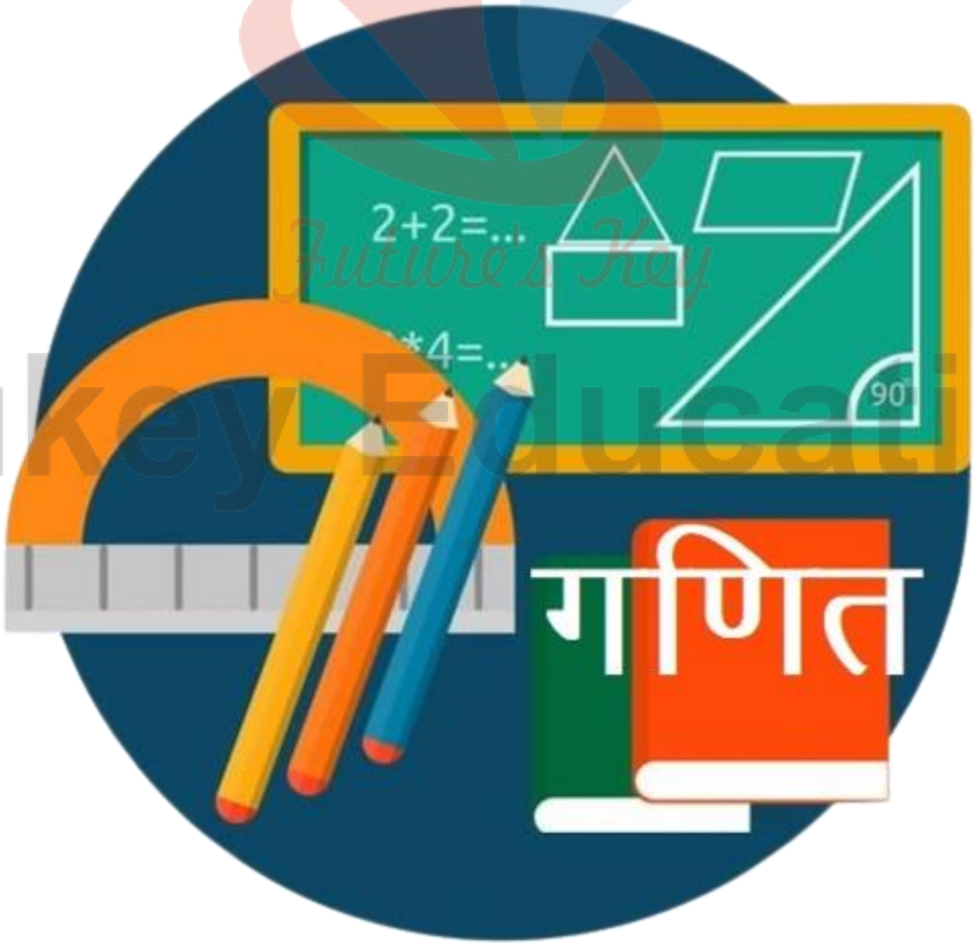
गणित

अध्याय-7: द्विपद प्रमेय



द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem)

यदि n कोई घातांक हो तो $(x+a)^n$ के प्रसार को श्रेणी के रूप में प्रकट करने वाले प्रमेय को द्विपद प्रमेय कहते हैं।

यदि n एक धन पूर्णांक है, तो यह प्रमेय धन पूर्णांक घातांक के लिए द्विपद प्रमेय कहलाती है।

धन पूर्णांक घातांक के लिए द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem for Positive Integral Index)

कथन : यदि x तथा a दो बीजीय राशियाँ हों तथा n एक धनात्मक पूर्णांक हो, तो

$$(x+a)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}a + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + {}^nC_3x^{n-3}a^3 + \dots\dots + {}^nC_rx^{n-r}a^r + \dots\dots\dots + {}^nC_na^n$$

जहाँ ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \dots\dots, {}^nC_r, \dots\dots, {}^nC_n$ प्रसार में क्रमश: प्रथम, द्वितीय, तृतीय, ... $(r+1)$ वें, ... $(n+1)$ वें पदों के गुणांक हैं।

सत्यापन : हम गणितीय आगमन विधि से द्विपद प्रमेय का सत्यापन करेंगे।

मान लिया कि,

$$P(n) : (x+a)^n = {}^nC_0x^{n-0}a^0 + {}^nC_1x^{n-1}a^1 + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + \dots\dots\dots + {}^nC_rx^{n-r}a^r + \dots\dots\dots + {}^nC_nx^{n-n}a^n \quad \dots(1)$$

$$\therefore P(1) : (x+a)^1 = {}^1C_0x^{1-0}a^0 + {}^nC_1x^{1-1}a^1 = x+a$$

अत: $P(1)$ सत्य है।

मान लिया कि $n=k$ के लिए प्रमेय सत्य है। तब,

$$P(k) : (x+a)^k = {}^kC_0x^{k-0}a^0 + {}^kC_1x^{k-1}a^1 + {}^kC_2x^{k-2}a^2 + \dots\dots\dots + {}^kC_rx^{k-r}a^r + \dots\dots\dots + {}^kC_kx^{k-k}a^k$$ सत्य है।

