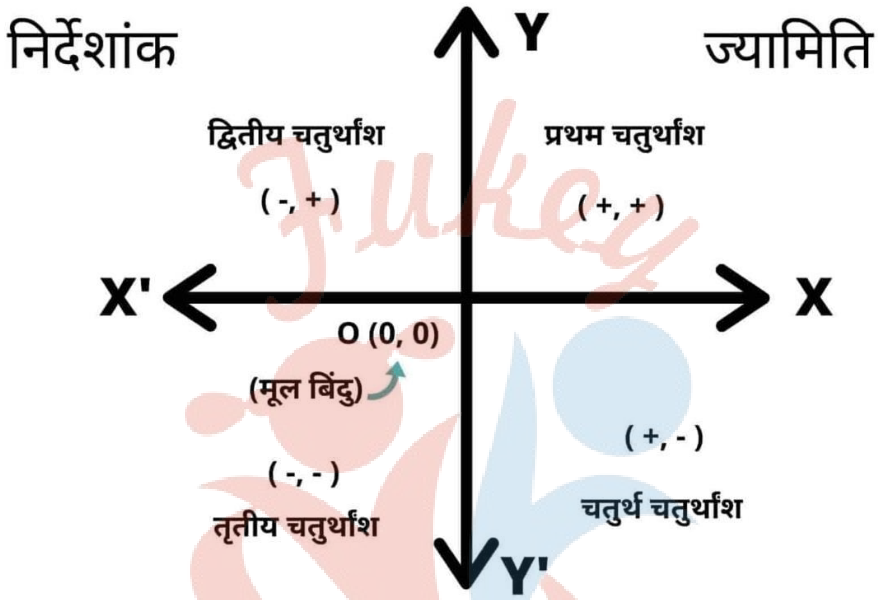
गणित

अध्याय-7: निर्देशांक ज्यामिति

निर्देशांक ज्यामिति

निर्देशांक ज्यामिति गणित की वह महत्वपूर्ण शाखा है जिसमें समतल आकृति पर बने बिन्दुओं की स्थिति को दो संख्याओं के जोड़े के रूप में परिभाषित किया जाता है. संख्याओं के जोड़ों से बने बिंदु की स्थिति को बिंदु निर्देशांक कहते हैं।



निर्देशांक ज्यामिति की परिभाषा

निर्देशांक ज्यामिति गणित की वह महत्वपूर्ण शाखा है जिसमें समतल आकृति पर बने बिन्दुओं की स्थिति को दो संख्याओं के जोड़े के रूप में परिभाषित किया जाता है. संख्याओं के जोड़ों से बने बिंदु की स्थिति को बिंदु निर्देशांक कहते हैं.

दुसरें शब्दों में, ज्यामितिय शाखाओं का वह समूह है, जहां निर्देशांक का उपयोग करके एक बिंदु की स्थिति को परिभाषित किया जाता है, वह निर्देशांक ज्यामिति कहलाता है.

Nirdeshank Jyamiti का प्रयोग किसी दो बिन्दुओं के बिच की दुरी, केंद्र से दुरी बिन्दुओं का विभाजन आदि करने के लिए किया जाता है.

निर्देशांक ज्यामिति के चतुर्थांश

- XOX’ क्षैतिज अक्ष है. इसे x अक्ष भी कहते है.
- YOY’ उर्ध्वादर अक्ष है. इसे y अक्ष भी कहते है.
- XOX’ तथा YOY’ रेखाएं एक दुसरें को O बिंदु पर लम्बवत कटती है.

  XOY तल को प्रथम चरण अथवा कोटि (Quadrant) कहते है.

  X’OY तक को द्वितीय चरण कहते है.

  X’OY’ तल को तृतीय चरण कहते है.

  XOY’ तल को चतुर्थ चरण कहते है.

चतुर्थांश का चिन्ह

- प्रथम पाद यानि चरण = (+, +)
- द्वितीय पाद = (-, +)
- तृतीय पाद = (-, –)
- चतुर्थ पाद = (+, –)

निर्देशांक ज्यामिति {Coordinate Geometry}

- XX’ अक्ष का धन भाग = (+, 0)
- XX’ का ऋण भाग = (-, 0)
- YY’ अक्ष का धन भाग = (0, +)
- YY’ अक्ष का ऋण भाग = (0, –)
- मूल बिंदु = (0, 0)

Note:

XX’ अक्ष के प्रत्येक बिंदु Y नियामक शून्य होता है।

YY’ अक्ष के प्रत्येक बिंदु पर x नियामक शून्य होता है।

मूल बिंदु पर x नियामक तथा y नियामक दोनों शून्य होते है।

- भुज (abscissa) - किसी बिंदु की y-अक्ष से दुरी को x-निर्देशांक अथवा भुज कहते हैं।

- कोटि (ordinate) - किसी बिंदु की x-अक्ष से दुरी को y-निर्देशांक अथवा कोटि कहते हैं।

- किसी बिंदु के भुज और कोटि (x, y) के रूप में होते हैं।

- दो बिंदुओं A(x1, y1) और B(x2, y2) के बीच की दुरी इस सूत्र के हल के बराबर होती है -

- किसी बिंदु A(x, y) की मूलबिन्दु से दूरी इस सूत्र के हल के बराबर होती है -

- बिंदुओं A(x1, y1) और B(x2, y2) को जोड़ने वाले रेखाखंड (line segment) को m1:m2 के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करने वाले उस बिंदु L(x, y) के निर्देशांक (coordinates) ये होते हैं -

इसे विभाजन सूत्र (split formula) कहते हैं।

- यदि कोई P रेखाखंड AB को k:1 में विभाजित करता है, तो बिंदु P के निर्देशांक निम्नलिखित होते हैं -

- दो बिंदुओं A(x1, y1) और B(x2, y2) को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्यबिंदु (mid-point) के निर्देशांक ये होते हैं -

- कार्तीय तल (cartesian plane) पर स्थित तीन बिंदुओं A(x1, y1), B(x2, y2) और C(x3, y3) से बने

दुरी सूत्र (Distance Formula)

एक बिंदु x- अक्ष और दूसरा बिंदु y- अक्ष पर स्थित किसी भी दो निर्देशांक बिंदु के बीच की दूरी ज़ात के लिए निम्न फार्मूला का प्रयोग किया जाता है. दुरी सूत्र का प्रयोग क्लास 10th और 12th में अधिक प्रयोग होता है.

दूरी सूत्र (Distance formula) = $\sqrt{[(x2-x1)^2 + (y2-y1)^2]}$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Note:

- x1 – रेखा के पहले बिंदु का x- निर्देशांक
- x2 – रेखा के दूसरे बिंदु का x- निर्देशांक
- y1 – रेखा के पहले बिंदु का y- निर्देशांक
- y2 – रेखा के दूसरे बिंदु का y- निर्देशांक

x- अक्ष पर स्थिर बिन्दुओं का निर्देशांक (x, 0) यानी y- निर्देशांक शून्य तथा y- अक्ष पर स्थिर बिन्दुओं का निर्देशांक (0, y) यानी x- निर्देशांक शून्य होता हैं और मूल बिंदु का निर्देशांक (0, 0) होता हैं.

मध्य बिंदु का सूत्र

किसी भी दो निर्देशांक बिंदु के बीच के मध्य निर्देशांक बिंदु ज़ात करने के लिए मध्य बिंदु सूत्र की प्रयोग किया जाता है.

जहाँ, A कोई बिंदु है जिसका निर्देशांक A (x1, y1) है तथा दूसरा बिंदु B, जिसका निर्देशांक B (x2, y2) है. इस स्थति में मध्य बिंदु के निर्देशांक P (x, y) होगा.

x = (x1 + x2)/2

और

y = (y1 + y2) /2

P निर्देशांक = [(x1 + x2)/2 , (y1 + y2)/2]

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

जहाँ

- x1 – रेखा के पहले बिंदु का x- निर्देशांक
- x2 – रेखा के दूसरे बिंदु का x- निर्देशांक
- y1 – रेखा के पहले बिंदु का y- निर्देशांक
- y2 – रेखा के दूसरे बिंदु का y- निर्देशांक

विभाजन सूत्र

कोई बिंदु, किसी रेखा को किसी भी अनुपात में विभाजन करता है, तो उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए निम्न फार्मूला का प्रयोग किया जाता है.

मान कि कोई रेखा A और B है, जिसमे A बिंदु के निर्देशांक A (x1, y1) और B बिंदु के निर्देशांक B (x2, y2) है, को m:n के रूप में विभाजित किया जाता है. तो इसे ज्ञात करने के लिए इस फार्मूला का प्रयोग होता है.

x = (m × x2 + n × x1) /m+n

और

y = (m × y2 + n × y1) /m+n, अर्थात

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, y = \frac{my_2 + my_1}{m+n}$$

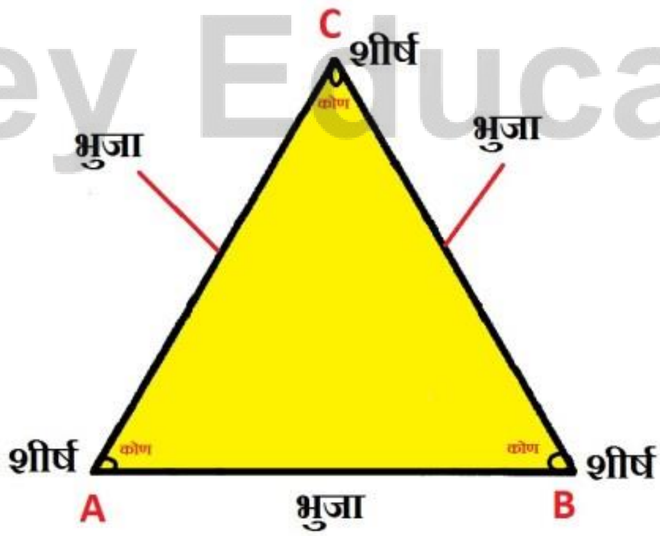
जहाँ

- x1 – रेखा के पहले बिंदु का x- निर्देशांक
- x2 – रेखा के दूसरे बिंदु का x- निर्देशांक
- y1 – रेखा के पहले बिंदु का y- निर्देशांक
- y2 – रेखा के दूसरे बिंदु का y- निर्देशांक
- m – रेखा के विभाजन के अनुपात का पहला भाग
- n – रेखा के विभाजन के अनुपात का दूसरा भाग

रेखा के विभाजन से प्राप्त बिंदु m:n के रूप का होगा.

त्रिभुज का क्षेत्रफल | Area of Triangle

आमतौर पर त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए कई अन्य फार्मूला है लेकिन Nirdeshank Jyamiti में क्षेत्रफल निकालने के लिए विशेष फार्मूला का प्रयोग किया जाता है. जो इसके बिन्दुओं पर आधारित होता है.



सामान्य फार्मूला:

- त्रिभुज का क्षेत्रफल = 1/2 × आधार × शीर्षलंब

लेकिन यदि निर्देशांक से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना हो, तो इस फार्मूला का प्रयोग होता है.

माना कि किसी त्रिभुज के तीन बिन्दुएँ A, B, और C है, जिसका निर्देशांक A (x1, y1) , B (x2, y2) और C (x3, y3) है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल

ΔABC का क्षेत्रफल = 1/2[x1(y2–y3) + x2(y3–y1) + x3(y1–y2)], अर्थात

$$\frac{1}{2}\left[x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)\right]$$

जहाँ, A (x1, y1), B (x2, y2) और C (x3, y3) त्रिभुज के निर्देशांक है.

