थित है, अतः इसकी दूरी शून्य है।

नोट:

एक बिन्दु से एक रेखा पर लम्ब की लम्बाई रेखा की बिन्दु से दूरी होती है।

प्रमेय: एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या केन्द्रों से) समान दूरी पर होती है।

क्या इसका विलोम सत्य है अथवा नहीं। इसके लिए केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। केन्द्र O से वृत्त के भीतर रहने वाले दो बराबर लम्बाई के रेखाखंड OL तथा OM खींचिए। अब क्रमशः दो जीवाएँ PQ और RS खींचिए जो OL और OM पर लम्ब हों। PQ और RS की लम्बाइयाँ मापिए। क्या ये असमान हैं? नहीं, दोनों बराबर हैं। इस प्रकार, प्रमेय 10.6 का विलोम सत्यापित हो जाता है, जिसका कथन नीचे प्रमेय 10.7 में दिया गया है।

प्रमेय: एक वृत्त के केन्द्र से समदूरस्थ जीवाएँ लम्बाई में समान होती हैं।

उपर्युक्त परिणामों पर आधारित एक उदाहरण के माध्यम से समझते हैं।

उदाहरण:

यदि एक वृत्त की दो प्रतिच्छेदी जीवाएँ प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले व्यास से समान कोण बनाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि वे जीवाएँ बराबर हैं।

हल:

दिया है कि एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की दो जीवाएँ AB और CD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं। E से जाने वाला PQ एक ऐसा व्यास है कि

$\angle AEQ = \angle DEQ$ है।

आपको सिद्ध करना है कि AB = CD है। जीवाओं AB और CD पर क्रमशः OL तथा OM लम्ब खींचिए।

अब, $\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO = 90° - \angle LEO$ (त्रिभुज के कोणों का गुण)

$= 90° - \angle AEQ = 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$

त्रिभुजों OLE तथा OME में,

$\angle LEO = \angle MEO$ (दिया है)

$\angle LOE = \angle MOE$ (ऊपर सिद्ध किया है)

EO = EO (उभयनिष्ठ हैं)

अतः $\Delta OLE \cong \Delta OME$

इससे प्राप्त होता है OL = OM (CPCT)

इसलिए, AB = CD

स्मरणीय तथ्य

एक वृत्त के केन्द्र (या सर्वांगसम वृत्तों के केन्द्रों) से समान दूरी पर स्थित जीवाएं बराबर होती हैं।

यदि किसी वृत्त के दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनकी संगत जीवाएँ बराबर होती हैं और विलोमतः यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप (लघु, दीर्घ) सर्वांगसम होते हैं।

किसी वृत्त की सर्वांगसम चाप केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।

किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

वृत्त के चाप और आंतरिक कोण

एक वृत्त के चाप

यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप सर्वांगसम होते हैं तथा विलोमतः यदि दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनके संगत जीवाएँ बराबर होती हैं।

वृत्त के चाप द्वारा अंतरित कोण

चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण भी संगत जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण से इस अर्थ में परिभाषित किया जाता है कि लघु चाप कोण को अंतरित करता है और दीर्घ चाप संगत प्रतिवर्ती कोण अंतरित करता है।

नोट:

किसी वृत्त के सर्वांगसम चाप (या बराबर चाप) केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।

प्रमेय: एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

प्रमेय: एक ही वृत्तखंड के कोण बराबर होते हैं।

प्रमेय: यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड, उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं (अर्थात् वे चक्रीय होते हैं)।

चक्रीय चतुर्भुज तथा उसकी प्रमेय

चक्रीय चतुर्भुज

एक चतुर्भुज ABCD चक्रीय कहलाता है, यदि इसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं।

प्रमेय: चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180^0 होता है।

प्रमेय: यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के एक युग्म का योग 180^0 हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।

स्मरणीय तथ्य:

1. एक वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।
2. अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।
3. यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं।

4. चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180^0 होता है।
5. यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग 180^0 हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 10.1 (पृष्ठ संख्या 205)

प्रश्न 1 खाली स्थान भरिए-

(i) वृत्त का केन्द्र वृत्त के ________ में स्थित है। (बहिर्भाग/ अभ्यंतर)

(ii) एक बिन्दु, जिसकी वृत्त के केन्द्र से दूरी त्रिज्या से अधिक हो, वृत्त के ________ स्थित होता है। (बहिर्भाग/ अभ्यंतर)

(iii) वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त का ________ होता है।

(iv) एक चाप ________ होता है, जब इसके सिरे एक व्यास के सिरे हों।

(v) वृत्तखंड एक चाप तथा ________ के बीच का भाग होता है।

(vi) एक वृत्त, जिस तल पर स्थित है, उसे ________ भागों में विभाजित करता है।

उत्तर-

(i) वृत्त का केन्द्र वृत्त के **अभ्यंतर** में स्थित है।

(ii) एक बिन्दु, जिसकी वृत्त के केन्द्र से दूरी त्रिज्या से अधिक हो, वृत्त के **बहिर्भाग** स्थित होता है।

(iii) वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त का **व्यास** होता है।

(iv) एक चाप **अर्धवृत** होता है, जब इसके सिरे एक व्यास के सिरे हों।

(v) वृत्तखंड एक चाप तथा **जीवा** के बीच का भाग होता है।

(vi) एक वृत्त, जिस तल पर स्थित है, उसे **अनंत** भागों में विभाजित करता है।

प्रश्न 2 लिखिए, सत्य या असत्य। अपने उत्तर के कारण दीजिए-

(i) केन्द्र को वृत्त पर किसी बिन्दु से मिलाने वाला रेखाखंड वृत्त की त्रिज्या होती है।

(ii) एक वृत्त में समान लंबाई की परिमित जीवाएँ होती हैं।
(iii)यदि एक वृत्त को तीन बराबर चापों में बाँट दिया जाए, तो प्रत्येक भाग दीर्घ चाप होता है।

(iv)वृत्त की एक जीवा, जिसकी लम्बाई त्रिज्या से दो गुनी हो, वृत्त का व्यास है।

(v) त्रिज्यखंड, जीवा एवं संगत चाप के बीच का क्षेत्र होता है।

(vi)वृत्त एक समतल आकृति है।

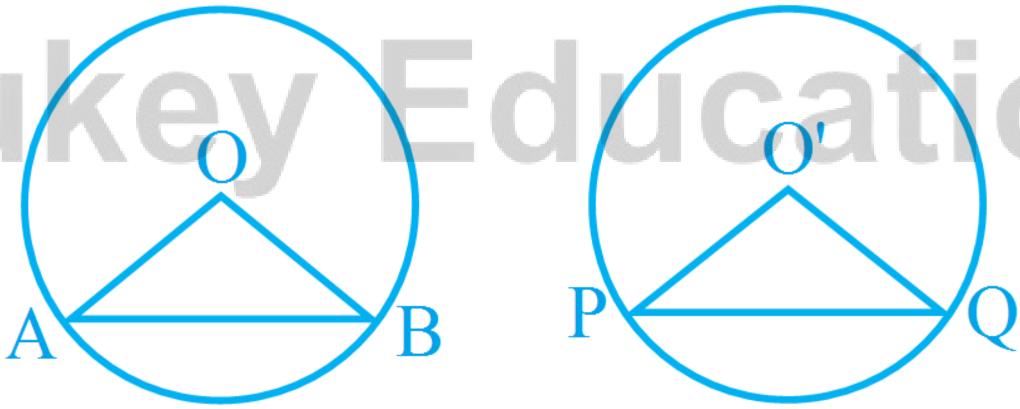
उत्तर-

(i) सत्य
(ii) सत्य
(iii)असत्य
(iv)सत्य
(v) असत्य
(vi)सत्य

प्रश्नावली 10.2 (पृष्ठ संख्या 208)

प्रश्न 1 याद कीजिए कि दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी त्रिज्याएँ बराबर हों। सिद्ध कीजिए कि सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

उत्तर-



दिया है- O और O′ वाले दो सर्वांगसम वृत्त हैं जिनकी बराबर जीवाएं AB = PQ है

सिद्ध करना है- $\angle AOB = \angle PO'Q$ है

प्रमाण- $\triangle AOB$ तथा $\triangle PO'Q$ में

AO = PO′ (सर्वांगसम वृत्त की त्रिज्या बराबर होती है)

BO = QO′ (सर्वांगसम वृत्त की त्रिज्या)

AB = PQ (दिया है)

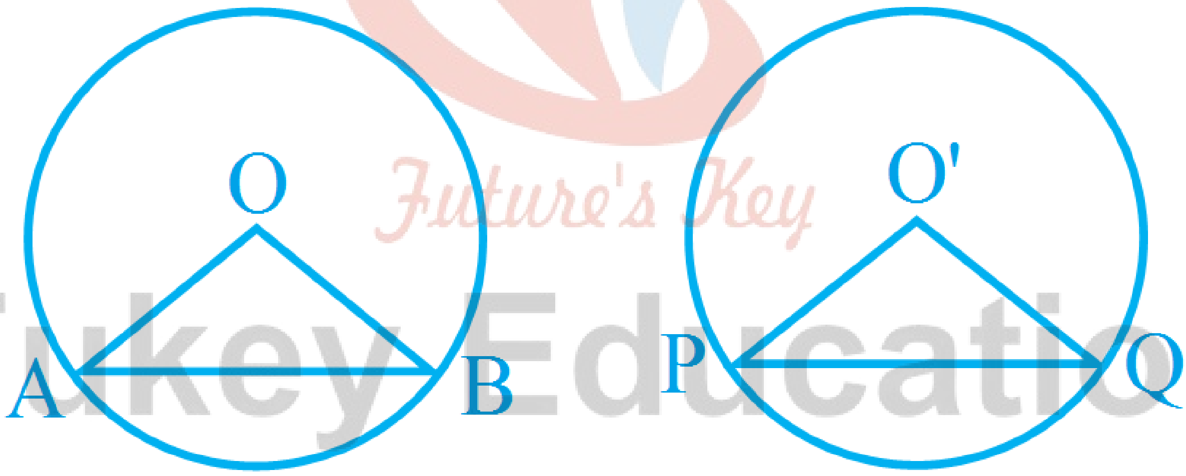
SSS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle AOB \cong \triangle PO'Q$