दोनों पक्षों में $(x+a)$ का गुणा करने पर,

$$(x+a)^{k+1} = (x+a)\{{}^kC_0 x^{k-0} a^0 + {}^kC_1 x^{k-1} a^1 + {}^kC_2 x^{k-2} a^2 + \ldots\ldots + {}^kC_{r-1} x^{k-r+1} a^{r-1} + {}^kC_r x^{k-r} a^r + {}^kC_{r+1} x^{k-r-1} a^{r+1} + \ldots\ldots + {}^kC_k x^{k-k} x^k\}$$

$$= {}^kC_0 x^{k+1} + ({}^kC_0 + {}^kC_1) x^k a + ({}^kC_1 + {}^kC_2) x^{k-1} a^2 + \ldots\ldots + ({}^kC_{r-1} + {}^kC_k) x^{k-r+1} a^r + ({}^kC_r + {}^kC_{r+1}) x^{k-r} a^{r+1} + \ldots\ldots + {}^kC_k a^{k+1}$$

$$= {}^{k+1}C_0 x^{k+1} a^0 + {}^{k+1}C_1 x^k a^1 + {}^{k+1}C_2 x^{k-1} a^2 + \ldots\ldots + {}^{k+1}C_r x^{k-r+1} a^r + {}^{k+1}C_{r+1} x^{k-r} a^{r+1} + \ldots\ldots + {}^{k+1}C_{k+1} a^{k+1},$$

$$[\because {}^kC_0 = {}^{k+1}C_0 = 1, {}^kC_k = {}^{k+1}C_{k+1} = 1, {}^kC_r + {}^kC_{r+1} = {}^{k+1}C_{r+1}]$$

समी. (1) से स्पष्ट है कि P(k + 1) सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से द्विपद प्रमेय n के किसी भी धन पूर्णांक मान के लिए सत्य है।

टिप्पणी :

1. द्विपद प्रमेय के घातांक n के लिए प्रसार में पदों की कुल संख्या (n+ 1) होती है।

2. उत्तरोत्तर पदों में x के घातांक क्रमशः एक-एक घटते जाते हैं तथा a के घातांक क्रमशः एक-एक बढ़ते जाते है।

3. किसी भी पद में x और a के घातांकों का योग n होता है।

$(x-a)^n$ का प्रसार

द्विपद प्रमेय से हम जानते हैं कि,

$$(x+a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1}a + {}^nC_2 x^{n-2}a^2 + \ldots\ldots + {}^nC_r x^{n-r}a^r + \ldots\ldots + a^n$$

उपर्युक्त सूत्र में a के स्थान पर $-a$ लिखने पर,

$$(x-a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1}(-a) + {}^nC_2 x^{n-2}(-a)^2 + \ldots\ldots + {}^nC_r x^{n-r}(-a)^r + \ldots\ldots + (-a)^n$$

$$= x^n - {}^nC_1 x^{n-1}a + {}^nC_2 x^{n-2}a^2 + \ldots\ldots + (-1)^r\, {}^nC_r x^{n-r}a^r + \ldots\ldots + (-1)^n a^n.$$

$(1+x)^n$ तथा $(1-x)^n$ के प्रसार

द्विपद प्रमेय से हम जानते हैं कि,

$$(x+a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1}a + {}^nC_2 x^{n-2}a^2 + \ldots\ldots + {}^nC_r x^{n-r}a^r + \ldots\ldots + a^n$$

उपर्युक्त सूत्र में x के स्थान पर 1 और a के स्थान पर x लिखने पर,

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_r x^r + \ldots\ldots + x^n$$

पुनः $(x+a)^n$ के प्रसार में x के स्थान पर 1 और a के स्थान पर $-x$ रखने पर,

$$(1-x)^n = 1 - {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \ldots\ldots + (-1)^r\, {}^nC_r x^r + \ldots\ldots + (-1)^n x^n.$$

व्यापक पद (General Term)

व्यापक रूप में, एक या अधिक पदों वाला कोई भी व्यंजक जिसमें चर के घातांक केवल ऋणेतर पूर्णांक हों, एक बहुपद कहलाता है । समान पद समान-चरों से बनते हैं तथा इन चरों की घातें भी समान होती हैं। परंतु समान पदों के गुणांक समान होना आवश्यक नहीं है।

हम जानते हैं कि

$$(x+a)^n = {}^nC_0 x^{n-0} a^0 + {}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_2 x^{x-2} a^2 + {}^nC_3 x^{n-3} a^3 + \dots\dots\dots + a^n$$

यहाँ $t_1 = {}^nC_0 x^{n-0} a^0$

$t_2 = {}^nC_1 x^{n-1} a^1$

$t_3 = {}^nC_2 x^{n-2} a^2$

$$\boxed{t_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} a^r}$$

$(x+a)^n$ के विस्तार में (r+ 1) वाँ पद व्यापक पद कहलाता है। इसका मान ${}^nC_r x^{n-r} a^r$ होता है।

मध्य पद (Middle Term)

हम जानते हैं कि $(x+a)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या (n+1) होती है। इन पदों का मध्य पद n के मान पर निर्भर करता है। n का मान सम (Even) अथवा विषम (Odd) कुछ भी हो सकता है। अतएव मध्य पद ज्ञात करने के लिए हमें निम्न दो स्थितियों पर विचार करना होगा-

प्रथम स्थिति : जब n सम है, अर्थात् n=2m. इस स्थिति में प्रसार में पदों की संख्या (2m+l) होगी।