त्रिभुज का क्षेत्रफल के लिए सूत्र -

- आपको कार्तीय तल पर स्थित कुछ बिंदु दिए गए हैं तो पहले उन्हें अंकित करो और फिर आगे हल करो।
- दिए गए बिंदुओं के बीच यदि कोई सम्बन्ध (relation) पाया जाता है, तो उस सम्बन्ध के आधार पर बिना कार्तीय तल के भी उत्तर प्राप्त करना सम्भव (possible) है।
- यदि कोई बिंदु P(x, y) दो अन्य बिंदुओं Q(x1, y1) और R(x2, y2) से समदूरस्थ (समान दुरी पर/ equidistant) हो,

निर्देशांक ज्यामिति से सम्बंधित महत्वपूर्ण तथ्य

किसी तल पर किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित करने के लिए , निर्देशांक के अक्षो के युग्म की आवश्यकता होती है. किसी बिंदु का y- अक्ष यानि y-axis से दूरी , उस बिंदु का x- निर्देशांक या भुज कहलाती है. किसी बिंदु की x- अक्ष से दूरी, उस बिंदु का y-निर्देशांक या कोटि कहलाती है.

इसी प्रकार, x- अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक (x, 0) तथा y- अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक (0, y) के रूप का होता है. उम्मीद करता हूँ की Nirdeshank Jyamiti से सम्बंधित अब कोई संदेह शेष नही होगा.

बिंदु निर्देशांक की स्थिति

किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित करने के लिए, हमें निर्देशांक अक्षों के एक युग्म की आवश्यकता होती है। किसी बिदु की y-अक्ष से दूरी उस बिदु का x-निर्देशांक या भुज कहलाता है। किसी बिदु की x-अक्ष से दूरी, उस बिदु का y-निर्देशांक या कोटि कहलाता है।

x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक (x, 0) के रूप के होते हैं तथा y-अक्ष पर स्थित किसी बिदु के निर्देशांक (0, y) के रूप के होते हैं।

निर्देशांक ज्यामिति में मूल बिंदु

निर्देशांक (0, 0), अक्ष तल को चार भागों में विभक्त कर देती है जो चतुर्थांश कहलाते हैं। अक्षों के प्रतिच्छेद बिंदु को मूलबिंदु कहते हैं। किसी बिंदु का भुज या x-निर्देशांक उसकी y-अक्ष से दूरी होती है तथा किसी बिंदु की कोटि या y-निर्देशांक उसकी x – अक्ष से दूरी होती है।

दो बिंदुओं के बीच की दूरी का सूत्र

दो बिन्दुओं P और Q के बीच की दूरी उन दो बिन्दुओं को जोड़ने वाले रेखाखण्ड की लम्बाई होती है। या $PQ = \sqrt{(x_2 - X_1)^2 + (Y_2 - y_1)^2}$ इसे दूरी सूत्र कहते हैं।

नोट:

ध्यान दें कि चूँकि दूरी सदैव ऋणेतर होती है, हम केवल धनात्मक वर्गमूल लेते हैं।

निर्देशांक ज्यामिति के उपयोग

वस्तुतः, आकृतियों की ज्यामिति का अध्ययन करने के लिए, निर्देशांक ज्यामिति एक बीजीय साधन के रूप में विकसित की गई है। यह बीजगणित का प्रयोग करके ज्यामिति का अध्ययन करने में सहायता करती है तथा बीजगणित को ज्यामिति द्वारा समझने में भी सहायक होती है। इसी कारण, निर्देशांक ज्यामिति के विभिन्न क्षेत्रों में व्यापक अनुप्रयोग हैं, जैसे भौतिकी, इंजीनियरिग, समुद्री-परिवहन (या नौ-गमन), भूकंप शास्त्र संबंधी और कला।

स्मरणीय तथ्य:

$P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ है।

बिंदु $P(x, y)$ की मूलबिंदु से दूरी $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ होती है।

विभाजन सूत्र

समतल में स्थित दो बिन्दुओं को तीसरा बिन्दु जिस अनुपात में विभाजित करता है उसे विभाजन सूत्र कहते हैं। यह विभाजन दो प्रकार का होता है अन्त: विभाजन और बाह्य विभाजन।

अन्त: विभाजन

किन्हीं दो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ पर विचार कीजिए और मान लीजिए बिंदु $P(x, y)$ रेखाखंड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करता है, अर्थात्

$PA/PB = m_1 / m_2$ है।

x-अक्ष पर AR, PS और BT लंब खींचिए। x-अक्ष के समांतर AQ और PC खींचिए। तब AA समरूपता कसौटी से,

Δ PAQ ~ Δ BPC

अतः PA/BP = AQ/PC =PQ/BC (1)

अब AQ = RS = OS – OR = $x - x_1$

PC = ST = OT – OS = $x_2 - x$

PQ = PS – QS = PS – AR = $y - y_1$

BC = BT – CT = BT – PS = $y_2 - y$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$m_1 / m_2 = (x - x_1)/ (x_2 - x) = (y - y_1)/(y_2 - y)$

$m_1 / m_2 = (x - x_1)/ (x_2 - x)$ लेने पर $x = (m_1 x_2 + m_2 x_1)/ (m_1 + m_2)$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार $m_1 / m_2 = (y - y_1)/(y_2 - y)$ लेने पर $y = (m_1 y_2 + m_2 y_1)/ (m_1 + m_2)$ प्राप्त होता है।

अतः, दो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B (x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करने वाले बिंदु P(x, y) के निर्देशांक हैं:

$\{(m_1 x_2 + m_2 x_1)/ (m_1 + m_2), (m_1 y_2 + m_2 y_1)/ (m_1 + m_2)\}$

उपरोक्त को विभाजन सूत्र कहते हैं।

विशिष्ट स्थिति

एक रेखाखंड का मध्य-बिंदु उसे 1 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

अतः, बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB के मध्य-बिंदु के निर्देशांक

$\{(1 \times x_2 + 1 \times x_1)/(1 + 1), (1 \times y_2 + 1 \times y_1)/(1 + 1)\}$

$\{(x_2 + x_1)/2, (y_2 + y_1)/2\}$ होंगे।

Example:

उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (4, – 3) और (8, 5) को जोड़ने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप से 3 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

हल

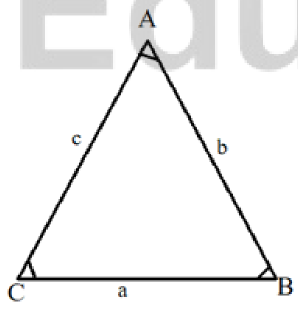
मान लीजिए P(x, y) वांछित बिंदु है। विभाजन सूत्र का प्रयोग करने पर हमें

$x = \{3(8) + 1(4)\}/(3 + 1) = 7$,

$y = \{3(5) + 1(-3)\}/(3 + 1) = 3$ प्राप्त होते हैं।

अतः (7, 3) ही वांछित बिंदु है।

त्रिभुज का क्षेत्रफल



मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है, जिसके शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ हैं। क्रमशः बिदुओं A, B और C से x-अक्ष पर लंब AP, BQ और CR खींचिए। स्पष्टतः चतुर्भुज ABQP, APRC और BQRC समलंब हैं।

Δ ABC का क्षेत्रफल = समलंब ABQP का क्षेत्रफल + समलंब APRC का क्षेत्रफल - समलंब BQRC का क्षेत्रफल

आप यह भी जानते हैं कि एक समलंब का क्षेत्रफल = ½ (समांतर भुजाओं का योग) × (उनके बीच की दूरी)

अतः Δ ABC का क्षेत्रफल = 1/2(BQ + AP) × QP + 1/2(AP + CR) × PR – 1/2(BQ + CR) × QR

$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$

$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

अतः Δ ABC का क्षेत्रफल व्यंजक = $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ का संख्यात्मक मान है।

उदाहरण

उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, -1), (- 4, 6) और (-3, -5) है।

हल

शीर्षों A(1, -1), B(- 4, 6) और C(-3, -5) वाले त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल, उपरोक्त सूत्र द्वारा निम्नलिखित है:

$= \frac{1}{2}[1(6 + 5) + (-4)(-5 + 1) + (-3)(-1 - 6)]$

$= \frac{1}{2}(11 + 16 + 21)$

$= 24$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल 24 वर्ग मात्रक है।

नोट:

क्षेत्रफल एक माप है, इसलिए यह ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

उदाहरण

k का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिदु A(2, 3), B(4, k) और C(6, -3) संरेखी हैं।

हल

चूँकि तीनों बिदु संरेखी हैं, इसलिए इनसे बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 होगा।

अर्थात्

$\frac{1}{2}$ [2(k + 3) + 4(-3 – 3) + 6(3 – k)] = 0

या $\frac{1}{2}$ (- 4k) = 0

या k = 0

अतः k का वांछित मान 0 है।

उत्तर की जांच के लिए Δ ABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ [2(0 + 3) + 4(-3 – 3) + 6(3 – 0)]

= $\frac{1}{2}$ (6 – 24 + 18)

= 0

त्रिभुज की सहायता से बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना

किसी बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हम उसे ऐसे त्रिभुजों में बाँटते हैं, जिनमें कोई क्षेत्र सार्वनिष्ठ न हो और फिर इन सभी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों को जोड़ लेते हैं।

उदाहरण

यदि A(−5, 7), B(− 4, −5), C(−1, −6) और D(4, 5) एक चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं, तो इस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल

B को D से मिलाने पर, आपको दो त्रिभुज ABD और BCD प्राप्त होते हैं।

अब त्रिभुज ABD का क्षेत्रफल = ½ [-5(-5 – 5) + (-4)(5 – 7) + 4(7 + 5)]

= ½ (50 + 8 + 48)

= 53 वर्ग मात्रक

साथ ही त्रिभुज BCD का क्षेत्रफल = ½ [-4(-6 – 5) – 1(5 + 5) + 4(-5 + 6)]

= ½ (44 – 10 + 4)

= 19 वर्ग मात्रक

अतः चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABD का क्षेत्रफल + त्रिभुज BCD का क्षेत्रफल

= 53 + 19 = 72 वर्ग मात्रक

मान लीजिए A(4, 2), B[6, 5) और C(1, 4) एक त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं।

(i) A से होकर जाने वाली मध्यिका BC से D पर मिलती है। बिंदु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ii) AD पर स्थित ऐसे बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि AP:PD = 2:1 हो।

(iii) मध्यिकाओं BE और CF पर ऐसे बिंदुओं Q और R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि BQ:QE = 2:1 हो और CR:RF = 2:1 हो।

आप क्या देखते है?