अत: $\angle AOB = \angle PO'Q (BY\ CPCT)$

प्रश्न 2 सिद्ध कीजिए कि यदि सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।

उत्तर-



दिया है- O और O′ वाले दो सर्वांगसम वृत्त हैं जिनमें $\angle AOB = \angle PO'Q$

सिद्ध करना है- AB = PQ है

प्रमाण- $\triangle AOB$ तथा $\triangle PO'Q$ में

AO = PO′ (सर्वांगसम वृत्त की त्रिज्या बराबर होती है)

BO = QO′ (सर्वांगसम वृत्त की त्रिज्या)

$\angle AOB = \angle PO'Q$ (दिया है)

SSS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle AOB \cong \triangle PO'Q$

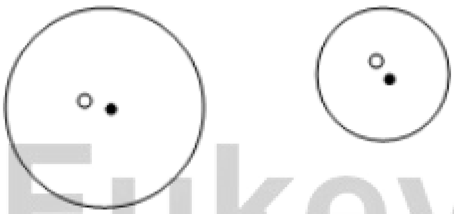
अत:AB = PQ (BY CPCT)

प्रश्नावली 10.3 (पृष्ठ संख्या 211)

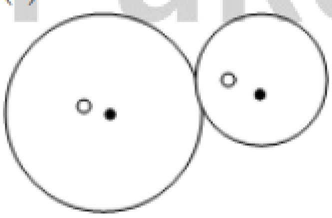
प्रश्न 1 वृतो के कई जोड़े (युग्म) खीचिए। प्रत्येक जोड़े में कितने बिंदु उभयनिष्ठ है? उभयनिष्ठ बिन्दुओ की अधिकतम संख्या क्या है।

उत्तर-

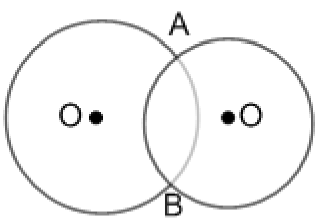
(i)



(ii)



(iii)



आकृति (i) में, दो वृत्तों का कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं है।

आकृति (ii) में, दो वृत्तों एक-दूसरे को स्पर्श करते हैं।

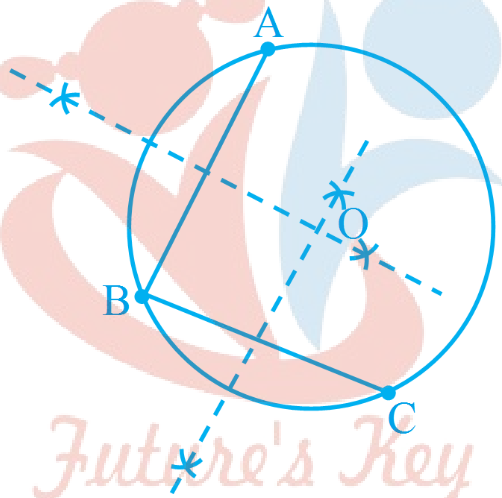
∴ इनका केवल उभयनिष्ठ बिंदु है।

आकृति (iii) में, दो वृत्त एक-दूसरे को को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अत: उभयनिष्ठ बिंदुओं की अधिकतम संख्या = 2 हैं।

प्रश्न 2 मान लीजिए आपको एक वृत्त दिया है। एक रचना इसके केंद्र को ज्ञात करने के लिए दीजिए।

उत्तर-



रचना के पद-

i. दिया हुआ बिना केंद्र वाला एक खिंचा।
ii. वृत्त पर तीन असंरेखी बिन्दुएँ A, B तथा C डाला और A को B से और B को C से मिलाया।
iii. रेखाखंड AB और BC का लंब समद्विभाजक खिंचा जो एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।
iv. बिंदु O ही दिए गए वृत्त का अभीष्ट केंद्र है।

प्रश्न 3 यदि दो वृत्त परस्पर दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि उनके केंद्र उभयनिष्ठ जीवा के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित हैं।

उत्तर- O और O’ वाले दो वृत्त एक दुसरे को बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करती हैं। अत: उभयनिष्ठ जीवा AB है।

दिया है- O और O’ वाले दो वृत्त एक दुसरे को बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करती हैं अत: उभयनिष्ठ जीवा AB है।

सिद्ध करना है- AM = BM और OM ⊥ AB है

प्रमाण- △OAO तथा △OBO में

OA = OB (एक ही वृत्त की त्रिज्याएं)

O'A = O'B (एक ही वृत्त की त्रिज्याएं)

OO' = OO'' (उभयनिष्ठ)

SSS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle OAO \cong \triangle OBO$

अत: $\angle AOO = \angle BOO \ldots (1)$By CPCT

अब, $\triangle AOM$ तथा $\triangle BOM$ में

AO = BO (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

OM = OM (उभयनिष्ठ)

$\angle AOM = \angle BOM$ समी. (1) से

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle AOM \cong \triangle BOM$

अत: $AM = BM$

और $\angle OMA = \angle OMB \ldots (2)$By CPCT

इसलिए $\angle OMA + \angle OMB = 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

$\angle OMA = \angle OMB = 180^\circ$

$2\angle OMA = 180^\circ$

$\angle OMA = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

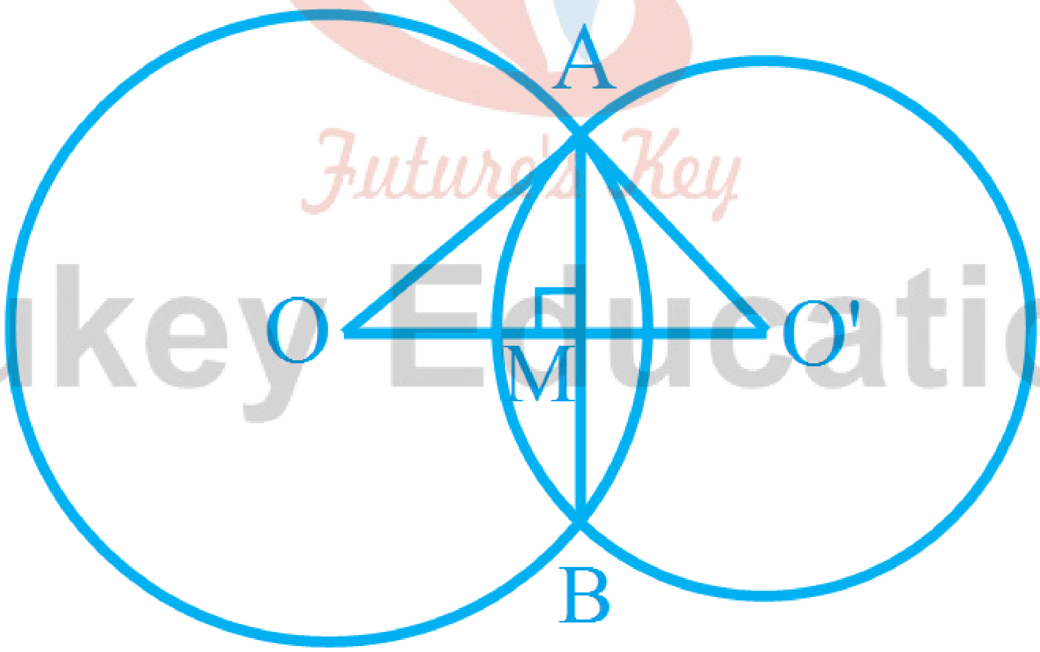
अतः $AM = BM$ और $OM \perp AB$ है

अब चूँकि AB एक सरल रेखा है।

प्रश्नावली 10.4 (पृष्ठ संख्या 214-215)

प्रश्न 1 5cm तथा 3cm त्रिज्या वाले दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा उनके केन्द्रों बीच की दूरी 4cm है। उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



AO = 5cm

AO = 3cm

OO = 4cm

AB = ?

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+4+3}{2} = \frac{13}{2} = 6cm$$

$\triangle OAO$ का क्षेत्रफल (हेरॉन सूत्र से)

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$

$$= \sqrt{6(1)(2)(3)}$$

$$= \sqrt{6 \times 6}$$

$$= 6cm^2$$

$\triangle OAO$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4 \times AM$

$$6cm^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times AM$$

$$2AM = 6cm^2$$

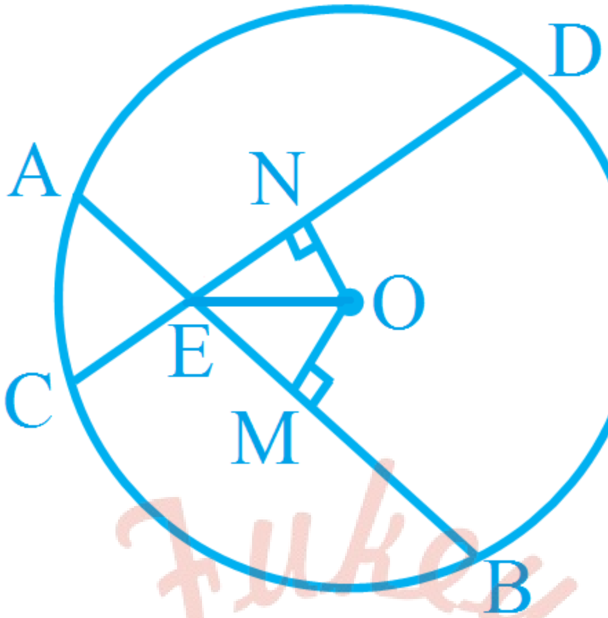
$$AM = \frac{6}{2} cm^2$$

$$AM = 3cm^2$$

अतः उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई $6cm^2$ है।

प्रश्न 2 यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एकजीवा के खंड दूसरी जीवा के संगत खंडों के बराबर हैं।

उत्तर-



दिया है- O केंद्र वाले वृत्त की दो बराबर जीवाएं AB तथा CD हैं। जो एक दुसरे को बिंदु E पर प्रतिच्छेद करती हैं।

सिद्ध करना है- AE = CE और BE = DE है

रचना- O से M तथा N को मिलाया

प्रमाण- OM ⊥ AB तथा ON ⊥ CD है

△OME एवं △ONE में,

OM = ON (बराबर जीवाओ की केन्द्र से दूरी)