स्पष्ट है कि आदि से m पद और अन्त से m पद छोड़ देने पर (m+1) वाँ पद अर्थात् $\frac{n}{2}+1$ वाँ पद बचेगा। यही श्रेणी का मध्य पद होगा।

अतः मध्य पद

$$= T_{(n/2+1)} = {}^nC_{n/2} x^{n-n/2} a^{n/2} = {}^nC_{n/2} x^{n/2} a^{n/2}$$

द्वितीय स्थिति : जब n विषम है, मान लिया कि n=2m +1 तब श्रेणी में पदों की कुल संख्या (2m+2) होगी।

स्पष्ट है कि आदि से m पद और अन्त से m पद छोड देने पर (m + 1) वें और (m+2) वें दोनों ही पद मध्य पद होंगे जो कि

क्रमशः $\frac{n+1}{2}$ वें तथा $\frac{n+3}{2}$ वें पद हैं।

पास्कल त्रिभुज (Pascal's Triangle)

निम्नलिखित सर्वसमिकाओं पर विचार करते हैं

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

हम देखते हैं कि

(i) प्रसार में पदों की संख्या घातांक से 1 अधिक है।

(ii) प्रसार के उत्तरोतर पदों में प्रथम a की घातें एक के क्रम से घट रही है जबकि द्वितीय राशि b की घातें एक क्रम से बढ़ रही है।

अब हम (a + b) के उपरोक्त विस्तारों में विभिन्न पदों के गुणाकों को निम्न प्रकार से व्यवस्थित करते हैं-

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

ऊपर दिये गये संख्याओं का क्रम त्रिभुज की तरह दिखाई देता है तथा पास्कल का त्रिभुज कहलाता है।

ऊपर दिये गये द्विपद प्रसार के गुणांकों को संचय के सूत्र में लिखने पर पास्कल त्रिभुज इस प्रकार होगा-

$^0C_0$

$^1C_0$ $^1C_1$

$^2C_0$ $^2C_1$ $^2C_2$

$^3C_0$ $^3C_1$ $^3C_2$ $^3C_3$

$^4C_0$ $^4C_1$ $^4C_2$ $^4C_3$ $^4C_4$

पास्कल त्रिभुज में,

(i) प्रत्येक पंक्ति 1 से प्रारंभ होकर 1 पर समाप्त होगी।

(ii)किसी भी पंक्ति में प्रत्येक गुणांक पिछली पंक्ति में इसके दोनों ओर के दो गुणांकों के योग के बराबर होती है।

(iii) किसी प्रसार के गुणांक पिछले प्रसार के गुणांक से प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 1. $(x-\frac{1}{2x})^{10}$ के विस्तार में अंत से पाँचवाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^{10}$ के विस्तार में अंत से,

पाँचवाँ पद $=\left(-\frac{1}{2x}+x\right)^{10}$ के विस्तार में,

प्रारम्भ से पाँचवाँ पद

$(x+a)^n$ के विस्तार में,

$$T_{r+1}={}^nC_r x^{n-r} a^r$$

यहाँ $r=4, n=10, x=-\frac{1}{2x}, a=x$

$\left(-\frac{1}{2x}+x\right)^{10}$ के विस्तार में प्रारम्भ से,

पाँचवाँ पद $=T_{4+1}={}^{10}C_4\left(-\frac{1}{2x}\right)^{10-4}x^4$

$$T_5={}^{10}C_4\left(-\frac{1}{2x}\right)^6\times x^4$$

$$={}^{10}C_4\frac{1}{2^6\times x^6}\times x^4$$

$$=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}\times\frac{1}{64}\times\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{105}{32x^2}$$

$\therefore$ $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^{10}$ के विस्तार में अंत से पाँचवाँ पद

$$=\frac{105}{32x^2}.$$

उदाहरण 2. $(x-\frac{1}{2x})^{10}$ के विस्तार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ n=10, जो सम है।

$$\text{अतः मध्य पद} = \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ वाँ पद}$$

$$= \left(\frac{10}{2}+1\right) \text{ वाँ पद} = \text{छठा पद}$$

$$T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} a^r$$

$$\text{यहाँ } n=10, r=5, x=x, a=-\frac{1}{x}$$

$$T_{5+1} = {}^{10}C_5 (x)^{10-5} \left(-\frac{1}{x}\right)^5$$

$$= -{}^{10}C_5 x^5 + \frac{1}{x^5}$$

$$= -{}^{10}C_5$$

$$= -\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= -252.$$

किसी घातांक के लिए द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem for any Index)

हम जानते हैं कि यदि n एक धनात्मक पूर्णांक है, तो द्विपद

प्रमेय से,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}x^r + \ldots\ldots + x^n$$

यह परिणाम सत्य सिद्ध किया जा सकता है यदि n एक धन पूर्णांक न होकर कोई ऋण पूर्णांक या भिन्न (धनात्मक या ऋणात्मक) है। इसका प्रमाण इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। अतः हम यहाँ पर यह मान लेंगे कि यदि $|x| < 1$ अर्थात् यदि x का संख्यात्मक मान 1 से कम हो, तो भी

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)x^r}{r!} + \ldots\ldots$$

जहाँ n का मान कोई ऋण पूर्णांक या भिन्न (धनात्मक या ऋणात्मक) है।

कुछ महत्वपूर्ण विस्तार

(i) हम जानते हैं कि जब $|x| < 1$ हो, तो

(i) हम जानते हैं कि जब $|x|<1$ हो, तो

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}x^r + \ldots\ldots \quad \ldots(1)$$