(i) A से होकर जाने वाली मध्यिका BC से D पर मिलती है। इसलिए BC का मध्य बिंदु D है।

बिंदु P के निर्देशांक = {(6+1)/2, (5+4)/2) = (7/2, 9/2)

(ii) AD पर स्थित बिंदु P इसप्रकार है कि AP:PD = 2:1 हो। बिंदु P के निर्देशांक = {(2×7/2 + 1×4)/(2 + 1), (2×9/2 + 1×2)/(2 + 1)} = (11/3, 11/3)

(iii) B से होकर जाने वाली मध्यिका AC से E पर मिलती है। इसलिए AC का मध्य बिंदु E है।

बिंदु E के निर्देशांक = {(4+1)/2, (2+4)/2} = (5/2, 3)

AE पर स्थित बिंदुए इस प्रकार है कि AQ: QE = 2:1 हो।

बिंदु Q के निर्देशांक = (2×5/2+1×6)/(2 + 1), (2×3+1×5)/(2 + 1) = (11/3, 11/3)

C से होकर जाने वाली मध्यिका AB से F पर मिलती है। इसलिए AB का मध्य बिंदु F है।

बिंदु F के निर्देशांक = (4+6)/2, (2+5)/2 = (5, 7/2)

CF पर स्थित बिंदु R इसप्रकार है कि CR: RF = 2:1 हो। बिंदु R के निर्देशांक =

{(2×5+ 1 x 1)/(2 + 1), (2×7/2 + 1×4)/(2 + 1)} = (11/3, 11/3)

(iv) P, Q और R तीनों बिंदुओं के निर्देशांक समान हैं।

स्मरणीय तथ्य

त्रिभुज ABC जिसके शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ हैं का क्षेत्रफल = ½ [$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$] का संख्यात्मक मान है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 7.1 (पृष्ठ संख्या 177-178)

प्रश्न 1 बिन्दुओं के निम्नलिखित युग्मों के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए-

(i) (2, 3), (4, 1)

(ii) (-5, 7), (-1, 3)

(iii) (a, b), (-a, -b)

उत्तर-

(i)

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2}$$

$$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(ii)

दिए गए बिंदु A (-5, 7) और B (-1, 3) हैं।

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{\{-1 - (-5)\}^2 + \{3 - 7\}^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

(iii)

दिए गए बिंदु A(a, b) और B(-a, -b) होने दें।

हम जानते हैं कि A(a, b) और B(-a, -b) दो बिंदुओं के बीच की दूरी कितनी है।

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore\ AB = \sqrt{(-a - a)^2 + (-b - b)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-2a)^2 + (-2b)^2}$$

$$= \sqrt{4a^2 + 4b^2}$$

$$= \sqrt{4(a^2 + b^2)}$$

$$= 2\sqrt{(a^2 + b^2)}$$

प्रश्न 2 बिन्दुओं (0, 0) और (36, 15) के बीच की दुरी ज्ञात कीजिए। क्या अब आप अनुच्छेद 7.2 में दिए दोनों शहरों A और B के बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं?

उत्तर- दिए गए बिंदु A(0, 0) और B(36, 15) हैं।

$$AB = \sqrt{(36-0)^2 + (15-0)^2}$$

$$= \sqrt{(36)^2 + (15)^2}$$

$$= \sqrt{1296 + 225}$$

$$= \sqrt{1521} = 39$$

हां, हम चर्चा की गई दो शहरों A और B के बीच की दूरी और यह दूरी = 39 किमी पा सकते हैं

प्रश्न 3 निर्धारित कीजिए की क्या बिन्दु (1, 5), (2, 3) और (-2,- 11) सरेंखी हैं।

उत्तर-

दिए गए बिंदु A(1, 5), B(2, 3) और C(-2, -11) हैं। फिर,

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-5)^2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (-11-5)^2}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{(-3)^2 + (-16)^2}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{9+256}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{265}$$

और $BC = \sqrt{(-2-2)^2 + (-11-3)^2}$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{(-4)^2 + (-14)^2}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{16+196}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{212}$$

यहाँ, हम देखते हैं कि $AB + BC \neq AC,\ BC + AC \neq AB$ और $AB + AC \neq BC$

प्रश्न 4 जाँच कीजिए कि क्या बिन्दु (5, -2), (6, 4) और (7, -2) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

उत्तर-

दिए गए बिंदु A(5, -2), B(6, 4) और C(7, -2) हैं। फिर,

$$AB = \sqrt{(6-5)^2 + \{4-(-2)\}^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$BC = \sqrt{(7-6)^2 + (-2-4)^2}$$

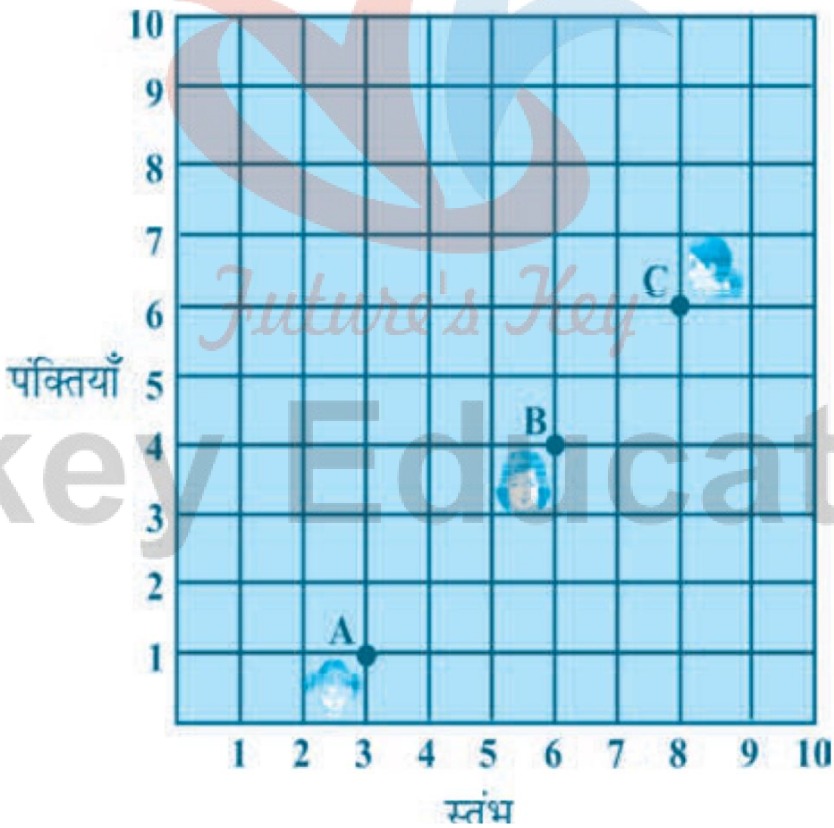
$$= \sqrt{(1)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

चूंकि AB = BC

इसलिए, ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्न 5 किसी कक्षा में चार मित्र बिन्दुओं A, B, C और D पर बैठे हुए हैं, जैसा कि में दर्शाया गया है। चंपा और चमेली कक्षा के अन्दर आती हैं और कुछ मिनट तक देखने तक के बाद, चंपा चमेली से पूछती है, 'क्या तुम नहीं सोचती हो कि ABCD एक वर्ग है?' चमेली इससे सहमत नहीं है। दूरी सूत्र का प्रयोग करके, बताइए कि इनमें कौन सही है।



उत्तर-

A(3, 4), B(6, 7), C(9, 4) और D(6, 1) को दिए गए बिंदु होने चाहिए। फिर,

अब $AB = \sqrt{(6-3)^2 + (7-4)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(9-6)^2 + (4-7)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(9-6)^2 + (4-7)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(6-9)^2 + (1-4)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$DA = \sqrt{(3-6)^2 + (4-1)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$AC = \sqrt{(9-3)^2 + (4-4)^2} = 6$$

$$BD = \sqrt{(6-6)^2 + (1-7)^2} = 6$$

हम देखते है कि,

AB = BC = DA = DA

और AC = BD

इसलिए, ABCD एक वर्ग है।

इसलिए, चम्पा सही है।

प्रश्न 6 निम्नलिखित बिन्दुओं द्वारा बनने वाले चर्तुभुज का प्रकार (यदि कोई है तो) बताइए तथा अपने उत्तर के लिए करण भी दीजिए-

(i) (-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)

(ii) (-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

उत्तर-

(i) (-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)

माना बिन्दुएँ A(-1, -2), B(1, 0), C(-1, 2), तथा D(-3, 0) हैं।

∴ दुरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{[1 - (-1)]^2 + [0 - (-2)]^2}$$

$$AB = \sqrt{(1 + 1)^2 + (0 + 2)^2}$$

$$AB = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$$

$$AB = \sqrt{4 + 4}$$

$$AB = \sqrt{8}$$

$$AB = 2\sqrt{2}$$

इसी प्रकार,

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$BC = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - 0)^2}$$

$$BC = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$$

$$BC = \sqrt{4 + 4}$$

$$BC = \sqrt{8}$$

$$BC = 2\sqrt{2}$$

$$CD = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$$

$$CD = \sqrt{[-3 - (-1)]^2 + (0 - 2)^2}$$

$$CD = \sqrt{(-3+1)^2 + (-2)^2}$$

$$CD = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2}$$

$$CD = \sqrt{4+4}$$

$$CD = \sqrt{8}$$

$$CD = 2\sqrt{2}$$

$$AD = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}$$

$$AD = \sqrt{[-3-(-1)]^2 + [0-(-2)]^2}$$

$$AD = \sqrt{(-3+1)^2 + (2)^2}$$

$$AD = \sqrt{4+4}$$

$$AD = \sqrt{8}$$

$$AD = 2\sqrt{2}$$

बिन्दुएँ A(-1, -2), B(1, 0), C(-1, 2), तथा D(-3, 0)बनने वाला चर्तुभुज वर्ग हैं। क्योंकि इन बिन्दुओं बनने वाले चर्तुभुज की भुजा बराबर है अर्थात AB = BC = CD = AD हैं।

(ii) (-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)

माना बिन्दुएँ A(-3, 5), B(3, 1), C(0, 3), तथा D(-1, -4) हैं।

∴ दुरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (1 + 5)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-6)^2 + (6)^2}$$

$$AB = \sqrt{36 + 36}$$

$$AB = \sqrt{72}$$

$$AB = 6\sqrt{2}$$

इसी प्रकार दुरी सूत्र से,

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$BC = \sqrt{(0 - 3)^2 + (3 - 1)^2}$$

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2}$$

$$BC = \sqrt{9 + 4}$$

$$BC = \sqrt{13}$$

$$CD = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$$

$$CD = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (-4 - 3)^2}$$

$$CD = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}$$

$$CD = \sqrt{1+14}$$

$$CD = \sqrt{15}$$

$$AD = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}$$

$$AD = \sqrt{[-3-(-1)]^2 + (-4-5)^2}$$

$$AD = \sqrt{(-3+1)^2 + (-7)^2}$$

$$AD = \sqrt{(-2)^2 + 14}$$

$$AD = \sqrt{4+14}$$

$$AD = \sqrt{18}$$

बिन्दु A(-3, 5), B(3, 1), C(0, 3), तथा D(-1, -4) से बनने वाला चर्तुभुज एक विषमबाहु चर्तुभुज हैं। क्योंकि इन बिन्दुओं से बनने वाले चर्तुभुज की भुजा बराबर नहीं है और किसी भी चर्तुभुज के गुण के सामान नहीं है।

अर्थात, $AB \neq BC \neq CD \neq AD$ या $6\sqrt{2} \neq \sqrt{13} \neq \sqrt{15} \neq 3\sqrt{2}$ है।

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

माना बिन्दुएँ A(4, 5), B(7, 6), C(4, 3), तथा D(1, 2) हैं।

∴ दुरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(7-4)^2(6-5)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3)^2 + (1)^2}$$

$$AB = \sqrt{9+1}$$

$$AB = \sqrt{10}$$

इसी प्रकार,

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$BC = \sqrt{(4-7)^2 + (3-6)^2}$$

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$$

$$BC = \sqrt{9+9}$$

$$BC = \sqrt{18}$$

$$BC = 3\sqrt{2}$$

$$CD = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$$

$$CD = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 3)^2}$$

$$CD = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$$

$$CD = \sqrt{9 + 1}$$

$$CD = \sqrt{10}$$

$$AD = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2}$$

$$AD = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 5)^2}$$

$$AD = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$$

$$AD = \sqrt{9 + 9}$$

$$AD = \sqrt{18}$$

$$AD = 3\sqrt{2}$$

बिन्दु A(4, 5), B(7, 6), C(4, 3), तथा D(1, 2) से बनने वाला चर्तुभुज आयात तथा समांतर चर्तुभुज हैं। क्योंकि इन बिन्दुओं से बनने वाले चर्तुभुज की दो भुजाओं के युग्म बराबर है।

अर्थात, $AB = CD = \sqrt{10}$ तथा $BC = AD = 3\sqrt{2}$ हैं।

प्रश्न 7 x-अक्ष मान पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो (2, -5) और (-2, 9) से समदूरस्थ हैं।