OE = OE (उभयनिष्ठ है)

∠OME = ∠ONE (प्रत्येक 90°)

(RHS सर्वांगसमता प्रमेय)

⇒ △EOM ≅ △EON

इसलिए EM = EN ...(1) By CPCT

जबकि AB = CD ...(दिया है)

या $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

AM = CN ...(2)

BM = DN ...(3)

अब समीकरण (2) में से (1) घटाने पर AM - EM = CN - EN

AE = CE

अब समीकरण (3) में (1) जोड़ने पर

BM + EM = DN + EN

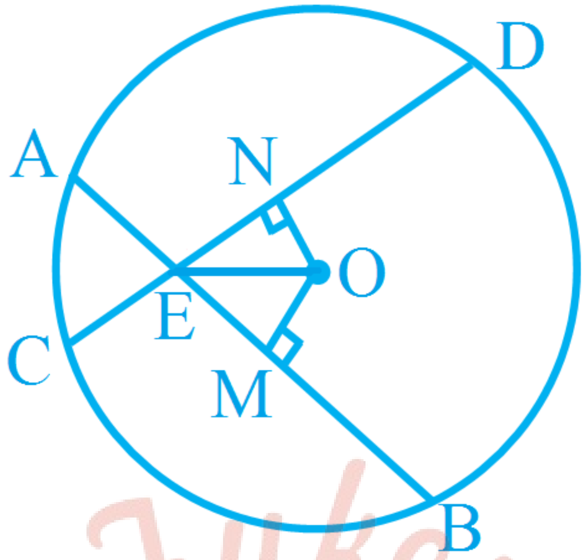
BE = DE

अत: AE = CE और BE = DE है।

इसलिए जीवा के संगत अंत:खंड बराबर हैं।

प्रश्न 3 यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिच्छेद बिन्दु को केंद्र से मिलाने वाली रेखा जीवाओं से बराबर कोण बनाती है।

उत्तर-



दिया है- O केंद्र वाले वृत्त की दो बराबर जीवायें AB तथा CD वृत्त के अन्दर बिंदु E पर प्रतिच्छेद करती हैं।

रचना- E को केंद्र O से मिलाया

सिद्ध करना है- $\angle MEO = \angle NEO$

प्रमाण- $OM \perp AB$ एवं $ON \perp CD$ है

(जीवा को क्रेन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है)

$\triangle OME$ एवं $\triangle ONE$ में,

OM = ON (बराबर जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं)

OE = OE (उभयनिष्ठ)

$\angle OME = \angle ONE$ (प्रत्येक 90°)

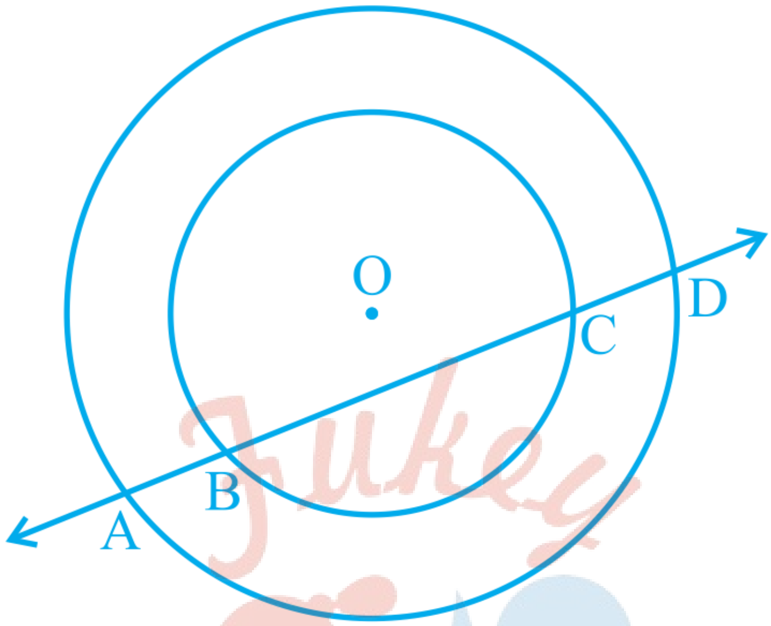
(RHS सर्वांगसमता नियम से)

$\Rightarrow \triangle EOM \cong \triangle EON$

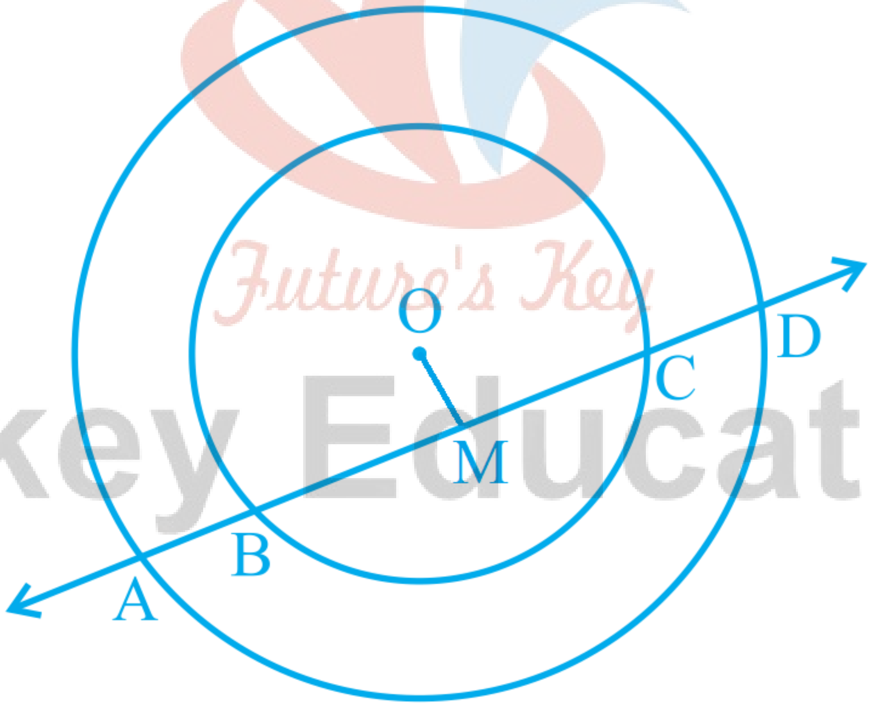
अतः $\angle MEO = \angle NEO$ By CPCT इति सिद्धम्

प्रश्न 4 यदि एक रेखा दो संकेंद्री वृतों (एक ही केंद्र वाले वृत्त) को, जिनका केंद्र O है, A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करे, तो सिद्ध कीजिए AB = CD है।

उत्तर-



दिया है- दो संकेंद्री वृत्त जिनका केंद्र O है



सिद्ध करना है- AB = CD

रचना- OM ⊥ AD खींचा

प्रमाण- $OM \perp AD$ (रचना से)

इसलिए $AM = MD$ ...(1)

(जीवा पर लम्ब जीवा को समद्विभजित करता है)

इसप्रकार $BM = MC$ ...(2)

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

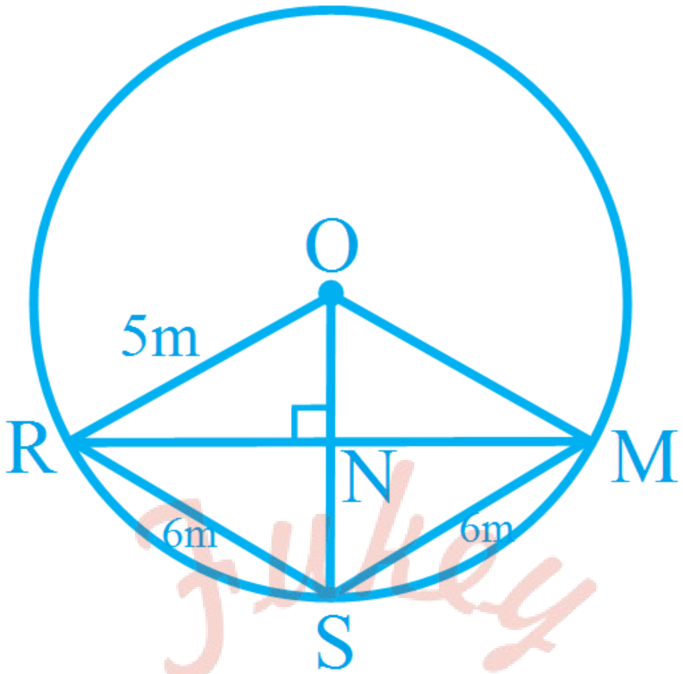
$AM - BM = MD - MC$

अतः $AB = CD$ इति सिद्धम्

एक रेखा वृत्त को A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करती हैं।

प्रश्न 5 एक पार्क में बने 5 मीटर त्रिज्या वाले वृत्त पर खड़ी तीन लड़कियाँ रेशमा, सलमा एवं मनदीप खेल रही हैं। रेशमा एक गेंद को सलमा के पास, सलमा मनदीप के पास तथा मनदीप रेशमा के पास फेंकती है। यदि रेशमा तथा सलमा के बीच और सलमा तथा मनदीप के बीच की प्रत्येक दूरी 6 मीटर हो, तो रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी क्या है?

उत्तर-



वृत्त का केंद्र O और और माना कि वृत्त पर रेशमा (R), सलमा (S) और मनदीप (M) है।

RS = 6 मीटर , SM = 6 मीटर और RM = ?

OR = OS = 5 सेमी. है

△ROS में,

a = 5 सेमी. b = 5 सेमी.