इस विस्तार में व्यापक पद $= T_{r+1}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}x^r.$$

(ii) उपर्युक्त में n के स्थान पर -1 रखने पर,

$$(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}x^3 + \ldots\ldots + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\ldots\ldots(-n-r+1)}{r!}x^r + \ldots\ldots$$

$$= 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \ldots\ldots + \frac{(-1)^r n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{r!}x^r + \ldots\ldots \quad \ldots(2)$$

इस विस्तार में व्यापक पद,

$$= T_{r+1}$$

$$= (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots\ldots(n+r-1)x^r}{r!}.$$

(iii) समी. (1) में x के स्थान पर -1 रखने पर,

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots.. + (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)\ldots..(n-r+1)}{r!}x^r + \ldots... \quad \ldots (3)$$

इस विस्तार में व्यापक पद $= T_{r+1}$

$$= (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)\ldots..(n-r+1)}{r!}x^r$$

(iv) समी. (2) में x के स्थान पर - x रखने पर,

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \ldots... + \frac{n(n+1)(n+2)\ldots..(n+r-1)}{r!}x^r + \ldots.$$

इस विस्तार में व्यापक पद

$$= T_{r+1}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots..(n+r-1)}{r!}x^r.$$

$(1+X)^n$ के विस्तार में गुणांकों का योग हम जानते हैं कि

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \ldots\ldots + \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{r!}x^r + \ldots$$

इस विस्तार में व्यापक पद

$$= T_{r+1} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{r!}x^r.$$

अर्थात् $(1+x)^n$ के प्रसार में सभी पदों के गुणांकों का योग 2^n होता है।

$(1+x)^n$ के विस्तार में सभी सम पदों के गुणांकों का योग, सभी विषम पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है तथा प्रत्येक $2n-1$ के बराबर होता है

हम जानते हैं कि,

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots + {}^nC_nx^n$$

उपर्युक्त में $x = -1$ रखने पर,

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \ldots$$

$$\Rightarrow {}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}(\text{सम्पूर्ण गुणांकों का योग})$$

$$= \frac{1}{2}(2^n) = 2^{n-1}$$

अतः $C_0 + C_2 + C_4 + \ldots\ldots = C_1 + C_3 + C_5 + \ldots$

$$= 2^{n-1}.$$

उदाहरण 1. निम्न प्रसार ज्ञात कीजिए :

(i) $(1-2x)^{-1}$ का प्रसार 5 पदों तक।

हल : (i) $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)x^2}{2!}+$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+.....$$

यहाँ $x=-2x, n=-1$

$$(1-2x)^{-1} = 1+(-1)(-2x)+\frac{(-1)(-1-1)}{2!}(-2x)^2+$$

$$\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}(-2x)^3+$$

$$\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)(-1-3)}{4!}(-2x)^4+.....$$

$$=1+2x+\frac{1\times2}{2\times1}\times4x^2+\frac{1\times2\times3}{3.2.1.}\times8\times x^3+$$

$$\frac{1\times2\times3\times4}{4.3.2.1.}\times16\times x^4+........$$

$$(1-2x)^{-1} = 1+2x+4x^2+8x^3+16x^4,$$

उदाहरण 2. $(x-2x^2)^{-3}$ के प्रसार में x^7 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : $(x-2x^2)^{-3} = x^{-3}(1-2x)^{-3}$

माना कि x^7, $(r+1)$ वें पद में आता है। तब,

$(1-x)^{-n}$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = \frac{n(n+1)(n+2)+........(n+r-1)}{r!}x^r$$

यहाँ $x = 2x, n = 3$

$(1-2x)^{-3}$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = \frac{3(3+1)(3+2).......(3+r-1)}{r!}(2x)^r$$

$$T_{r+1} = \frac{3\times4\times5\times......(2+r)}{r!}(2x)^r$$

$x^{-3}(1-2x)^{-3}$ के प्रसार में व्यापक पद

$$= x^{-3}\frac{3.4.5.....(r+2)}{r!}(2x)^r$$

$$= \frac{3.4.5.......(r+2)}{r!}2^r x^{r-3}$$

$\therefore r-3=7 \Rightarrow r=10$

अतः अभीष्ट गुणांक $= \dfrac{3.4.5.....12}{10!}2^{10}$

$= 66\times2^{10}$

$= 67584.$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 8.1 (पृष्ठ संख्या 179-180)

प्रश्न 1 प्रत्येक व्यंजक को प्रसार ज्ञात कीजिए:

$(1 - 2x)^5$

उत्तर-

$$(1-2x)^3 = {}^5C_0.1^5 + {}^5C_1.1^4.(-2x) + {}^5C_2.1^3(-2x) + {}^5C_3.1^2.(-2x)^3$$
$$+ {}^5C_4.1^1.(-2x)^4 + {}^5C_5.1^0.(-2x)^5$$
$$= 1 + 5(-2x) + 10 \cdot 4x^2 + 10.(-8x^3) + 5.(-2x)^4 + 1(-2x)^5$$
$$= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$$