उत्तर- माना A(2, -5), B(-2, 9), तथा X-अक्ष पर बिंदु P(x, 0), हैं।

अत: $AP^2 = BP^2$ (चूँकि A तथा B बिंदु P से समदूरस्थ है)

$$\left[\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right]^2 = \left[\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}\right]^2$$

$$\Rightarrow (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2$$

$$\Rightarrow (2-x)^2+(-5-0)^2 = (-2-x)^2+(9-0)^2$$

$$\Rightarrow (2)^2-2\times 2\times x+(x)^2+(-5)^2 = (-2)^2-2\times -2\times x+(x)^2+(9)^2$$

$$\Rightarrow 4-4x+x^2+25 = 4+4x+x^2+81$$

$$\Rightarrow x^2-4x+29 = x^2+4x+85$$

$$\Rightarrow x^2-x^2-85+29 = 4x+4x$$

$$\Rightarrow -56 = 8x$$

$$\Rightarrow x = \frac{-56}{8}$$

$$\Rightarrow x = -7$$

अत: X-अक्ष पर बिंदु P (-7, 0) है।

प्रश्न 8 y का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए बिन्दु P(2, -3) और Q(10, y) के बीच की दुरी 10 मात्रक है।

उत्तर- बिंदु P(2, -3) और Q(10, y) हैं तथा दोनों बिन्दुओं का मात्रक 10 हैं।

∴ दुरी सूत्र से,

$$PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$\Rightarrow 10^2 = (10 - 2)^2 + (y + 3)^2$

$\Rightarrow 100 = 8^2 + y^2 + 6y + 9$

$\Rightarrow 100 = 64 + y^2 + 6y + 9$

$\Rightarrow 100 = 73 + y^2 + 6y$

$\Rightarrow 100 - 73 = y^2 + 6y$

$\Rightarrow y^2 + 6y = 27$

$\Rightarrow y^2 + 6y - 27 = 0$

$\Rightarrow y^2 + 9y - 3y - 27 = 0$

$\Rightarrow y(y + 9) - 3(y + 9) = 0$

$\Rightarrow (y + 9)(y - 3) = 0$

$\Rightarrow y + 9 = 0$ तथा $y - 3 = 0$

अत: $y = -9$ तथा $y = 3$

अतः y का एक मान 3 तथा -9 हैं।

प्रश्न 9 यदि Q(0, 1) बिन्दुओं P(5, -3) और R(x, 6) से समदूरस्थ है, तो x के मान ज्ञात कीजिए। दुरियाँ QR और PR भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

बिन्दु Q(0, 1), P(5, -3) और R(x, 6)से समदूरस्थ हैं।

$$PQ = \left[\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right]^2$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$= (5 - 0)^2 + (-3 - 1)^2$$

$$= 5^2 + (-4)^2$$

$$= 25 + 16$$

$$= 41 \ldots (i)$$

$$QR = \left[\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right]^2$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$$QR^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$= (x - 0)^2 + (6 - 1)^2$$

$$= x^2 + 5^2$$

$$= x^2 + 25 \ldots (ii)$$

चुंकि PQ तथा QR की लम्बाई समान है।

अतः $41 = x^2 + 25$

$$x^2 = 41 - 25$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

अर्थात x = 4 तथा x = -4

अतः x का एक मान 4 तथा -4 है।

∴ दुरी सूत्र से,

Q(0, 1) और R(4, 6) के लिए,

$$QR = \left[\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right]^2$$

$$QR = \sqrt{(4-0)^2 + (6-1)^2}$$

$$QR = \sqrt{16 + 25}$$

$$QR = \sqrt{41}$$

Q(0, 1) और R(-4, 6) के लिए,

$$QR = \sqrt{(-4-0)^2 + (6-1)^2}$$

$$QR = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

PR की लम्बाई,

P(5, -3) और R(4, 6)

$$PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$PR = \sqrt{(4 - 5)^2 + (6 + 3)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (9)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 81}$$

$$= \sqrt{82}$$

P(5, -3) और R(-4, 6)

$$PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$PR = \sqrt{(-4 - 5)^2 + (6 + 3)^2}$$

$$= \sqrt{(-9)^2 + (9)^2}$$

$$= \sqrt{81 + 81}$$

$$= 9\sqrt{2}$$

$QR = \sqrt{41}$ और $PR = \sqrt{82}$ और $9\sqrt{2}$ है।

प्रश्न 10 x और y में एक ऐसा संबध ज्ञात कीजिए कि बिन्दु (x, y) बिन्दुओं (3, 6) और (-3, 4) से समदूरस्थ हो।

उत्तर- माना बिदुएँ P(x, y) तथा A(3, 6) और B(-3, 4)

AP तथा BP समदूरस्थ हैं।

इसलिए, AP = BP

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$AP^2 = BP^2$

$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = (x + 3)^2 + (y - 4)^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$

$\Rightarrow -6x - 12y + 36 = 6x - 8y + 16$

$\Rightarrow 36 - 16 = 6x + 6x - 8y + 12y$

$\Rightarrow 20 = 12x + 4y$

$\Rightarrow 12x + 4y = 20$

$\Rightarrow 4(3x + y) = 20$

$\Rightarrow 3x + y = 5$

$\Rightarrow 3x + y = 5$

$\Rightarrow 3x + y - 5 = 0$

प्रश्नावली 7.2 (पृष्ठ संख्या 183-184)

प्रश्न 1 उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं (-1, 7) और (4, -3) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है।

उत्तर- माना वांछित बिन्दु P(x, y) है।

यहाँ रेखाखण्ड के अन्तः बिन्दु है (-1, 7) और (4, -3)

चूंकि अनुपात = $2 : 3 = m_1 : m_2$

$$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{(2\times4)+3\times(-1)}{2+3} = \frac{8-3}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

और $y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$

$$= \frac{2\times(-3)+(3\times7)}{2+3} = \frac{-6+21}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

इस प्रकार अभीष्ठ बिन्दु (1, 3) है।

प्रश्न 2 बिन्दुओं (4, -1) और (-2, -3) को जोड़ने वाले रेखाखंड को सम त्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

माना दिए गये बिन्दु हैं, A(4, -1) और B(-2, -3)

माना रेखाखण्ड AB को बिन्दु P और Q समत्रिभाजित करते हैं।

अर्थात् AP = PQ = QB

बिन्दु P रेखाखण्ड AB को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है। इसी प्रकार बिन्दु Q रेखाखण्ड AB को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

माना बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं।

$$\therefore \ x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$$

$$x = \frac{1(-2)+2(4)}{1+2} = \frac{-2+8}{3} = 2$$

$$y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

$$y = \frac{1(-3)+2\times(-1)}{1+2} = \frac{-3-2}{3} = \frac{-5}{3}$$

$\therefore$ बिन्दु P के अभीष्ठ निर्देशांक है, $\left(2, -\frac{5}{3}\right)$ माना Q के निर्देशांक (X, Y) हैं।

$$\therefore \ X = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$$

$$X = \frac{2(-2)+1(4)}{2+1} = \frac{-4+4}{3} = 0$$

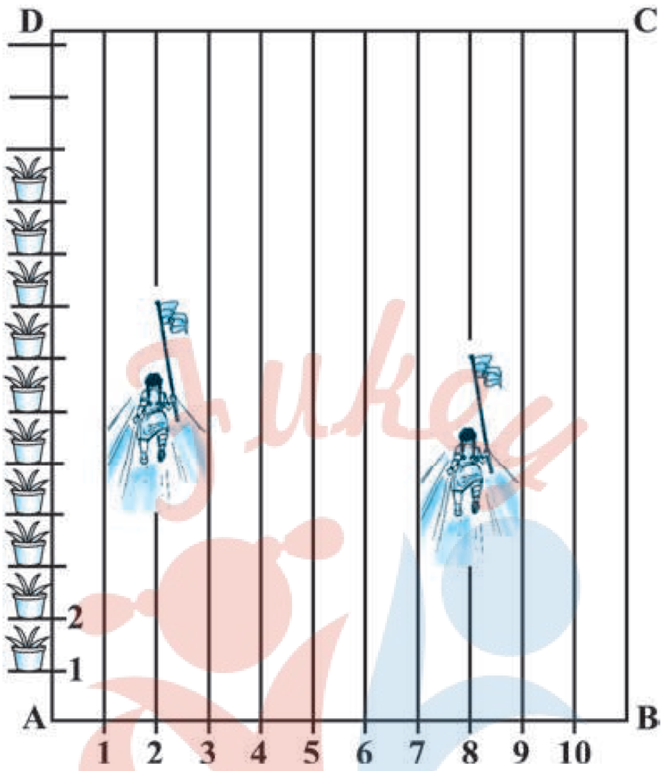
$$Y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

$$y = \frac{2(-3)+1(-1)}{2+1} = \frac{-6+(-1)}{3} = \frac{-7}{3}$$

इस प्रकार, Q के निर्देशांक हैं $\left(0, \frac{-7}{3}\right)$

प्रश्न 3 आपके स्कूल में खेल-कूद क्रियाकलाप आयोजित करने के लिए, एक आयताकार मैदान ABCD में, चुने से परस्पर 1m की दुरी पर पंक्तियाँ बनाई गई हैं। AD के अनुदिश परस्पर 1m की दुरी पर 100 गमले रखे हैं, जैसा कि में दर्शाया गया है। निहारिका दूसरी पंक्ति में AD के $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक हरा झंडा गाड़ देती है। प्रीत आठवीं पंक्ति में AD के $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर की दूरी दौडती है और वहाँ एक लाल झंडा गाड देती है दोनों झंडों के बीच की दूरी क्या

है? यदि रश्मि को एक नीला झंडा इन दोनों झंडों को मिलाने वाले रेखाखंड पर ठीक आधी दूरी (बीच में) पर गाड़ना हो तो उसे अपना झंडा कहाँ गाड़ना चाहिए?



उत्तर-

AB और AD क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष हैं।

अब, हरे-झंडे की स्थिति $\left(2, \frac{100}{4}\right)$ या (2, 25) हैं।

और लाल रंग के झंडे की स्थिति है, $\left(8, \frac{100}{5}\right)$ या (8, 20)

दोनों झंडों के बीच की दूरी $= \sqrt{(8-2)^2 + (20-25)^2}$

$$= \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}$$

माना झंडों को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्यबिन्दु M(x, y) हैं।

$$\therefore\ x = \frac{2+8}{2} \text{ और } y = \frac{25+20}{2}$$

$$x = 5 \text{ और } y = (22.5)$$

अतः नीला झण्डा 5 वी लाइन पर AB के ऊपर 22.5m की दुरी पर गाड़ना चाहिए।

प्रश्न 4 बिन्दुओं (-3, 10) और (6, -8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को बिन्दु (-1, 6) किस अनुपात में विभाजित करता है।

उत्तर- माना दिए गए बिन्दुओ के निर्देशांक हैं, A(3, 10) और B(6, -8)

माना बिन्दु P(-1, 6) रेखाखण्ड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है।

∴ विभाजन सूत्र से हमे प्राप्त होता है,

$$(-1, 6) = \left(\frac{x_2m_1+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$\Rightarrow (-1, 6) = \left(\frac{(m_1\times 6)+[m_2\times(-3)]}{m_1+m_2}, \frac{[m_1-(-8)]+(m_2\times 10)}{m_1+m_2}\right)$$

$$\Rightarrow (-1, 6) = \frac{6m_1+(-3m_2)}{m_1+m_2}, \frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{6m_1-3m-2}{m_1+m_2} \text{ और } 6 = \frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow -1(m_1+m_2) = 6m_1 - 3m_2 \text{ और } 6(m_1+m_2) = -8m_1 + 10m_2$$

$$\Rightarrow -m_1 - m_2 - 6m_1 + 3m_2 = 0 \text{ और } 6m_1 + 6m_2 + 8m_1 - 10m_2 = 0$$

$$\Rightarrow -7m_1 + 2m_2 = 0 \text{ और } 14m_1 - 4m_2 = 0 \text{ या } 7m_1 - 2m_2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m_2 = 7m_1 \text{ और } 7m_1 = 2m_2$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7} \text{ और } \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow m_1 : m_2 = 2 : 7 \text{ और } m_1 : m_2 = 2 : 7$$