और c = 6 सेमी

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+5+6}{2} = \frac{16}{2} = 8cm$

$\triangle ROS$ का क्षेत्रफल (हेरॉन सूत्र से)

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)}$

$= \sqrt{8(3)(3)(3)}$

$= \sqrt{3 \times 3 \times 4 \times 4}$

$= 3 \times 4 = 12cm^2$

अब, $\triangle ROS$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार × ऊँचाई

$12 = \frac{1}{2} \times OS \times RN$

$12 = \frac{1}{2} \times 5 \times RN$

$RN = 12 \times \frac{2}{5}$

$RN = \frac{24}{5} = 4.8m$

RM = 2 × RN

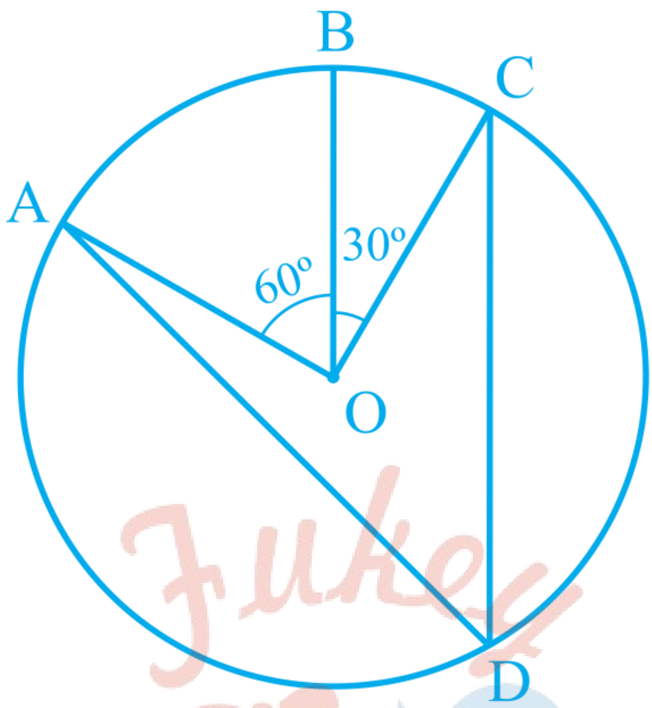
RM = 2 × 4.8 = 9.6 मीटर

अतः रेशमा और मनदीप की बीच की दुरी 9.6 है।

प्रश्नावली 10.5 (पृष्ठ संख्या 221-223)

प्रश्न 1 आकृति में, केंद्र O वाले एक वृत्त पर तीन बिंदु A, B और C इस प्रकार हैं कि ∠BOC = 30° तथा ∠AOB = 60° है। यदि चाप ABC के अतिरिक्त वृत्त पर D एक बिंदु है, रो ∠ADC ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



$\angle AOC = 2\angle ADC$

[एक चाप द्वारा वृत्त के केंद्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है]

$\angle AOB + \angle BOC = 2\angle ADC$

$\Rightarrow 60^\circ + 30^\circ = 2\angle ADC$

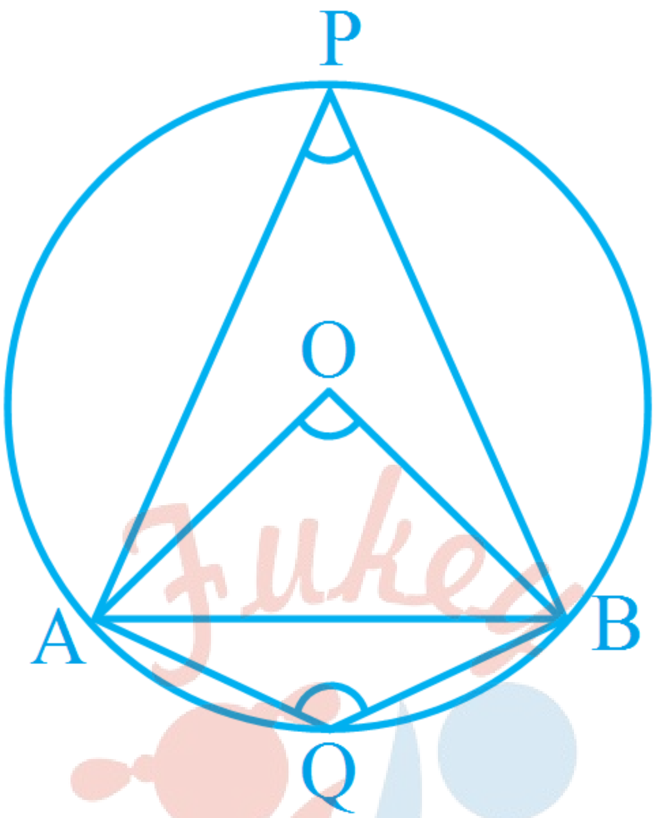
$\Rightarrow 2\angle ADC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle ADC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle ADC = 45^\circ$

प्रश्न 2 किसी वृत्त की एक जीवा वृत्त की त्रिज्या के बराबर है। जीवा द्वारा लघु चाप के किसी बिंदु पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए तथा दीर्घ चाप के किसी बिंदु पर भी अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-


P
O
A
B
Q

चाप AB त्रिज्याएँ OA तथा OB के बराबर है

इसलिए $\triangle AOB$ एक समबाहु त्रिभुज है

अत: $\angle AOB = 60^\circ$ (समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण)

अब, $\angle AOB = 2\angle APB$

(वृत्त के केंद्र पर बना कोण शेष वृत्त पर बने कोण का दुगुना होता है)

$60^\circ = \angle APC$

$\angle APB = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

अतः दीर्घ चाप में बना कोण 30° है

अब चूँकि APBQ एक चक्रीय चतुर्भुज है

इसलिए $\angle P + \angle Q = 180^\circ$

(चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग)

$\Rightarrow 30^\circ + \angle Q = 180^\circ$

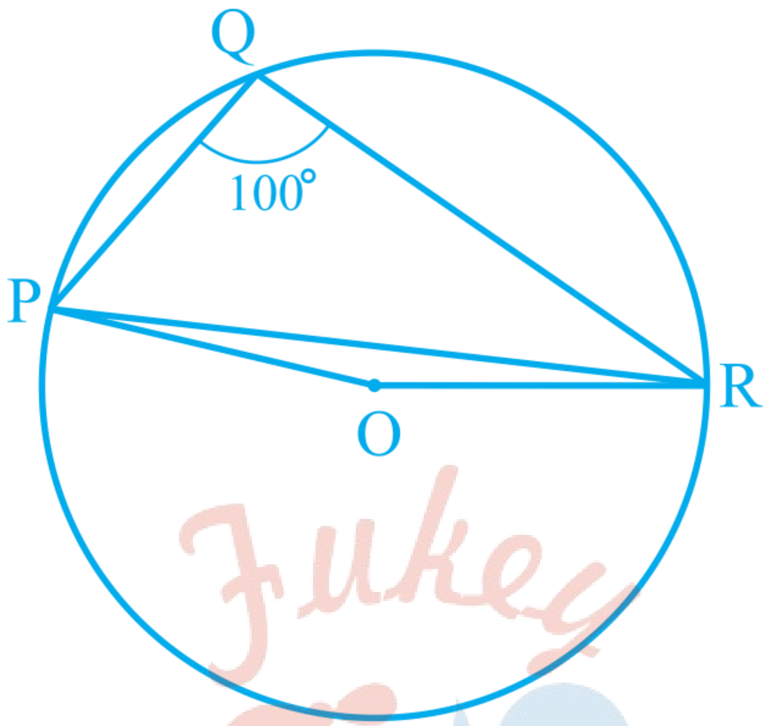
$\Rightarrow \angle Q = 180^\circ - 30^\circ$

$\Rightarrow \angle Q = 150^\circ$

अतः दीर्घ वृत्त में बना कोण 150° है।

प्रश्न 3 आकृति में, ∠PQR = 100° है, जहाँ P, Q तथा R केंद्र O वाले एक वृत्त पर स्थित बिंदु हैं। ∠OPR ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



दिया है- $\angle PQR = 100^\circ$ है

चूँकि (वृत्त के केंद्र पर बना कोण शेष वृत्त पर बने कोण का दुगुना होता है)

इसलिए $\angle OPR = 2\angle PQR$

$\angle OPR = 2 \times 100^\circ$

$\angle OPR = 200^\circ$

अब प्रतिवर्ती $\angle OPR = 360^\circ - 200^\circ$

प्रतिवर्ती $\angle OPR = 160^\circ$

$\triangle POR$ में, $PO = RO$ (एक ही वृत्त की त्रिज्या)

इसलिए $\angle OPR = \angle ORP \ldots (1)$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

अब, $\angle OPR + \angle ORP + \angle POR = 180^\circ$ (तीनों कोणों का योग)

$\angle OPR + \angle OPR + 160^\circ = 180^\circ$ समी. (1) से

$\Rightarrow 2\angle OPR = 180^\circ - 160^\circ$

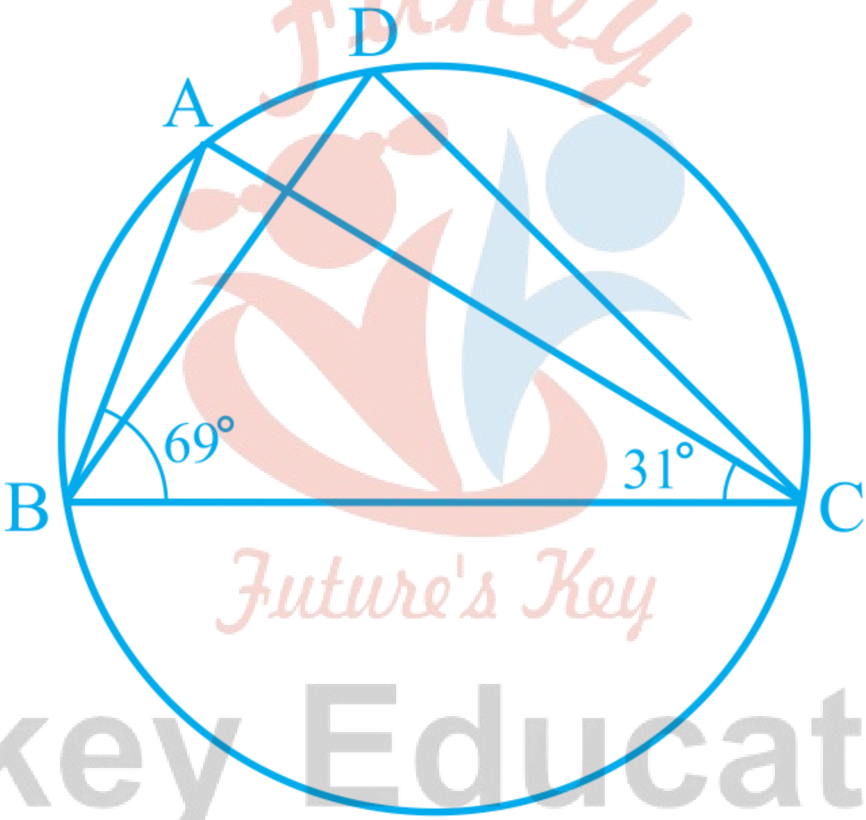
$\Rightarrow 2\angle OPR = 20^\circ$

$\Rightarrow \angle OPR = \frac{20^\circ}{2}$

$\Rightarrow \angle OPR = 10^\circ$

प्रश्न 4 आकृति में, ∠ABC = 69° और ∠ACB = 31° हो, तो ∠BDC ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