प्रश्न 2 प्रत्येक व्यंजक को प्रसार ज्ञात कीजिए:

$$\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$$

उत्तर-

$$\left(\frac{2}{x-\frac{x}{2}}\right.^{5} = \left(\frac{2}{x}\right)^5 + {}^5C_1\left(\frac{2}{x}\right)^4\left(-\frac{x}{2}\right) + {}^5C_2\left(\frac{2}{x}\right)^3\left(-\frac{x}{2}\right)^2$$
$$+ {}^5C_3\left(\frac{2}{x}\right)^2\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + {}^5C_4\left(\frac{2}{x}\right)^1\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(-\frac{x}{2}\right)^5$$
$$= \frac{32}{x^5} + 5.\frac{16}{x^4}\left(-\frac{x}{2}\right) + 10.\frac{8}{x^3}.\frac{x^3}{4} + 10.\frac{4}{x^2}\left(-\frac{x^3}{8}\right) + 5.\frac{2}{x}\left(\frac{x^4}{16}\right) + \left(-\frac{x^5}{32}\right)$$
$$= \frac{32}{x^5} - \frac{40}{x^3} + \frac{20}{x} - 5x + \frac{5}{8}.x^3 - \frac{x^5}{32}$$

प्रश्न 3 प्रत्येक व्यंजक को प्रसार ज्ञात कीजिए:

$(2x-3)^6$

उत्तर-

$$(2x-3)^6 = (2x)^6 + {}^6C_1(2x)^5(-3) + {}^6C_2(2x)^4(-3)^2 + {}^6C_3(2x)^3(-3) + {}^6C_4(2x)^2(-3)^4$$
$$+ {}^6C(2x)^1(-3)^5 + (-3)^6$$
$$= 64x^6 + 6 \cdot 32x^5(-3) + 15 \cdot 16x^4 9 + 20 \cdot 8x^3(-27)$$
$$+ 15 \cdot 4x^2 \cdot 81 + 6 \cdot 2x(-243) + 729$$
$$= 64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^2 + 4860x^2 - 2916x + 729$$

प्रश्न 4 प्रत्येक व्यंजक को प्रसार ज्ञात कीजिए:

$$\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$$

उत्तर-

$$\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{x}\right)^5=\left(\frac{x}{3}\right)^5+{}^5C_1\left(\frac{x}{3}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right)+{}^5C_2\left(\frac{x}{3}\right)^3\left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$+{}^5C_3\left(\frac{x}{3}\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)^2+{}^5C_4\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2+{}^5C_5\left(\frac{1}{x}\right)^5$$

$$=\frac{x^5}{243}+5.\frac{x^4}{81}.\frac{1}{x}+10.\frac{x^3}{27}.\frac{1}{x^2}+10.\frac{x^2}{9}.\frac{1}{x^3}+5.\frac{x}{3}.\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}$$

$$=\frac{x^5}{243}+\frac{5x^4}{81}+\frac{10}{27}.x+\frac{10}{9}.\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}$$

प्रश्न 5 प्रत्येक व्यंजक को प्रसार ज्ञात कीजिए:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$$

उत्तर-

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6=x^6+{}^6C_1x^5\left(\frac{1}{x}\right)+{}^6C_2x^4\left(\frac{1}{x}\right)^2+{}^6C_3x^3\left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$+{}^6C_4x^2\left(\frac{1}{x}\right)^4+{}^6C_5x\left(\frac{1}{x}\right)^5+\left(\frac{1}{x}\right)^6$$

$$=x^6+6.x^5.\frac{1}{x}+15.x^4\frac{1}{x^2}+20.x^3.\frac{1}{x^3}+15x^2.\frac{1}{x^4}+6x\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}$$

$$=x^6+6x^4+15x^2+20+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}$$

प्रश्न 6 द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके मान ज्ञात कीजिए-

$(96)^3$

उत्तर-

$$(96)^3=(100-4)^3=(100)^3+{}^3C_1(100)^2(-4)+{}^3C_2(100)^1(-4)^2+(-4)^3$$

$$=1000000+3\times10000(-4)+3\times100\times16-64$$

$$=1000000-120000+4800-64=884736$$

प्रश्न 7 द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके मान ज्ञात कीजिए-

$(102)^5$

उत्तर-

$$(102)^5 = (100+2)^5$$

$$= (100)^5 + {}^5C_1(100)^4 \times 2 + {}^5C_2(100)^3 2^2$$
$$+ {}^5C_3(100)^2 \times 2^3 + {}^5C_4(100) \times 2^3 + {}^5C_4(100) \times 2^4 + 2^5$$

$$10000000000 + 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000 \times 4$$
$$+ 10 \times 10000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 + 32$$

$$= 10000000000 + 1000000000 + 40000000 + 800000 + 8000 + 32$$

$$= 11040808032$$

प्रश्न 8 द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके मान ज्ञात कीजिए-

$(101)^4$

उत्तर-

$$(101)^4 = (100+1)^4$$

$$= (100)^4 + {}^4C_1 \times (100)^3 \times 1\ {}^4C_2 \times (100)^2 \times 1^2$$
$$+ {}^4C_3 \times (100) \times 1^3 + 1^4$$

$$= 100000000 + 4 \times 1000000 + 6 \times 10000 + 400 + 1$$

$$= 100000000 + 4000000 + 60000 + 4000 + 1$$

$$= 104060401$$

प्रश्न 9 द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके मान ज्ञात कीजिए-