इस प्रकार अभीष्ट अनुपात 2 : 7 है।

प्रश्न 5 वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं A(1, -5) और B(-4, 5) को मिलाने वाला रेखाखंड x- अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिए गए बिंदु A(1, -5) और B(-4, 5) है।

माना बिन्दु P(x, y), AB को k : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

भाग-I: अनुपात ज्ञात करना,

चुंकि बिन्दु P, x-अक्ष पर स्थित है।

∴ y-निर्देशांक 0 है।

$$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2} \text{ और } 0 = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k(-4)+1(1)}{k+1} \text{ और } 0 = \frac{k(5)+1(-5)}{k+1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4k+1}{k+1} \text{ और } 0 = \frac{5k-5}{k+1}$$

$$\Rightarrow x(k+1) = -4k + 1 \text{ और } 5k - 5 = 0 \Rightarrow k = 1$$

भाग-II: निर्देशांक ज्ञात करना,

$$\Rightarrow x(k+1) = -4k + 1$$

$$\Rightarrow x(1+1) = -4 + 1 \ [\because \ k = 1]$$

$$\Rightarrow 2x = -3$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

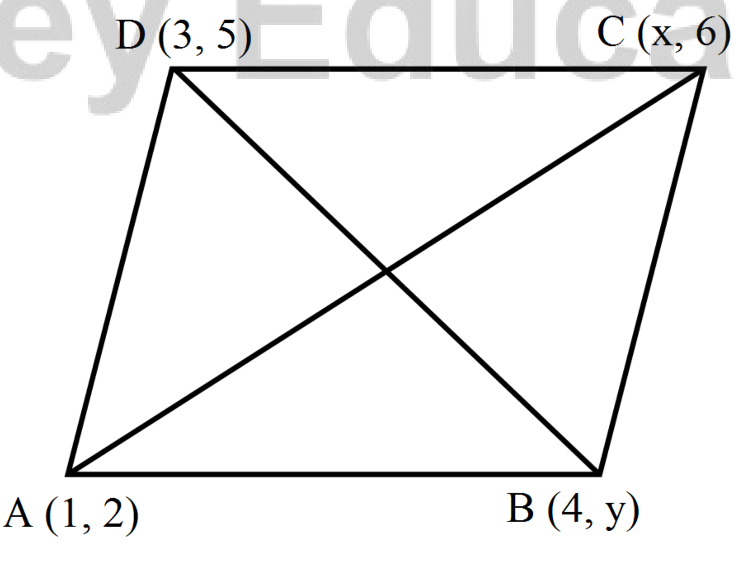
$\therefore$ अभीष्ट अनुपात k : 1 = 1 : 1, अभीष्ट निर्देशांक

$$P(x, 0) = P\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$$

प्रश्न 6 यदि बिन्दु (1, 2), (4, y), (x, 6) और (3, 5), इसी क्रम में लेने पर, एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हो तो x और y ज्ञात कीजिए।

उत्तर- हमें समान्तर चतुर्भुज प्राप्त है, जिसके शीर्ष है।

A(1, 2), B(4, y), C(x, 6) और D(3, 5)



चूँकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बिन्दु P पर संदिवभाग करते है।

∴ P के निर्देशांक हैं,

$$X = \frac{x+1}{2} = \frac{3+4}{2}$$

$$\Rightarrow x + 1 = 7$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$Y = \frac{5+y}{2} = \frac{6+2}{2}$$

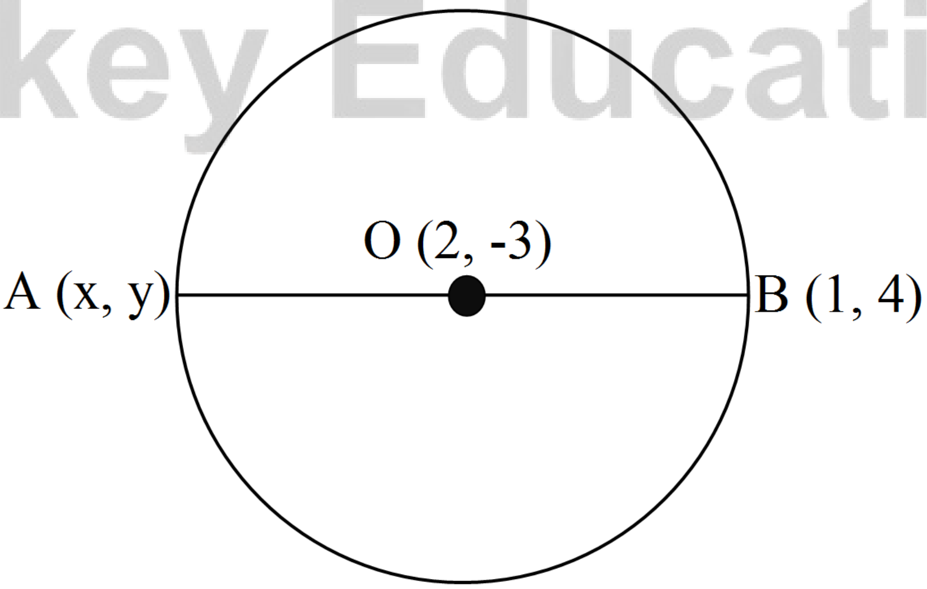
$$\Rightarrow 5 + y = 8$$

$\Rightarrow y = 3$ इस प्रकार x और y के अभीष्ठ मान है, x = 6, y = 3

प्रश्न 7 बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केंद्र (2, -3) है तथा B के निर्देशांक (1, 4) हैं।

उत्तर- यहाँ, वृत्त का केन्द्र O(2, -3) है।

माना वृत्त के व्यास के अन्त बिन्दु A(x, y) और B(1, 4) है।



चूंकि, वृत्त का केन्द्र इसके व्यास को समद्विभाजित करता है।

$$\therefore 2 = \frac{x+1}{2}$$

$\Rightarrow x + 1 = 4$ या $x = 3$

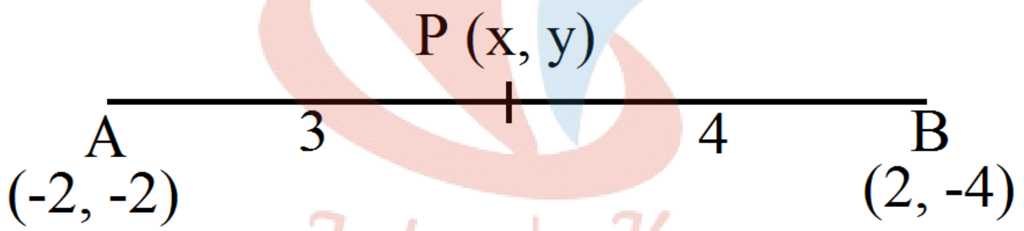
और $-3 = \dfrac{y+4}{2}$

$\Rightarrow y + 4 = -6$ या $y = -10$

अतः A के निर्देशांक हैं, (3, -10)

प्रश्न 8 यदि A और B क्रमशः (-2, -2) और (2, -4) हो तो बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ताकि $AP = \frac{3}{7}AB$ हो और P रेखाखंड AB पर स्थित हो।

उत्तर-



यहाँ दिए गये बिन्दु है, A(-2, 2) और B(2, -4)

माना रेखाखण्ड AB को बिन्दु P इस प्रकार विभाजित करता है कि,

$$AP = \frac{3}{7}AB \text{ या } \frac{AP}{AB} = \frac{3}{7}$$

चूंकि $AB = AP + BP$

$$\therefore \ \frac{AP}{AB} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AP+AB} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{AP+BP}{AP} = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{BP}{AP} = \frac{3+4}{3} = 1 + \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow AP : PB = 3 : 4$$

i.e., P(x, y)AB को 3 : 4 के अनुपात में विभाजित करता है।

$$\therefore \ x = \frac{3\times2+4\times(-2)}{3+4} = \frac{6-8}{7} = \frac{-2}{7}$$

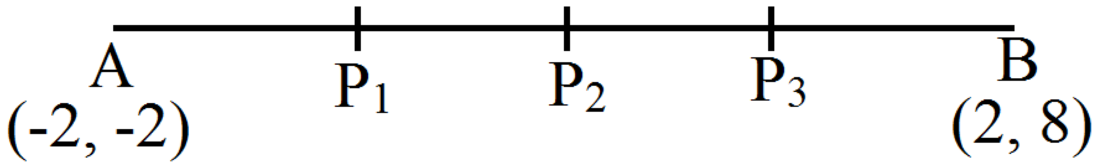
$$y = \frac{3\times(-4)+4\times(-2)}{3+4}$$

$$y = \frac{-12-8}{7} = \frac{-20}{7}$$

इस प्रकार, P के निर्देशांक हैं, $\left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$

प्रश्न 9 बिन्दुओं A(-2, 2) और B(2, 8) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



यहाँ, दिए गये बिन्दु है, A(-2, 2) और B(2, 8)

माना P_1, P_2 और P_3 रेखाखण्ड AB को चार समान भागों में विभाजित करते है।

$$\because \ AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3B$$

स्पष्ट है कि P_2 रेखाखण्ड AB का मध्यबिन्दु है।

$\therefore$ P_2 के निर्देशांक हैं,

$$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+8}{2}\right) \text{ या } (0, 5)$$

पुनः P_1 रेखाखण्ड AP_2 का मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ P_1 के निर्देशांक हैं,

$$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{2-5}{2}\right) \text{ या } \left(-1, \frac{7}{2}\right)$$

और P_3 रेखाखण्ड P_2B का मध्य बिन्दु है।

$\therefore$ P_3 के निर्देशांक हैं,

$$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{5+8}{2}\right) \text{ या } \left(1, \frac{13}{2}\right)$$

इस प्रकार P_1, P_2 और P_3 के निर्देशांक क्रमशः हैं,

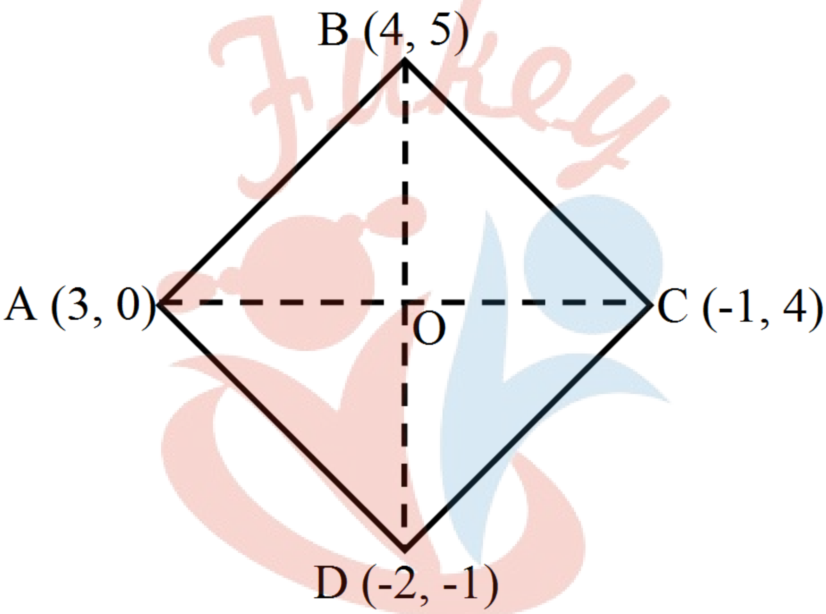
$$(0, 5), \left(-1, \frac{7}{2}\right) \text{ और } \left(1, \frac{13}{2}\right)$$