$\triangle ABC$ में,

$\angle ABC + \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ$ (त्रिभुज के तीनों का योग)

$69^\circ + 31^\circ + \angle BAC = 180^\circ$

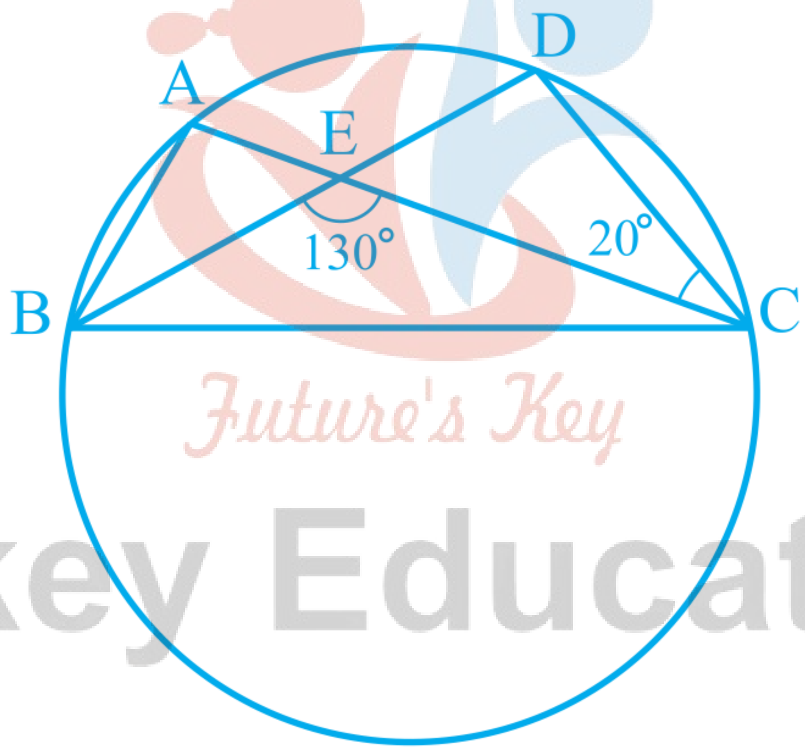
$100^\circ + \angle BAC = 180^\circ$

$\angle BAC = 180^\circ - 100^\circ$

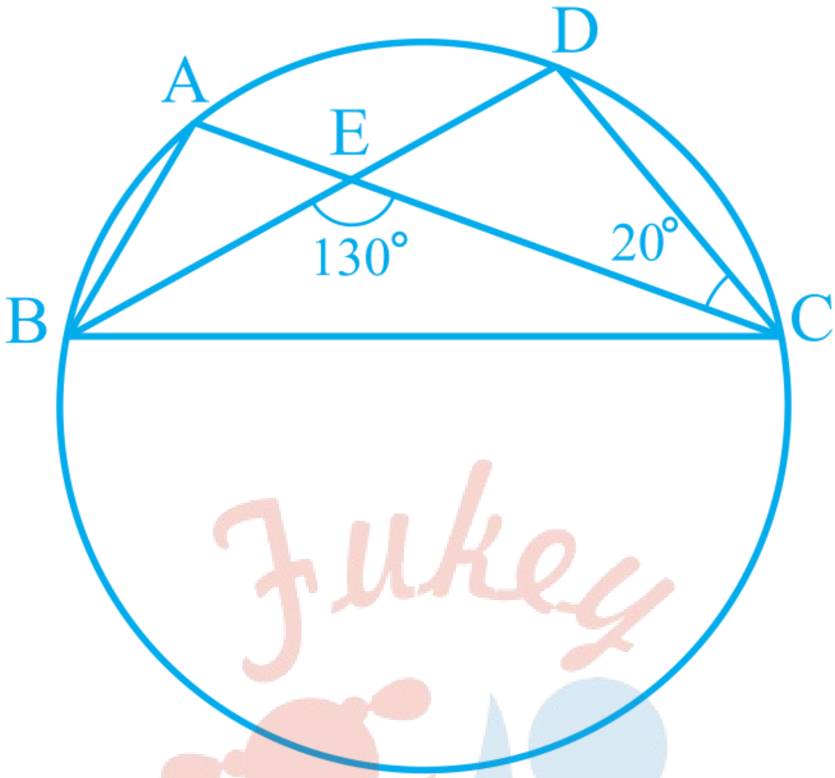
$\angle BAC = 80^\circ$ अब चूँकि $\angle BAC = \angle BDC$

इसलिए, $\angle BDC = 80^\circ$

प्रश्न 5 आकृति में, एक वृत्त पर A, B, C और D चार बिंदु हैं। AC और BD एक बिंदु E पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि ∠BEC = 130° तथा ∠ECD = 20° है। ∠BAC ज्ञात कीजिए।



उत्तर-



BED एक सरल रेखा है

इसलिए, $\angle BAC + \angle CED + 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

$130^\circ + \angle CED = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle CED = 180^\circ - 130^\circ$

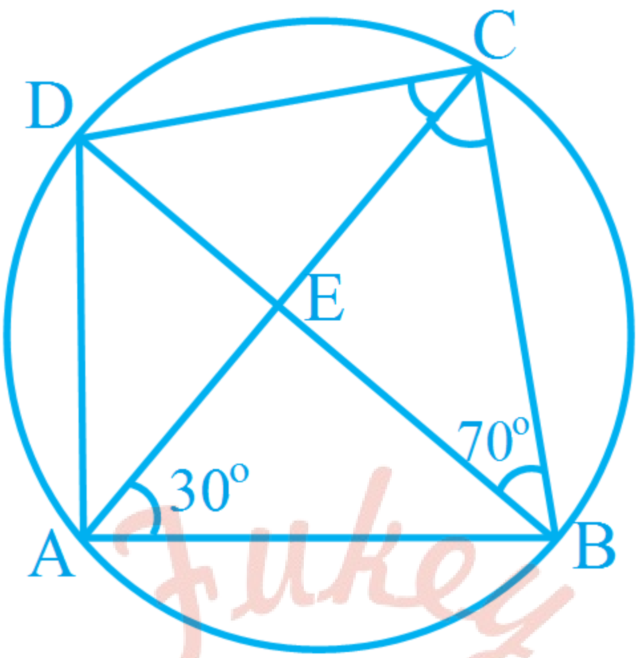
$\angle CED = 50^\circ$

$\angle BAC = \angle CED$ [क्योंकि एक ही वृत्त खंड में बने कोण बराबर होते हैं]

इसलिए $\angle BAC = 50^\circ$

प्रश्न 6 ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण एक बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि ∠DBC = 70° और ∠BAC = 30° हो, तो ∠BCD ज्ञात कीजिए। पुनः यदि AB = BC हो, तो ∠ECD ज्ञात कीजिए

उत्तर-



दिया है कि $\angle DBC = 70^\circ$ और $\angle BAC = 80^\circ$ है

अब, $\angle BAC = \angle BDC$ [एक ही वृत्त खंड में बने कोण बराबर होते हैं]

इसलिए, $\angle BDC = 30^\circ \ldots (1)$

अब DBCD में,

$\angle BDC = 30^\circ, \angle DBC = 70^\circ$ और $\angle BCD = ?$

अब $\angle BDC = \angle DBC + \angle BCD = 180^\circ$ [त्रिभुज के तीनों कोणों का योग]

$= 30^\circ + 70^\circ = 100^\circ$ समी. (1) से

$100^\circ + \angle BCD = 180^\circ$

$\angle BCD = 180^\circ - 100^\circ$

$\angle BCD = 80^\circ$

अब, AB = BC दिया है

इसलिए, $\angle BAC = \angle BCA \ldots (2)$ [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

अब चूँकि $\angle BAC = 30^\circ$ है

इसलिए $\angle BCA = 30^\circ$ समी॰ (2) से

$\angle ECB = 30^\circ$

चूँकि $\angle BCD = 80^\circ$ है

$\angle ECB + \angle ECD = 80^\circ$

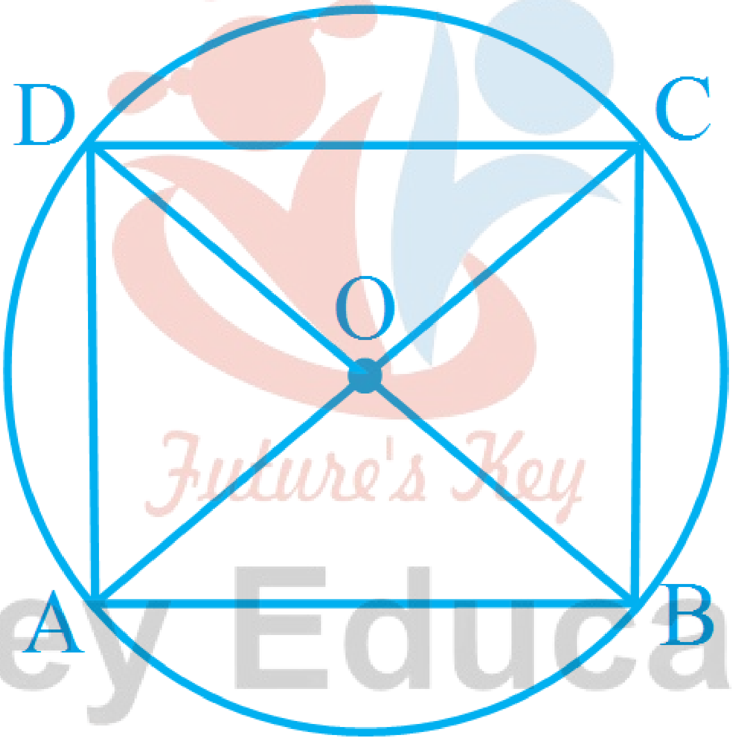
$30^\circ + \angle ECD = 80^\circ$

$\angle ECD = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$

अत: $\angle ECD = 50^\circ$ और $\angle BCD = 80^\circ$ है।

प्रश्न 7 यदि एक चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण उसके शीर्षों से जाने वाले वृत्त के व्यास हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत है।