$(99)^5$

उत्तर-

$$(99)^5 = (100-1)^5$$

$$= (100)^5 + {}^5C_1 \times (100)^4 \times (-1) + {}^5C_2 \times (100)^3 \times (-1) + {}^5C_3 \times (100)^2 \times (-1)^3 + {}^5C_4 \times (100) \times (-1)^4 + (-1)^5$$

$$= 10000000000 - 5 \times 100000000 + 10 \times 1000000 - 10 \times 10000 + 5 \times 100 - 1$$

$$= 10000000000 - 500000000 + 10000000 + 100000 + 500 - 1$$

$$= 9509900499$$

प्रश्न 10 द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए बताइए कौन-सी संख्या बड़ी है-

$(1.1)^{10000}$ या 1000

उत्तर-

$$(1.1)^{10000} = (1+0.1)^{10000}$$

$$= 1^{10000} + {}^{10000}C_1 \times 1^{9999}(0.1)^1$$

$$= 1 + 1000 \times (0.1) + \ldots = 1001 + \ldots$$

स्पष्ट है कि $(1.1)^{10000}$ संख्या 1000 से बड़ी है।

प्रश्न 11 $(a+b)^4 - (a-b)^4$ का विस्तार कीजिए। इसका प्रयोग करके $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$(a+b)^4 = a^4 + {}^4C_1 a^3 b + {}^4C_2 a^2 b^2 + {}^4C_3 ab^3 + b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

इसी प्रकार,

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

घटने पर,

$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 2(4a^3b + 4ab^3)$$

$$= 8ab(a^2 + b^2)$$

इसमें $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}$ रखने पर,

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$$

$$= 8\sqrt{3}.\sqrt{2}[(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2]$$

$$= 8\sqrt{6}(3+2) = 40\sqrt{6}$$

प्रश्न 12 $(x+1)^6 + (x-1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए। इसका प्रयोग करके या अन्यथा $(\sqrt{2}+1)^6 + (\sqrt{2}-1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$(x+1)^6 = x^6 + {}^6C_1 x^5 1^1 + {}^6C_2 x^4 \times 1^2 + {}^6C_4 x^2 1^4 + {}^6C_5 x.1^5 + 1^6$$

$$= x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$$

इसी प्रकार, $(x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

जोड़ने पर, $(x+1)^6 + (x-1)^6 = 2(x^6 + 15x^4 + 15x^2) + 1$

इसमें $x = \sqrt{2}$ रखने पर,

$$(\sqrt{2}+1)^6+(\sqrt{2}-1)^6=2\left[(\sqrt{2})^6+15(\sqrt{2})^4+15(\sqrt{2})^2+1\right]$$

$$=2[8+15\times 4+15\times 2+1]$$

$$=2[8+60+30+1]$$

$$=2\times 99$$

$$=198$$

प्रश्न 13 दिखाइए कि $9^{n+1}-8n-9$, 64 से विभाज्य है जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

उत्तर-

$(1+x)^{n+1}$ का प्रसार करने पर,

$$(1+x)^{n+1}=1+{}^{n+1}C_1x+{}^{n+1}C_2x^2+{}^{n+1}C_2x^3+\ldots$$

$x=8$ रखने पर,

$$9^{n+1}=1+(n+1)8+{}^{n+1}C_2\times 64+{}^{n+1}C_3 8^3+\ldots$$

$$=8n+9+{}^{n+1}C_2\times 64+{}^{n+1}C_3 8^3+\ldots$$

$$\therefore 9^{n+1}-8n-9=64\times({}^{n+1}C_2+{}^{n+1}C_3.8^3+\ldots)$$

अतः $9^{n+1}-8n-9$, संख्या 64 से विभाज्य है।

प्रश्न 14 सिद्ध कीजिए कि

$$\sum_{r=0}^{n}3^r\ {}^nC_r=4^n$$

उत्तर-

$$\sum_{r=0}^{n} 3^r\ {}^nC_r = 3^\circ\ {}^nC_0 + 3^1\ {}^nC_1 + 3^2\ {}^nC_2 + \ldots + 3^n.\ {}^nC_n$$

$$= 1 + {}^nC_1.3 + {}^nC_2.3^2 + \ldots\ {}^nnC_n.3^n$$

$$= (1+3)^n = 4^n$$

प्रश्नावली 8.2 (पृष्ठ संख्या 183-184)

प्रश्न 1 गुणांक ज्ञात कीजिए:

$(x + 3)^8$ में x^5 का

उत्तर-

$(x+3)^8$ का व्यापक पद $= {}^8C_r x^{8-r}.3^r$

$x^{8-r} = x^5$

अर्थात $8 - r = 5$ या $r = 3$

$\therefore x^5$ का गुणांक $= {}^8C_3(3)^3$

$= \frac{8\times7\times6}{1\times2\times3} \times 27$

$= 56 \times 27 = 1512$

प्रश्न 2 गुणांक ज्ञात कीजिए:

$(a + 2b)^{12}$ में x^5b^7 का।

उत्तर-

$(a-2b)^{12}$ का व्यापक पद $= {}^{12}C_r a^{12-r}(-2b)^r$

$= {}^{12}C_r a^{12-r}(-1)^r.2^r b^r$

$\because b^r = b^7$

$\therefore r = 7$

अब $r = 7$ रखने पर, $= {}^{12}C_7 . a^{12-7} . (-1)^7 . 2^7 . b^7$

$= a^5 b^7 . {}^{12}C_7 . 2^7 = -{}^{12}C_5 . 2^7$

$= -\frac{12\times11\times10\times9\times8}{1\times2\times3\times4\times5} 128 = -101376$