प्रश्न 10 एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, (3, 0), (4, 5), (1, 4) और (-2, -1) हैं।

[संकेत: समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (उसके विकर्णों का गुणफल)]

उत्तर- माना दिए गये समचतुर्भुज के शीर्ष निम्नांकित है।

A(3, 0), B(4, 5), C(-1, 4) और D(-2, -1)



चूंकि, AC और BD समचतुर्भुज ABCD के विकर्ण है।

और विकर्ण $AC = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{16 + 16}$

$= 4\sqrt{2}$

तथा विकर्ण $BD = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-5)^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{36+36}$

$= 6\sqrt{2}$

चूंकि एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल,

$= \frac{1}{2}$ × (विकर्णों का गुणनफल)

$= \frac{1}{2}(AC \times BD)$

$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}$ वर्ग इकाई

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times 6$ वर्ग इकाई

$= 4 \times 6$ वर्ग इकाई

$= 24$ वर्ग इकाई

प्रश्नावली 7.3 (पृष्ठ संख्या 188)

प्रश्न 1 उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष हैं-

(i) (2, 3), (-1, 0), (2, -4)

(ii) (-5, -1), (3, -5), (5, 2)

उत्तर-

(i)

माना दिए गये $\triangle ABC$ के शीर्षों के निर्देशांक है।

A(2, 3), B(-1, 0) और C(2, -4)

यहाँ $x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -1, y_2 = 0, x_3 = 2, y_3 = -4$

चूंकि $\triangle$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$\therefore \triangle ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[2\{0 - (-4) + (-1)\{-4 - (3)\} + 2\{3 - 0\}]$

$= \frac{1}{2}[2(0 + 4) + (-1)(-4 - 3) + 2(3)]$

$= \frac{1}{2}[8 + 7 + 6]$

$= \frac{1}{2}[21] = \frac{21}{2}$ वर्ग इकाई

(ii)

माना दिए गये $\triangle$ के शीर्षों के निर्देशांक है।

A(-5, -1), B(3, -5) और C(5, 2)

यहाँ $x_1 = -5, y_1 = -1, x_2 = 3, y_2 = -5, x_3 = 5, y_3 = 2$

$\because \triangle$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$\therefore \triangle ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[-5\{-5 - 2\} + 3\{2 - (-1)\} + 5\{-1 - (-5)\}]$

$= \frac{1}{2}[-5\{-7\} + 3(2 + 1) + 5\{-1 + 5\}]$

$= \frac{1}{2}[-5(-7) + 3(3) + 5(4)]$

$= \frac{1}{2}[35 + 9 + 20]$

$= \frac{1}{2}[64]$

$= 32$ वर्ग इकाई

प्रश्न 2 निम्नलिखित में से प्रत्येक में ‘k’ का मान ज्ञात कीजिए, ताकि तीनों बिंदु संरेखी हों।

(i) (7, -2), (5, 1), (3, k)

(ii) (8, 1), (k, -4), (2, -5)

उत्तर-

(i) दिए गये तीन बिन्दु संरेखी होंगे, यदि उनसे बनी △ का क्षेत्रफल शून्य हो।

माना, A(7, -2), B(5, 1) और C(3, k) हैं।

∴ A, B और C संरेखी होंगे यदि क्षेत्रफल (△ABC) = 0

अर्थात 7(1 - k) + 5(k + 2) + 3(-2 - 1) = 0

$\Rightarrow$ 7 - 7k + 5k + 10 + (-6) - 3 = 0

$\Rightarrow$ 17 - 9 + 5k - 7k = 0

$\Rightarrow$ 8 - 2k = 0

$\Rightarrow$ 2k = 8

$\Rightarrow k = \frac{8}{2} = 4$ अतः k का अभीष्ट मान = 4

(ii) माना, (8, 1), (k, -4) और (2, -5) एक △△ के शीर्षों के निर्देशांक है।

A, B और C संरेखी होंगे यदि क्षेत्रफल (△ABC) = 0

i.e., 8(-4 + 5) + k(-5 - 1) + 2[1 - (-4)] = 0

$\Rightarrow$ 8(+1) + k(-6) + 2(5) = 0

$\Rightarrow$ 8 + (-6k) + 10 = 0

$\Rightarrow$ -6k + 18 = 0

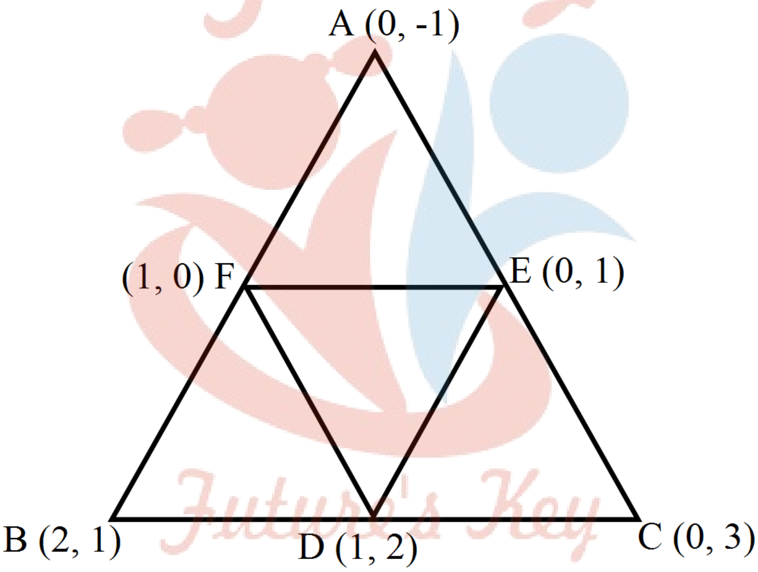
$\Rightarrow k = (-18) \div (-6)$

$\Rightarrow k = 3$

इस प्रकार, k = 3

प्रश्न 3 शीर्षों (0, -1), (2, 1) और (0, 3) वाले त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। इस क्षेत्रफल का दिए हुए त्रिभुज के क्षेत्रफल के साथ। अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



माना △ के शीर्ष (0, -1), (2, 1) और (0, 3) है।

माना D, E और F क्रमशः $\triangle ABC$ की भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिंदु है।

D के निर्देशांक है, $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ i.e., $\left(\frac{2}{4}, \frac{4}{2}\right)$ और (1, 2)

E के निर्देशांक है, $\frac{0+0}{2}, \frac{3+(-1)}{2}$ i.e., (0, 1)

अब, क्षेत्रफल $(\triangle ABC) = \frac{1}{2}[0(1-3)+2\{3-(-1)\}+0(-1-1)]$

$= \frac{1}{2}[0(-2)+8+0(-2)]$

$= \frac{1}{2}[0+8+0]$

$= \frac{1}{2} \times 8 = 4$ वर्ग इकाई

क्षेत्रफल $\triangle(DEF) = \frac{1}{2}[1(1-0)+0)(0-2)+1(2-1)]$

$= \frac{1}{2}[1(1)+0+1(1)]$

$= \frac{1}{2}[1+0+1]$

$= \frac{1}{2} \times 2 = 1$ वर्ग इकाई

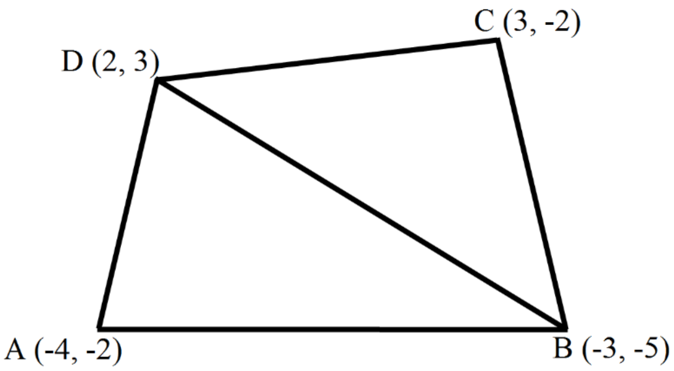
$\therefore \quad \frac{(\triangle DEF)}{(\triangle ABC)} = \frac{1}{4}$

क्षेत्रफल $(\triangle DEF)$: क्षेत्रफल $(\triangle ABC)$

$= 1 : 4$

प्रश्न 4 उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, (-4, -2), (-3, -5), (3, -2) और (2, 3) हैं।

उत्तर-



माना दिए गये चतुर्भुज के शीर्ष इस प्रकार है,

A(-4, -2), B(-3, -5), C(3, -2) और D(2, 3)

विकर्ण BD को मिलाते है।

अब, क्षेत्रफल $(\triangle ABD) = \frac{1}{2}\left[(-4)\{-5-3\} + (-3)\{3-(-2)\} + 2\{-2) - (-5)\}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(-4)(-8) + (-3)(5) + 2(-2+5)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[32 + (-15) + 6\right]$

$= \frac{1}{2}\left[23\right]$

$= \frac{23}{2}$ वर्ग इकाई

क्षेत्रफल $(\triangle CBD) = \frac{1}{2}\left[3-(-5-3) + (-3)\{3-(-2)\} + 2\{(-2)-(-5)\}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[3(-8) + (-3)(5) + 2(3)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[-24 - 15 + 6\right]$

$= \frac{1}{2}\left[-33\right]$

$= \frac{33}{3}$ वर्ग इकाई

क्षेत्रफल (चतुर्भुज ABCD) = क्षेत्रफल $(\triangle ABD)$ + क्षेत्रफल $(\triangle CBD)$

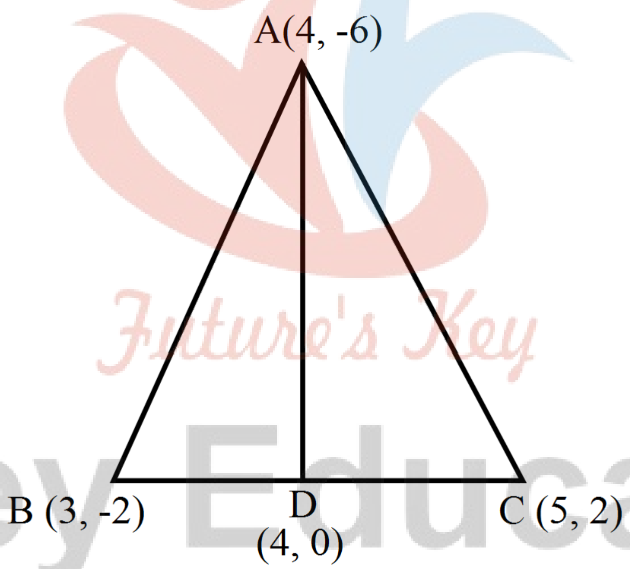
क्षेत्रफल (चतुर्भुज ABCD) $= \left(\frac{23}{2} + \frac{33}{2}\right)$ वर्ग इकाई

$= \frac{56}{2}$ वर्ग इकाई

$= 28$ वर्ग इकाई

प्रश्न 5 किसी त्रिभुज की एक माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है। उस त्रिभुज ABC के लिए इस परिणाम का सत्यापन कीजिए जिसके शीर्ष A(4, -6), B(3, -2) और C(5, 2) हैं।

उत्तर-



यहाँ $\triangle ABC$ के शीर्षों के निर्देशांक इस प्रकार है,

A(4, -6), B(3, -2) और C(5, 2)

$\therefore$ D के निर्देशांक है,

$\left\{\frac{3+5}{2}, \frac{-2+2}{2}\right\}$ या (4, 0)

चूंकि रेखाखण्ड AD, $\triangle ABC$ को दो भागों $\triangle ABD$ और $\triangle ACD$ में विभाजित करता है।