उत्तर-



दिया है- ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC तथा BD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं

सिद्ध करना है- ABCD एक आयत है

प्रमाण- $\triangle AOB$ तथा $\triangle COD$ में

OA = OC (एक ही वृत्त कि त्रिज्यायें)

OB = OD (एक ही वृत्त कि त्रिज्यायें)

$\angle AOB = \angle COD$ (शिर्षाभिमुख कोण)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle AOB \cong \triangle COD$

अत: AB = CD ...(1) (By CPCT)

और $\angle BAO = \angle DCO$ एकांतर कोण

अत: AB || CD ...(2)

समी. (1) तथा (2) से ABCD एक समांतर चतुर्भुज है ।

अब BD विकर्ण वृत्त का ब्यास है (दिया है)

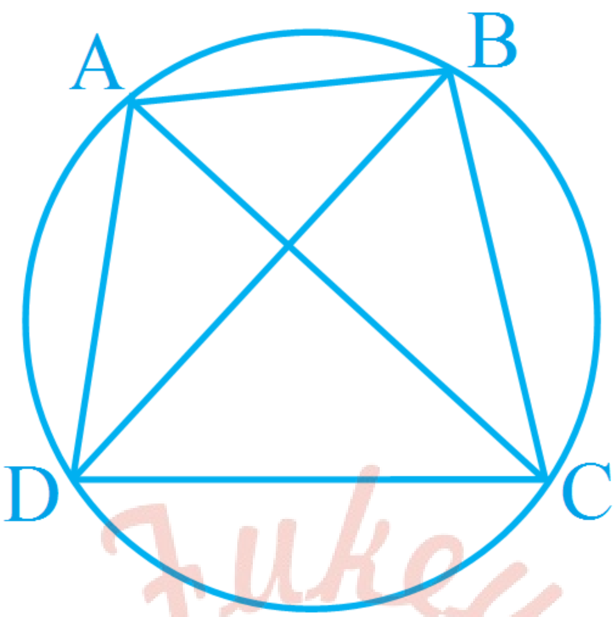
इसलिए ∠A = 90° तथा ∠C = 90° है। [अर्धवृत्त में बना कोण 90° होता है]

अत: ABCD एक आयात है

(वह समांतर चतुर्भुज जिसका एक कोण समकोण हो वह आयत कहलाता है।)

प्रश्न 8 यदि एक समलंब की असमांतर भुजाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय है।

उत्तर-



दिया है- ABCD एक समलंब है जिसमें AB || CD है और AD = BC है

सिद्ध करना है- ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है

प्रमाण- $\triangle ACD$ तथा $\triangle BDC$ में AD = BC (दिया है)

DC = DC (दिया है)

$\angle DAC = \angle CBD$ (एक ही वृत्त खंड में बने कोण)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ACD \cong \triangle BDC$

अत $\angle A = \angle C \ldots (1)$ By CPCT

अब चूँकि AB || CD दिया है

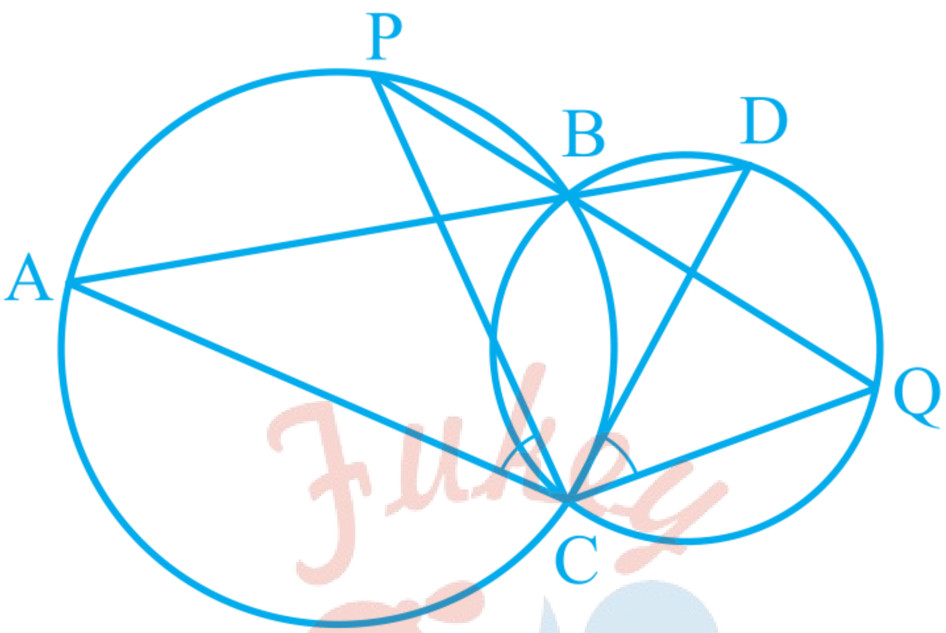
इसलिए, $\angle A + \angle D = 180^\circ$ (अत: आसन्न कोणों का योग)

$\angle A + \angle C = 180^\circ$ समी. (1)से

अत: ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

प्रश्न 9 दो वृत्त दो बिन्दुओं B और C पर प्रतिच्छेद करते हैं। B से जाने वाले दो रेखाखंड ABD और PBQ वृतों को A, D और P, Q पर क्रमश: प्रतिछेद करते हुए खींचे गए हैं। सिद्ध कीजिए कि ∠ACP = ∠QCD है।

उत्तर-



सिद्ध करना है- $\angle ACP = \angle QCD$

प्रमाण- चाप AP बने कोण $\angle ABP$ तथा $\angle ACP$ हैं

अत: $\angle ABP = \angle ACP \ldots (1)$ [एक ही वृत्त खंड में बने कोण]

अब, $\angle ABP = \angle QBD \ldots (2)$ [शिर्षाभिमुख कोण]

समीकरण (1) तथा (2) से

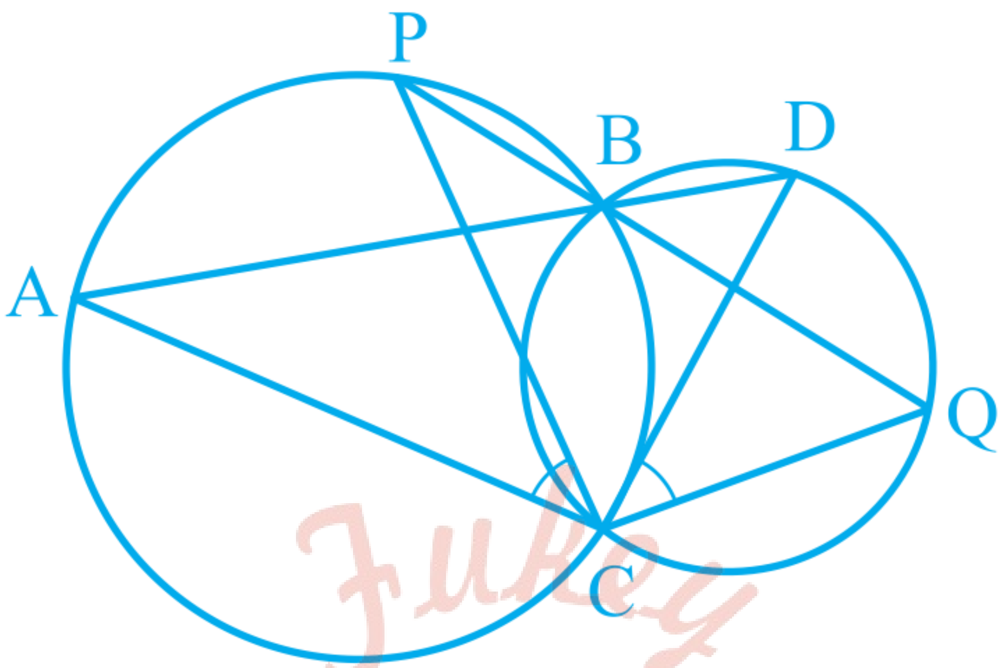
$\angle ACP = \angle QBC \ldots (3)$

पुन: $\angle PBA = \angle DBQ$ [एक ही वृत्त खंड में बने कोण]

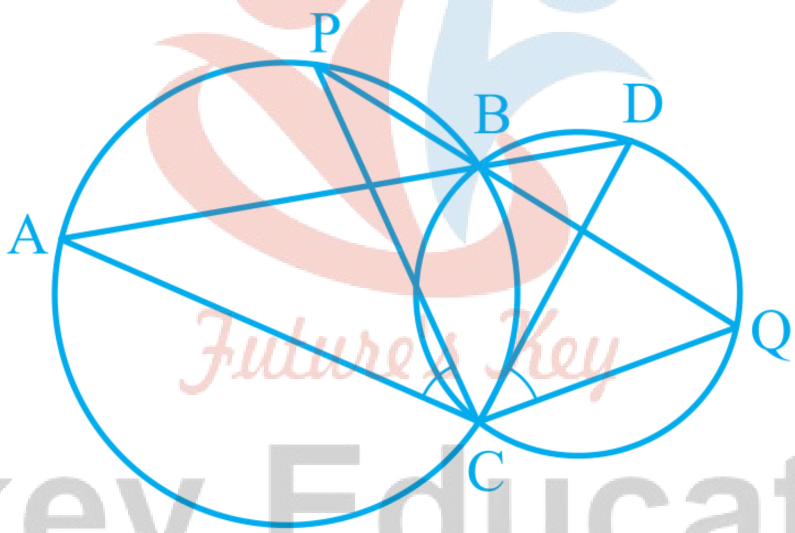
अत: समीकरण (3) तथा (4) से

$\angle ACP = \angle QCD$

प्रश्न 10 यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को व्यास मानकर वृत्त खींचे जाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि इन वृत्तों का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी भुजा पर स्थित है।