प्रश्न 3 प्रसार में व्यापक पद लिखिए-

$(x^2 - y)^6$

उत्तर-

$(x^2 - y)^5$ का व्यापक पद

$= {}^6C_r (x^2)^{6-r} (-y)^r$

$= (-1)^r \, {}^6C_r . x^{12-2r} y^r$

प्रश्न 4 प्रसार में व्यापक पद लिखिए-

$(x^2 + yx)^{12}, x \neq 0$

उत्तर-

$(x^2 - yx)^{12}$ का व्यापक पद $= {}^{12}C_r (x^2)^{12-r} (-yx)^r$

$= {}^{12}C_r x^{24-2r} (-1)^r . y^r x^r$

$= (-1)^r \, {}^{12}C_r x^{24-r} y^1$

प्रश्न 5 $(x - 2y)^{12}$ के प्रसार में चौथे पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$(x-2y)^{12}$ का चौथा पद,

$$= T_{3+1} = {}^{12}C_3 x^{12-3}(-2y)^3$$

$$= \frac{12\times11\times10}{1\times2\times3} \times x^9(-1)^3.2^3y^3$$

$$= -220 \times 8x^9x^3 = -1760\ x^9y^3$$

प्रश्न 6 $\left(9x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ के प्रसार में 13 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$\left(9x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ के प्रसार में 13 वाँ पद

$$T_{12+1} = {}^{18}C_{12}(9x)^{18-12}\left(-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{12}$$

$$= {}^{18}C_{12}9^6 \times x^6 \times \frac{(-1)^{12}}{3^{12}(\sqrt{x})^{12}}$$

$$= \frac{18\times17\times16\times15\times14\times13}{1\times2\times3\times4\times5\times6} \times \frac{3^{12}\times x^6}{3^{12}\times x^6}$$

$$= 18564$$

प्रश्न 7 प्रसारो में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

$\left(3-\frac{x^3}{6}\right)^7$

उत्तर-

$\left(3-\frac{x^3}{6}\right)^7$ में 7 + 1 = 8 पद है

$\therefore$ पहले मध्य पद, $T_4 = T_{3+1} = \frac{8}{2}$ वाँ पद = 4वाँ पद $= {}^7C_3 3^{7-3}\left(-\frac{x^3}{6}\right)^3$

$$= \frac{7\times6\times5}{1\times2\times3} 3^4(-1)^3 . \frac{x^9}{6^3}$$

$$= -35 \frac{3^4 x^9}{2^3 . 3^3}$$

$$= -\frac{34\times3\times x^9}{2^3 . 3^3}$$

$$= -\frac{35\times3\times x^9}{8}$$

$$= -\frac{105x^9}{8}$$

दूसरा मध्य पद, $T_5 = T_{4+1} = (4+1)$ वाँ पद = 5 वाँ पद,

$$= C_4 . 3^{7-4}\left(-\frac{x^3}{6}\right)^4$$

$$= 7C_4 . 3^3(-1)^4 \frac{x^{12}}{6^4}$$

$$= \frac{7\times6\times5\times4!}{1\times2\times3\times4!} \times \frac{3^3\times x^{12}}{2^4\times3^4}$$

$$= \frac{35\times x^{12}}{16\times3} = -\frac{35}{48} x^{12}$$

प्रश्न 8 प्रसारो में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

$\left(\frac{x}{3} + 9y\right)^{10}$

उत्तर-

इसमें 10 + 1 = 11 पद है जो विषम संख्या है।

मध्य पद $= \frac{11+1}{2} = 6$ वाँ पद

$$= {}^{10}C_5 \left(\frac{x}{3}\right)^5 (9y)^5$$

$$= \frac{10\times9\times8\times7\times6\times}{1\times2\times3\times4\times5} \cdot \frac{x^5}{3^5} . 9^5 . y^5$$

$$= 252. \frac{3^{10}}{3^5} . 9^5 y^5$$

$$= 252 \times 243x^5 . y^5$$

$$= 61236\ x^5 y^5$$

प्रश्न 9 $(1 + a)^{m + n}$ के प्रसार में सिद्ध कीजिए की a^m तथा a^n के गुणांक बराबर है।

उत्तर-

$(1 + a)^{m+n}$ का व्यापक पद $= {}^{m+n}C_r 1^{m+n}, a^r = {}^{m+n}C_r a^r$

दिया है: $a^m = a^r$ अर्थात् $r = m$

a^m का गुणांक $= {}^{m+n}C_m$

और $a^n = a^r$ अर्थात् $r = n$

a^n का गुणांक $= {}^{m+n}C_n = {}^{m+n}C_{m+n-n} = {}^{m+n}C_m$

अतः a^m और a^n के गुणांक बराबर है।

प्रश्न 10 $(x + 1)^n$ के प्रसार में (r - 1) वाँ, r वाँ और (r + 1) वें पदों के गुणांक में 1 : 3 : 5 का अनुपात हो तो n तथा r का मान ज्ञात करो।