अब, क्षेत्रफल $(\triangle ABD) = \frac{1}{2}[4\{(-2)-0\}+3(0+6)+4(-6+2)\}]$

$= \frac{1}{2}[(-8)+18+(-16)]$

$= \frac{1}{2}(-6) = -3$

$= 3$ वर्ग इकाई .....(i)

क्षेत्रफल $(\triangle ACD) = \frac{1}{2}[4(0-2)+4(2+6)+5(-6-0)]$

$= \frac{1}{2}[-8+32+30]$

$= \frac{1}{2}[-6] = -3$

$= 3$ वर्ग इकाई .....(ii)

(i) और (2) से, क्षेत्रफल $(\triangle ABD)$ = क्षेत्रफल $(\triangle ACD)$

अर्थात, माध्यिका एक त्रिभुज को दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में बांटती है।

प्रश्नावली 7.4 (पृष्ठ संख्या 188-189)

प्रश्न 1 बिन्दुओं A(2, -2) और B(3, 7) को जोड़ने वाले रेखाखंड को रेखा 2x + y - 4 = 0 जिस अनुपात में विभाजित करती है उसे ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना दिए गये बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड AB को रेखा 2x + y - 4 = 0 बिन्दु C पर है k : 1 के अनुपात में विभाजित करती है।

$\therefore$ C के निर्देशांक है, $\left(\frac{3k+2}{k+1}, \frac{7k-2}{k+1}\right)$

चूंकि बिन्दु C रेखा 2x + y - 4 = 0 पर स्थित है,

$$\therefore\ 2\left(\frac{3k+2}{k+1}\right) + \left(\frac{7k-2}{k+1}\right) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2[3k+2] + [7k-2] = 4 \times (k+1)$$

$$\Rightarrow 6k + 4 + 7k - 2 - 4k - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (6 + 7 - 4)k + (4 - 2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 9k + (-2) = 0$$

$$\Rightarrow 9k - 2 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{9}$$

$\therefore$ अभीष्ठ अनुपात $= k : 1 = \frac{2}{9} : 1 = 2 : 9$

प्रश्न 2 x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए, यदि बिउंदु (x, y), (1, 2) और (7, 0) सरेंखी हैं।

उत्तर- दिए गये बिन्दु है, A(x, y), B(1, 2) और C(7, 0)

A, B और C सरेंखी होंगे यदि इन बिन्दुओ से बनी △ का क्षेत्रफल शून्य हो।

अर्थात यदि x(2 - 0) + 1(0 - y) + 7(y - 2) = 0

यदि 2x - y + 7y - 14 = 0 हो

यदि 2x + 6y - 14 = 0 हो

यदि x + 3y - 7 = 0 हो

जो कि x और y के बीच अभीष्ठ संबंध है।

प्रश्न 3 बिन्दुओं (6, -6),(3, 7) और (3, 3) से होकर जाने वाले वृत्त का केंद्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना बिन्दुओं A(6, -6), B(3, -7) और C(3, 3) से गुजरने वाले वृत्त का केन्द्र P(x, y) है।

$\therefore$ AP = BP = CP

AP = BP

$\Rightarrow AP^2 - BP^2$

$\Rightarrow (x - 6)^2 + (y + 6) = (x - 3)^2 + (y + 7)^2$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 + 12y + 36 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 14y + 49$

$\Rightarrow -12x + 6x + 12y - 14y + 72 - 58 = 0$

$\Rightarrow -6x - 2y + 14 = 0$

$\Rightarrow 3x + y - 7 = 0$ ....(i) [-2 से भाग करने पर]

अब BP = CP, से हमें प्राप्त है $BP^3 = CP^2$

$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 7)^2 = (x - 3)^2 + (y - 3)^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 14y + 49 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9$

$\Rightarrow -6x + 6x + 14y + 6y + 58 - 18 = 0$

$\Rightarrow 20y + 40 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{-40}{20}$

$\Rightarrow y = -2$ ....(ii)

(i) और (ii) से,

$\Rightarrow 3x - 2 - 7 = 0$

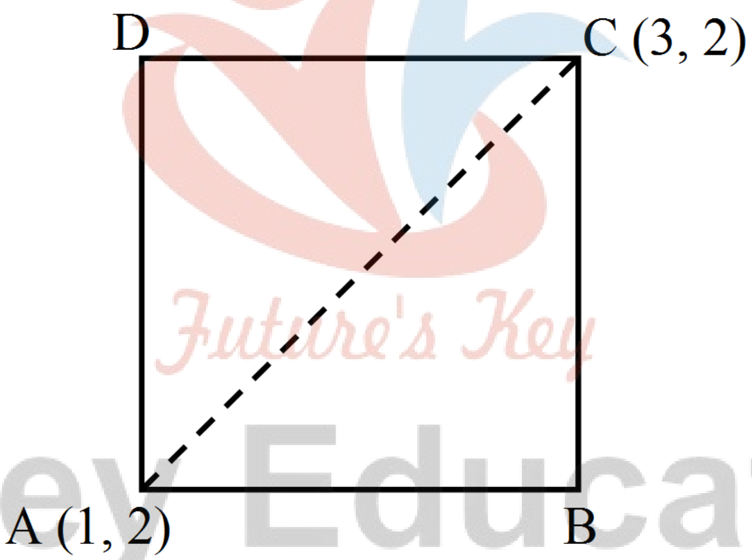
$\Rightarrow 3x = 9$

$\Rightarrow x = 3$

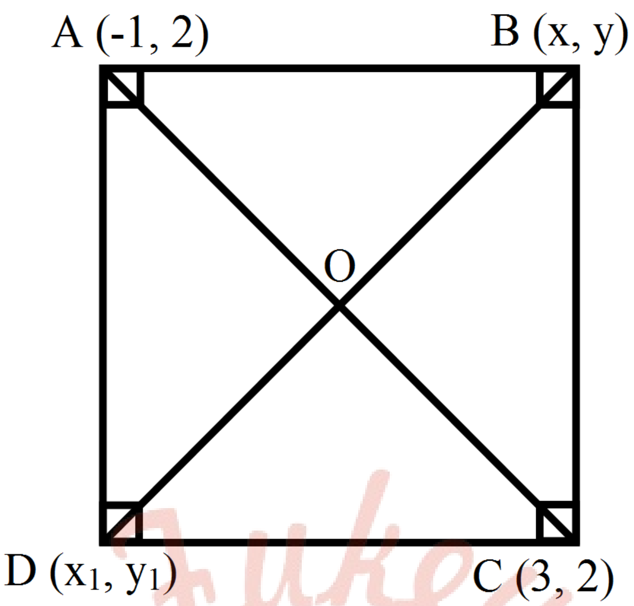
i.e., $x = 3$ और $y = -2$

अतः वृत्त का अभीष्ट केन्द्र (3, -2) है।

प्रश्न 4 किसी वर्ग के दो सम्मुख शीर्ष (-1, 2) और (3, 2) हैं। वर्ग के अन्य दोनों शीर्ष ज्ञात कीजिए।



उत्तर- वर्ग के दो सम्मुख शीर्ष A(-1, 2) और C(3, 2) है। माना वर्ग के अन्य दोनों शीर्ष B(x, y) और $A(x_1, y_1)$ है।



वर्ग की सभी भुजाएँ समान होती है। अतः,

$$\therefore\ AB = BC$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 4 - 4y$$

$$\Rightarrow 8x = 8$$

$$\Rightarrow x = 1$$

वर्ग के सभी आंतरिक कोण 90° के होते है। अतः,

$\triangle ABC$ में,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(1+1)^2 + (y-2)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(1-3)^2 + (y-2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(3+1)^2 + (2-2)^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4 + y^2 + 4 - 4y + 4 + y^2 - 4y + 4 = 16$$

$$\Rightarrow 2y^2 + 16 - 8y = 16$$

$$\Rightarrow 2y^2 - 8y = 0$$

$$\Rightarrow y(y - 4) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ या } y = 4$$

हम जानते है की वर्ग के विकर्ण समान होते है, और एक दूसरे को समदिभजित करते है। इसलिए, AC के मध्य बिंदु के निर्देशांक = BD के मध्य बिंदु के निर्देशांक,

$$\Rightarrow \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = \left(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (1, 2) = \left(\frac{1+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}\right)$$

तुलना करने पर,

$$\frac{1+x_1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 1 + x_1 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

तथा $\frac{y+y_1}{2} = 2$

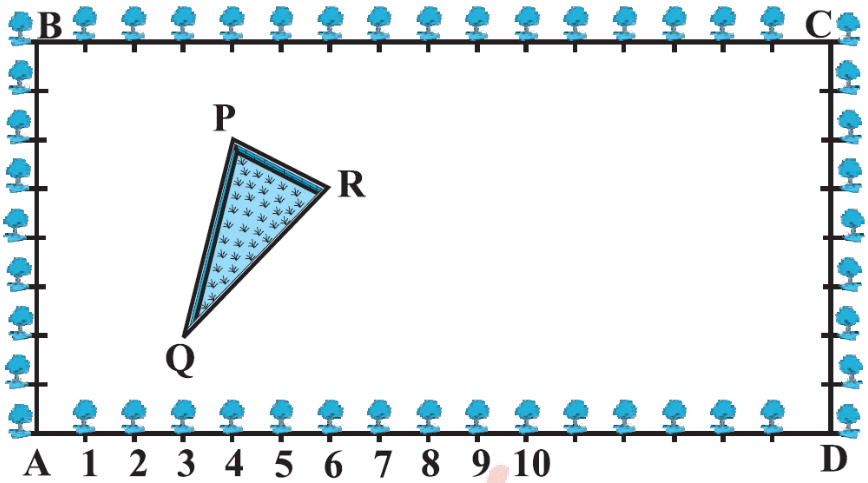
$$\Rightarrow y + y_1 = 4$$

यदि $y = 0,\ y_1 = 4$

यदि $y = 4,\ y_1 = 0$

इस प्रकार, वर्ग के अन्य दोनों शीर्ष (1, 0) और (1, 4) है।

प्रश्न 5 कृष्णा नगर के एक सेकेंडरी स्कूल के कक्षा X के विधार्थियों को उनके बागवानी क्रियाकलाप के लिए, एक आयताकार भूखंड दिया गया है। गुलमोहर की पौध को परस्पर 1m की दूरी पर इस भूखंड की परिसीमा (boundary) पर लगाया जाता है। इस भूखंड के अन्दर एक त्रिभुजाकार घास लगा हुआ लॉन (lawn) है, विधार्थियों को भूखंड के शेष भाग में फूलों के पौधे के बीज बोने हैं।



i. A को मूलबिंदु मानते हुए, त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

ii. यदि मूलबिंदु C हो, त्रिभुज PQR के निर्देशांक क्या होंगे। साथ ही, उपरोक्त दोनों स्थितियों में, त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

उत्तर-

i. A को मूल बिन्दु (origin) और AD तथा AB के निर्देशांक अक्ष लेने पर हमें प्राप्त होता है कि P के निर्देशांक (4, 6), Q के निर्देशांक (3, 2), R के निर्देशांक (6, 5) ΔPQR के शीर्ष हैं।

ii. बिन्दु C के मूल बिन्दु और CB तथा CD को निर्देशांक-अक्ष लेने पर △PQR के शीर्षों के निर्देशांक हैं, P (12, 2), Q (13, 6) और R (10, 3)

अब, क्षेत्रफल (△PQR) [जबकि P(4, 6), Q(3, 2) और R(6, 5) हैं]

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4(2 - 5) + 3(5 - 6) + 6(6 - 2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-12 - 3 + 24\right]$$

$$= \frac{9}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

क्षेत्रफल $(\triangle PQR)$ [जब P(12, 2), 2(13, 6) और R(10, 3) हैं]

$$= \frac{1}{2}\left[12(6-3)+13(3-2)+10(2-6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[36+13-40\right]$$

$$= \frac{9}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

इस प्रकार, दोनों अवस्थाओं में $\triangle PQR$ का क्षेत्रफल एक ही है।

प्रश्न 6 एक त्रिभुज ABC के शीर्ष A(4, 6), B(1, 5) और C(7, 2) हैं। भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करते हुए एक रेखा इस प्रकार खींची गई है की $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{4}$ है। $\triangle ADE$ का क्षेत्रफल परिकलित कीजिए और इसकी तुलना $\triangle ABC$ के क्षेत्रफल से कीजिए।