उत्तर-



दिया है- ABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजाओं AB तथा AC को व्यास मानकर O तथा O' वाले दो वृत्त खिंचा है। उभयनिष्ठ जीवा AD है।

सिद्ध करना है- बिंदु D BC पर स्थित है

प्रमाण- AB O केंद्र वाले वृत्त का व्यास है

अत: ∠ADB = 90° (अर्धवृत में बना कोण समकोण होता है)

अब, AC O’ वाले वृत्त का व्यास है ।

अत: $\angle ADC = 90°$ ...(1) (अर्धवृत में बना कोण समकोण होता है)

समीकरण (1) तथा (2) जोड़ने पर $\angle ADB + \angle ADC = 90° + 90°$

$\angle ADB + \angle ADC = 180°$ [रैखिक युग्म]

अत: BDC एक सरल रेखा है जिसपर बिंदु D स्थित है।

प्रश्न 11 उभयनिष्ठ कर्ण AC वाले दो समकोण त्रिभुज ABC और ADC हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle CAD = \angle CBD$ है।

उत्तर-

दिया है- $\triangle ABC$ और $\triangle ADC$ दो समकोण त्रिभुज हैं जिनका कर्ण AC उभयनिष्ठ है। रेखाखण्ड BD खींचा गया है।

सिद्ध करना है- $\angle CAD + \angle CBD$

रचना- AC को व्यास मानकर वृत्त खींचा।

उपपत्ति- चूँकि $\triangle ABC$ समकोण त्रिभुज है जिसका कर्ण AC है। $\angle B = 90^\circ$

पुनः $\triangle ADC$ समकोण त्रिभुज है जिसका कर्ण AC है। $\angle D = 90^\circ$

तब चतुर्भुज ABCD में, $\angle B + \angle D = 180^\circ$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं)

ABCD चक्रीय चतुर्भुज है।

बिन्दु A, B,C और D एक वृत्त पर हैं। चूँकि $\angle CAD$ और $\angle CBD$ एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं।

अतः $\angle CAD = \angle CBD$ इति सिद्धम्

प्रश्न 12 सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समान्तर चतुर्भुज एक आयत होता है।

उत्तर-

दिया है- समान्तर चतुर्भुज ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है- चतुर्भुज ABCD एक आयत है।

उपपत्ति- ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है,

$$\angle A+\angle C=180^{\circ}\ldots(1)$$

परन्तु समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

$$\angle A+\angle C\ldots(2)$$

अतः समीकरण (1) व (2) से,

$$\angle A+\angle C=90^{\circ}$$

इसी प्रकार, $\angle B+\angle D=90^{\circ}$

ABCD का प्रत्येक अन्त: कोण 90° के बराबर है।

अत: ABCD एक आयत है। इति सिद्धम्

प्रश्नावली 10.5 (पृष्ठ संख्या 223-224)

प्रश्न 1 सिद्ध कीजिए कि दो प्रतिच्छेद करते हुए वृत्तों के केन्द्रों की रेखा दोनों प्रतिच्छेद बिन्दुओं पर समान कोण अन्तरित करती है।

उत्तर-

दिया है- O_1 तथा O_2 केन्द्रों वाले दो वृत्त एक-दूसरे को दो बिन्दुओं A तथा B पर प्रतिच्छेद करते हैं।

केन्द्र रेखा O_1O_2 प्रतिच्छेद बिन्दु A पर $\angle O_1AO_2$ तथा B पर $\angle O_1BO_2$ अन्तरित करती है।

सिद्ध करना है- $\angle O_1AO_2$ तथा $\angle O_1BO_2$ समान हैं।

उपपत्ति: $\triangle O_1AO_2$ तथा $\triangle O_1BO_2$ में,

$O_1A=O_1B$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$O_2A=O_2B$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$O_1O_2=O_1O_2$ (उभयनिष्ठ)

$\triangle O_1AO_2=\triangle O_1BO_2$ (भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता से)

$\angle O_1AO_2=\angle O_1BO_2$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण)

प्रश्न 2 एक वृत्त की 5 सेमी तथा 11 सेमी लम्बी दो जीवाएँ AB और CD समान्तर हैं और केन्द्र की विपरीत दिशा में स्थित हैं। यदि AB और CD के बीच की दूरी 6 सेमी हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है- O त्रिज्या का एक वृत्त है जिसमें AB तथा CD दो समान्तर जीवाएँ केन्द्र O के विपरीत ओर स्थित हैं जिनकी लम्बाइयाँ क्रमशः 5 सेमी व 11 सेमी हैं। जीवाओं के बीच की (लाम्बिक) दूरी 6 सेमी है अर्थात् MON = 6 सेमी जबकि MON ⊥ AB व MON ⊥ CD

ज्ञात करना है- व्रत की त्रिज्या OA

गणना- जीवाओ के बिच की दुरी MN = 6 सेमी.

माना जीवा AB की केंद्र से दुरी OM = x सेमी.

$$\because \mathrm{MON} \perp \mathrm{AB}$$

$$\mathrm{AM} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}\mathrm{cm}$$

तब समीकरण $\triangle\mathrm{AOM}$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{OM}^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \mathrm{x}^2 = \frac{25}{4} + \mathrm{x}^2$$

$$\therefore \mathrm{OA}^2 = \frac{25}{4} + \mathrm{x}^2 \ldots (1)$$

$\because$ $MN = 6cm$ और OM = x सेमी.

$\therefore ON = (6 - x)cm$

$\because ON \perp CD$

$CN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 11 = \frac{11}{2}cm$

तब समीकरण $\triangle CON$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$OC^2 = CN^2 + ON^2$

$= \left(\frac{11}{2}\right)^2 + (6 - x^2)$

$OC^2 = \frac{12}{4} + (6 - x^2) \ldots (2)$

चूँकि OA और OC वृत की त्रिज्या है।

$\therefore OA = OC$

$\therefore OA^2 = OC^2$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$\therefore \frac{25}{4} + x^2 = \frac{121}{4} + (6 - x)^2$ (समीकरण (1) व (2) से)

$\therefore x^2 - (6 - x^2) = \frac{121}{4} + (6 - x)^2$

$\therefore [x + (6 - x)][x - (6 - x)] = \frac{96}{4}$

$[A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)]$

$\therefore 6[x - 6 + x] = 24$

$\therefore [x - 6 + x] = \frac{24}{6}$

$\therefore 2x - 6 = 4$

$\therefore 2x = 4 + 6 = 10$

$\therefore x = 5$

तब $OA^{=}\frac{25}{4} + (x)^2$

$= \frac{25}{4} + (5)^2\ (\because x = 5)$

$= \frac{25}{4} + 25$

$\Rightarrow OA^2 = \frac{125}{4}$

$\Rightarrow OA = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

अब वृत की त्रिज्या $= \frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm

प्रश्न 3 किसी वृत्त की दो समान्तर जीवाओं की लम्बाइयाँ 6 सेमी और 8 सेमी हैं। यदि छोटी जीवा केन्द्र से 4 सेमी की दूरी पर हो तो दूसरी जीवा केन्द्र से कितनी दूर है?

उत्तर- दिया है- O केन्द्र वाले किसी वृत्त की दो समान्तर जीवाओं AB व CD की लम्बाइयाँ क्रमशः 6 सेमी व 8 सेमी हैं। छोटी जीवा AB की केन्द्र O से दूरी OM = 4 सेमी है।

ज्ञात करना है- दूसरी जीवा CD की केन्द्र O से दूरी ON

गणना- वृत्त की त्रिज्याएँ OA तथ OD खींचीं। जीवा AB की केन्द्र O से (लाम्बिक) दूरी OM = 4 सेमी.

$OM \perp AB$ और $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3cm$ सेमी तब समकोण $\triangle OMB$ में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$OA^2 + AM^2 = OM^2$

$= (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$

$OA^2 = \sqrt{25} = 5cm$

त्रिज्या OA = 5 सेमी.

तब वृत्त की त्रिज्या OD भी 5 सेमी होगी

$\because ON \perp CD$

$\Rightarrow ND = NC$

$\Rightarrow ND = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 8 = 4cm$

तब समकोण $\triangle OND$ में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$ON^2 + ND^2 = OD^2$

$ON^2 + (4)^2 = (5)^2$

$ON^2 = (5)^2 - (4)^2 = 25 - 16 = 9$

$ON^2 = 3$

$ON = 3cm$

अत: जीवा CD केन्द्र O से 3 सेमी दूर है।

प्रश्न 4 मान लीजिए कि कोण ABC का शीर्ष एक वृत्त के बाहर स्थित है और कोण की भुजाएँ वृत्त से बराबर जीवाएँ AD और CE काटती हैं। सिद्ध कीजिए कि ∠ABC जीवाओं AC तथा DE द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोणों के अन्तर को आधा है।

उत्तर- दिया है- ∠ABC बनाने वाली भुजाएँ AB व BC एक वृत्त से जीवाएँ AD और CE काटती हैं। जीवा AC द्वारा वृत्त के केन्द्र O पर अन्तरित कोण ∠AOC है और DE द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण ∠DOE है।

सिद्ध करना है- $\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle AOC - \angle DOE)$

रचना- रेखाखण्ड AE खींचा।

उपपत्ति- हम जानते हैं कि एक चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दो गुना होता है।

$\angle AEC = \frac{1}{2}\angle AOC \ldots (1)$ तथा $\angle DAE = \frac{1}{2}\angle DOE \ldots (2)$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$\Rightarrow \angle AEC - \angle BAE = \frac{1}{2}(\angle AOC - \angle DOE)$

$\angle AEC - \angle DAE = \frac{1}{2}\angle AOC - \frac{1}{2}$

अब $\triangle ABE$ में, $\angle AEC$ बहिष्कोण है।

$\angle BAE + \angle ABE = \angle AEC$

$\angle ABE = \angle ABC - \angle BAE$

$\angle ABE = \angle ABC - \angle BAE\ (\because \angle ABE = \angle DAE) \ldots (3)$