उत्तर-

हमें प्राप्त है,

$$\frac{AD}{AB}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{4}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AD}+\frac{DE}{AD}=\frac{4}{1}=1+\frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{DE}{AD}=1+\frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AD}=\frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow AD : DE = 1 : 3$$

इस प्रकार, बिन्दु D रेखाखण्ड AB को 1 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है।

$\therefore$ बिन्दु D के निर्देशांक है,

$$\left[\frac{(1\times1)+(3\times4)}{1+3}, \frac{(1\times5)+(3\times6)}{1+3}\right]$$

$$= \left[\frac{1+12}{4}, \frac{5+18}{4}\right]$$

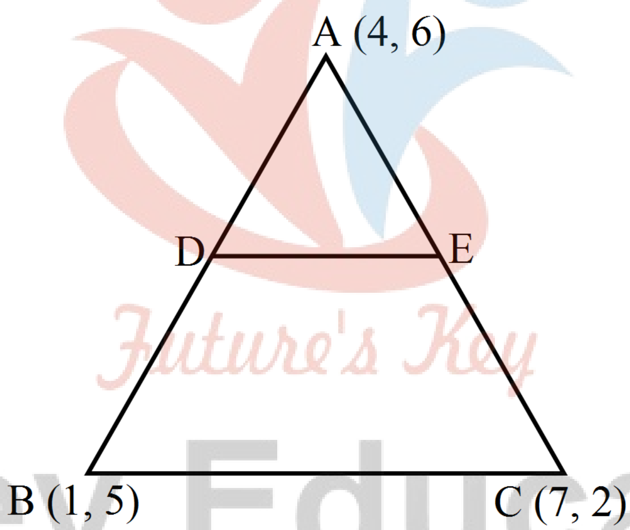
$$= \left(\frac{13}{4}, \frac{23}{4}\right)$$

इसी प्रकार, AE : EC = 1 : 3

$$= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{13}{4} + \frac{19}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{48+52+19}{16}\right]$$

$$= \frac{15}{32} \text{ वर्ग इकाई}$$



$$\text{क्षेत्रफल } (\triangle ABD) = \frac{1}{2}[4(5-2) + 1(2-6) + 7(6-5)]$$

$$= \frac{1}{2}[(4 \times 3) + 1 \times (-4) + 7 \times 1]$$

$$= \frac{1}{2}[12 + (-4) + 7] = \frac{1}{2}(15)$$

$$= \frac{15}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

अब, $\frac{(\triangle ADE)}{(\triangle ABC)} = \frac{\frac{15}{32}}{\frac{15}{2}} = \frac{15}{32} \times \frac{2}{15} = \frac{1}{16}$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफल $(\triangle ADE)$: क्षेत्रफल $(\triangle ABC)$

$\Rightarrow 1 : 16$

प्रश्न 7 मान लीजिए A(4, 2), B(6, 5) और C(1, 4) एक त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं।

(i) A से होकर जाने वाली माध्यिका BC से D पर मिलती है। बिन्दु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ii) AD पर स्थित ऐसे बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए की AP : PD = 2 : 1 हो।

(iii) माध्यिकाओं BE और CF पर ऐसे बिन्दुओं Q और R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए की BQ : QE = 2 : 1 हो और CR : RF = 2 : 1 हो।

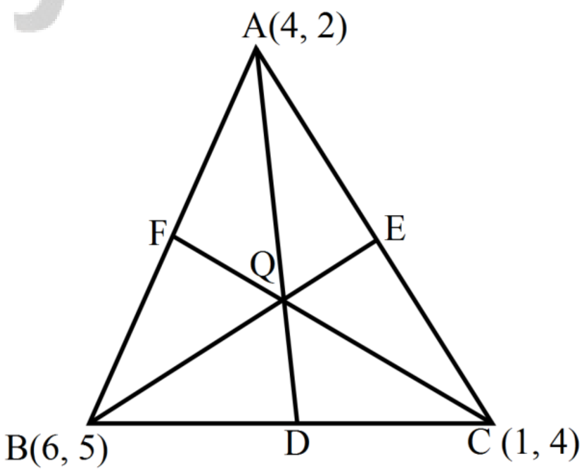
(iv) आप क्या देखते हैं?

[**नोट:** वह बिंदु जो तीनों माध्यिकाओं में सर्वनिष्ठ हो, उस त्रिभुज का केन्द्रक कहलाता है और यह प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।]

(v) यदि $A(x_1, y_1)_2$, $B(X_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं, तो इस त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i)



हमें प्राप्त है कि, ΔABC के शीर्ष A(4, 2), B(6, 5) और C(1, 4) है।

चुंकि AD एक माधियका है,

∴ D के निर्देशांक है,

$$\left(\frac{6+1}{2}, \frac{5+4}{2}\right) \text{ या } \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

(ii)

चूँकि AP : PD = 2 : 1 अर्थात P रेखाखण्ड AD को 2 : 1 के अनुपात में बांटता है।

∴ P के निर्देशांक है,

$$= \left[\frac{2\left(\frac{7}{2}\right)+(1\times4)}{2+1}, \frac{2\left(\frac{9}{2}\right)+1\times2}{2+1}\right]$$

$$\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

(iii)

चूँकि BQ : QE = 2 : 1

Q रेखाखंड BE को 2 : 1 के अनुपात में बांटती है,

∴ Q के निर्देशांक है,

$$= \left[\frac{2\left(\frac{5}{2}\right)+1\times6}{2+1}, \frac{(2\times3)+(1\times5)}{2+1}\right]$$

$$= \left[\frac{5+6}{3}, \frac{6+5}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right]$$

Q के निर्देशांक है,

$$= \left(\frac{4+6}{2}, \frac{2+5}{2}\right)$$

$$= \left(5, \frac{7}{2}\right)$$

R के निर्देशांक है,

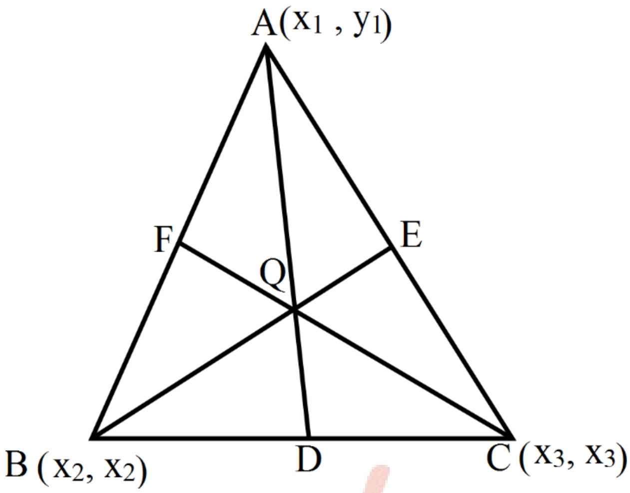
$$= \left[\frac{2\times5+1\times1}{2-1}, \frac{2\times\frac{7}{2}+1\times4}{2+1}\right]$$

$$= \left[\frac{10+1}{3}, \frac{7+4}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right]$$

(iv) स्पष्ट है कि P, Q और R एक बिन्दु को वयक्त करते है।

(v) हमें प्राप्त है कि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$, $\triangle ABC$ के शीर्ष है। तथा AD, BE और CF इसकी माध्यिकाएँ है।



∴ D, E और F क्रमशः BC, CA और AB के मध्य बिन्दु है।

हम जानते है केन्द्रक माध्यिका पर स्थित एक ऐसा बिन्दु होता है, जो उसे 2 : 1 के अनुपात में बांटे।

माध्यिका AD के अन्तः-बिन्दुओ के निर्देशांक है,

$$\left[\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right]$$

माना G एक केन्द्रक है,

∴ केन्द्रक के निर्देशांक है,

$$= \left[\frac{(1\times x_1)+2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)}{1+2}, \frac{(1\times y_1)+2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)}{1+2}\right]$$

$$= \left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right]$$

इसी प्रकार अन्य माध्यिकाओं से, हमे प्राप्त होता है कि,

G के निर्देशांक $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

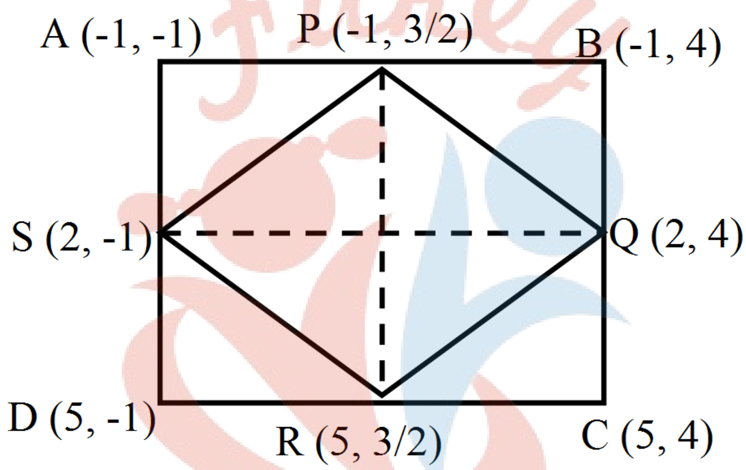
अर्थात, एक केन्द्रक के निर्देशांक, $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ है।

प्रश्न 8 बिन्दुओं A(-1, -1), B(-1, 4), C(5, 4) और D(5, -1) से एक आयात ABCD बनता है। PQR और S क्रमशः भुजाओं AB,BC,CD और DA के मध्य बिन्दु हैं। क्या चतुर्भुज PQRS एक वर्ग है? क्या यह एक आयत है? क्या यह एक समचतुर्भुज है? सकारण उत्तर दीजिए।

उत्तर- हमें प्राप्त है कि एक चतुर्भुज शीर्ष है,

A(-1, -1), B(-1, 4), C(5, 4), D(5, -1)

चूंकि AB का मध्य बिन्दु P है।



$\therefore$ P के निर्देशांक है, $\left[\frac{-1-1}{2}, \frac{-1+4}{2}\right]$ या $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

इसी प्रकार Q के निर्देशांक है, $\left[\frac{-1+5}{2}, \frac{4+4}{2}\right]$ या $(2, 4)$

तथा R के निर्देशांक है, $\left(\frac{5+5}{2}, \frac{-1+4}{2}\right)$ या $\left(5, \frac{3}{2}\right)$

और S के निर्देशांक है, $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-1-1}{2}\right)$ या $(2, -1)$

अब, $PQ = \sqrt{(2+1)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

$$SR = \sqrt{(5-2)^2 + \left(\frac{3}{2} - 4\right)^2}$$

$$= \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

$$RS = \sqrt{(2-5)^2 + \left\{-1 + \left(-\frac{3}{2}\right)\right\}^2}$$

$$= \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

$$SP = \sqrt{(2+1)^2 + \left(-1 - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{9 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

$$SR = \sqrt{(5+1)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{6^2 - 0} = 6$$

$$QS = \sqrt{(2-2)^2 + (4+1)^2}$$

$$= \sqrt{0 + 5^2} = 5$$

उक्त से स्पष्ट है कि PQ = QR = RS = SP

अर्थात चतुर्भुज PQRS की सभी भुजाएँ समान है।

∴ यह एक वर्ग या एक समचतुर्भुज हो सकता है।

चूँकि PR ≠ QS

अर्थात PQRS के विकर्ण समान नहीं है।