तब समीकरण (3) व (4) से,

$\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle AOC - \angle DOE)$

अथवा $\angle ABC = -\frac{1}{2} \times$ जीवाओं AC तथा DE द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोणों का अन्तर

इति सिद्धम्

प्रश्न 5 सिद्ध कीजिए कि समचतुर्भुज की किसी भी भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त, उसके विकर्णो के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाता है।

उत्तर- दिंया है- ABCD एक समचतुर्भुज है जिसमें AC और BD दो विकर्ण हैं जो एक-दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

सिद्ध करना है- BC को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त विकर्णो के प्रतिच्छेद बिन्दु P से होकर जाता है।

उपपत्ति- ABCD एक समचतुर्भुज है और उसके विकर्ण AC तथा BD परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। $\angle CPB = 90°$

$\triangle CPB$ एक समकोण त्रिभुज है जिसका कर्ण BC है। तब समकोण $\triangle CPB$ को $\angle CPB$ अर्धवृत्त में स्थित होगा जिसका व्यास BC है।

अतः BC को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त बिन्दु P (विकर्णों का प्रतिच्छेद बिन्दु) से होकर जाएगा। इति सिद्धम्

प्रश्न 6 ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। A, B और C से जाने वाला वृत्त CD (यदि आवश्यक हो तो बढाकर) को E पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि AE = AD है।

उत्तर- दिया है- ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसके शीर्षों A, B और C से एक वृत्त खींचा गया है। जो भुजा CD को E पर काटता है।

सिद्ध करना है- AE = AD

उपपत्ति- चूँकि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, $\angle A = \angle D$

(समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।) ...(1)

चूंकि A, B, C से जाने वाला वृत्त CD को E पर काटता है,

ABCE एक चक्रीय चतुर्भुज है।

बहिष्कोण $\angle AED = \angle B$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$\angle AED = \angle D$ (= $\angle ADE$)

$\triangle ADE$ में,

$\angle AED = \angle ADE$

$\triangle ADE$ समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें

AD = AE इति सिद्धम्

प्रश्न 7 AC और BD एक वृत्त की जीवाएँ हैं जो एक-दूसरे को समद्विभाजित करती हैं। सिद्ध कीजिए।

i. AC और BD व्यास हैं।
ii. ABCD एक आयत है।

उत्तर- दिया है- AC तथा BD एक वृत्त की जीवाएँ हैं जो एक-दूसरे को, बिन्दु O पर समद्विभाजित करती हैं।

सिद्ध करना है- AC तथा, BD वृत्त के व्यास हैं।

ABCD एक आयत है।

रचना- AB, BC, CD तथा DA को मिलाया।

उपपत्ति- जीवा AC और BD एक-दूसरे को बिन्दु O पर समद्विभाजित करती हैं।

OA = OB = OC = OD

तब OA, OB, OC और OD एक ऐसे वृत्त की त्रिज्याएँ हैं जिसका केन्द्र O है।

तब, AC = OA + OC = त्रिज्या + त्रिज्या = 2 × त्रिज्या

AC वृत्त का व्यास है।

BD भी O से होकर जाती है, तब BD भी वृत्त का व्यास है।

चूंकि AC व्यास है, तब $\angle B = 90°$ तथा $\angle D = 90°$

और BD व्यास है, तब $\angle A = 90°$ तथा $\angle C = 90°$

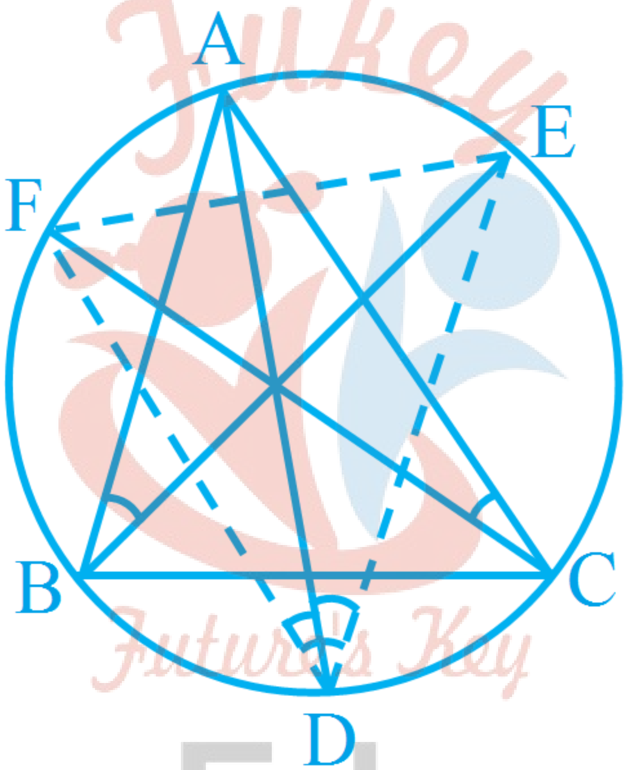
तब, ABCD एक ऐसा चतुर्भुज है जिसका प्रत्येक अन्त: कोण 90° है तथा विकर्ण एक-दूसरे को अर्धित करते हैं।

अत: ABCD एक आयत है। इति सिद्धम्

प्रश्न 8 त्रिभुज ABC के कोणों A, B और C के समद्विभाजक उसके परिवृत्त को क्रमशः बिन्दुओं D, E और F पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

सिद्ध कीजिए कि $\triangle DEF$ के कोण क्रमशः $90^\circ - \frac{A}{2}, 90^\circ - \frac{B}{2}$ और $90^\circ - \frac{C}{2}$ है।

उत्तर-



दिया है- $\triangle ABC$ के कोणों A, B और C के समद्विभाजक AD, BE व CF त्रिभुज के परिवृत्त को क्रमशः बिन्दुओं D, E व F पर काटते हैं। बिन्दुओं D, E व F से त्रिभुज DEF बनाया गया है।

सिद्ध करना है $\triangle DEF$ में $\angle D = 90^\circ - \frac{A}{2}. \angle E = 90^\circ - \frac{B}{2}$

और $\angle F = 90^\circ - \frac{C}{2}$

उपपत्ति- चूँकि $\angle ADE$ और $\angle ABE$ एक ही चाप AE द्वारा बने है।

$\therefore \angle ADE = \angle ABE$

$\therefore \frac{1}{2}\angle D = \frac{1}{2}\angle B \ldots (1)$

इस प्रकार $\angle ADF$ और $\angle ADF$ एक ही चाप AF द्वारा बने है।

$\therefore \angle ADF = \angle ABF$

$\therefore \frac{1}{2}\angle D = \frac{1}{2}\angle C \ldots (2)$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$\angle D = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$

$\angle D = \frac{1}{2}(180^\circ - A)$ क्योंकी B + C = 180° - A

अतः $\angle D = 90^\circ - \frac{A}{2}$

इस प्रकार सिद्ध किया जा सकता है की $\angle E = 90^\circ - \frac{B}{2}$ तथा $\angle F = 90^\circ - \frac{C}{2}$

अतः $\angle F = 90^\circ - \frac{C}{2}, \angle E = 90^\circ - \frac{B}{2}$ तथा $\angle F = 90^\circ - \frac{C}{2}$

प्रश्न 9 दो सर्वांगसम वृत्त परस्पर बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। A से होकर कोई रेखाखण्ड PAQ इस प्रकार खींचा गया है कि P और दोनों वृत्तों पर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि BP = BQ है।

उत्तर- दिया है- दो वृत्तों के केन्द्र O_1 व O_2 हैं और वे बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। A से एकं रेखा PAQ खींची गई है जो वृत्तों से बिन्दुओं P और Q पर मिलती है।

सिद्ध करना है- रेखाखण्ड BP = रेखाखण्ड BQ

रचना- जीवा AB तथा त्रिज्याएँ O_1A, O_1B, O_2A तथा O_2B खींचीं।

उपपत्ति- चूँकि जीवा AB दोनों वृत्तों में उभयनिष्ठ है और दोनों वृत्त सर्वांगसम हैं।

O_1 केन्द्र वाले वृत्त का चाप AB = O_2 केन्द्र वाले वृत्त का चाप AB

$\angle AO_1B = \angle AO_2B$ (सर्वांगसम वृत्तों के समान चाप केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करते हैं)

$\angle APB = \angle AQB$ (परिधि पर अन्तरित कोण) अब $\triangle QBP$ में,

$\angle APB = \angle AQB$ (ऊपर सिद्ध हुआ है)

$\angle BPQ = \angle BQP$

अतः BP = BQ (समान भुजाओं की सम्मुख भुजाएँ) इति सिद्धम्

प्रश्न 10 $\triangle ABC$ के आधार BC का लम्ब समद्विभाजक XY है। ABDC, $\triangle ABC$ का परिवृत्त है। लम्ब समद्विभाजक XY परिवृत्त को D पर काटता है। XY, BC को M पर काटता है।

उत्तर- सिद्ध करना है- $\angle A$ का समद्विभाजक भी बिन्दु D से होकर जाएगा।

रचना- DB तथा DC को मिलाया।

उपपत्ति- चूँकि XY, BC को लम्ब समद्विभाजक है और यह परिवृत्ते को बिन्दु D पर काटता है। बिन्दु D, परिवृत्त पर भी है और XY पर भी।

$\triangle BDM$ और $\triangle CDM$ में,

BM = CM (XY, BC का लम्बे समद्विभाजक है)

MD = MD (उभयनिष्ठ)

$\angle BMD = \angle CMD$ ($XY \perp BC$)

$\triangle BDM = \triangle CDM$ (भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता से)

BD = CD (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

बिन्दु D, परिवृत्त पर भी स्थित है।

परिवृत्त में, जीवा BD = जीवा CD चाप BD = चाप CD (समान चाप किसी वृत्त की समान जीवाएँ काटते हैं)

चाप BD द्वारा बिन्दु A पर अन्तरित कोण = चाप CD द्वारा बिन्दु A पर अन्तरित कोण

$\angle BAD = \angle CAD$

AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है।

अत: $\angle A$ का समद्विभाजक AD भी बिन्दु D से होकर जाता है। इति सिद्धम्