उत्तर-

$(x + 1)^n$ का व्यापक पद $T_{r+1} = {}^nC_r . x^{n-r}$

$\therefore (r + 1)$ वें के पद का गुणांक $= {}^nC_r$

$\therefore (r + 1)$ वें पद का गुणांक $= {}^nC_{r-2}$

r वें पद का गुणांक $= {}^nC_{r-1}$

दिया हुआ है कि ${}^{n}C_{r-2} : {}^{n}C_{r-1} : {}^{n}C_{r} = 1 : 3 : 5$

$$\frac{{}^{n}C_{r-1}}{{}^{n}C_{r}} = \frac{3}{5}$$

या $\dfrac{\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}}{\frac{n!}{r!(n-r)!}} = \dfrac{3}{5}$

या $\dfrac{(r)!(n-r)!}{(r-1)!(n-r+1)!} = \dfrac{3}{5}$

या $\dfrac{r(r-1)!(n-r)!}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)!} = \dfrac{3}{5}$

या $\dfrac{r}{n-r+1} = \dfrac{3}{5}$

या $5r = 3n - 3r + 3$

$$3n - 8r = -3$$

इसी प्रकार ${}^{n}C_{r-2} : {}^{n}C_{r-1} = 1 : 3$

$$\frac{{}^{n}C_{r-2}}{{}^{n}C_{r-1}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{n!}{(r-2)!(n-r+2)!}}{\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)}} = \frac{1}{3}$$

या $\dfrac{(r-1)!(n-r+1)!}{(r-2)!(n-r+2)!} = \dfrac{1}{3}$

या $3r - 3 = n - r + 2$

$$n - 4r = -5$$

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर, $n = 7$

और $r = 3$

अतः $n = 7, r = 3$

प्रश्न 11 सिद्ध कीजिए कि $(1 + x)^{2n}$ के प्रसार में xn का गुणांक, $(1 + x)^{2n - 1}$ के प्रसार में x^n के गुणांक का दुगुना होता है।

उत्तर-

$$(1+x)^{2n} \text{ के प्रसार में व्यापक पद } = {}^{2n}C_r x^r$$

$$\text{यदि } x^n = x^r \text{ अर्थात् } r = n$$

$$x^n \text{ का गुणांक } = {}^{2n}C_n \ldots (i)$$

$$(1+x)^{2n\text{-}1} \text{ के प्रसार में व्यापक पद } = 2n - 1C_r x^r$$

$$\text{यदि } x^r = x^n \text{ अर्थात् } r = n$$

$$\therefore x^n \text{ का गुणांक } = {}^{2n-1}C_n \ldots (ii)$$

समीकरण (i) व (ii) के गुणांक का अनुपात,

$$\frac{{}^{2n}C_n}{{}^{2n-1}C_n} = \frac{\frac{(2n)!}{n!n!}}{\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!} \times \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)(2n-1)!}{n[(n-1)!]n!} \times \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!} = 2 \text{ इति सिद्धम्}$$

प्रश्न 12 m का धनात्मक मां ज्ञात कीजिए जिसके लिए $(1 + x)^m$ के प्रसार में x^2 गुणांक 6 हो।

उत्तर-

$$(1+x)^x = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$

$$x^2 \text{ का गुणांक } = \frac{m(m-1)}{2} = 6 \text{ (दिया है)}$$

अर्थात् $m(m-1)=12$

$m^2-m-12=0$ अर्थात् $(m-4)(m+3)=0$

$m\neq -3 \therefore m=4$

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 188)

प्रश्न 1 यदि $(a + b)^n$ के प्रसार में प्रथम तीन पद क्रमशः 729, 7290 तथा 30375 हों तो a, b तथा n ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$(a+b)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}b + {}^nC_2 a^{n-2}n^2 + \dots$$

हमें दिया है: $a^n = 279 \dots (i)$

$${}^nC_1 a^{n\text{-}1} b = na^{n-1}b = 7290 \dots (ii)$$

समीकरण (ii) को (i) से भाग देने पर,

$$\frac{na^{n-1}}{a^n} = \frac{7290}{729} = 10$$

या $n\frac{b}{a} = 10 \dots (iv)$

समीकरण (iii) को (ii) से भाग देने पर,

$$n \times \frac{2}{n-1} = \frac{10\times 6}{25}$$

$$= \frac{60}{25} = \frac{12}{5}$$

या $\frac{n}{n-1} = \frac{6}{5}$

$$6n-6=5n$$

या $6n-5n-6$ या $n=6$

n का मान सभी (iv) में रखने पर, $6\frac{b}{a} = 10$

या $\frac{b}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$b = \frac{5}{3}a$

समीकरण (i) से, $a^n = 729$

या $a^6 = 729$ अर्थात् $a^6 = 3^6$

$\therefore a = 3$

अब $b = \frac{5}{3} \times 3 = 5$

अत: $a = 3, b = 5,$ तथा $n = 6$

प्रश्न 2 यदि $(3 + ax)^9$ के प्रसार में x^2 और x^3 के गुणांक समान हों, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$(3 + ax)^9$ के प्रसार में व्यापक पद $= {}^9C_r 3^{9-r}(ax)^r$

$r = 2$ रखने से, x^2 का गुणनक $= {}^9C_2 . 3^{9-2} a^2$

$r = 3$ रखने से, x^3 का गुणांक $= {}^9C_3 . 3^{9-3} a^3$

$= \frac{9\times8\times7}{6} \times 3^6 . a^3$

$= 84.3^6 a^3 \ldots (ii)$

दोनों गुणांक समान है

$\therefore$ (i) और (ii) से, $36.3^7 . a^2 = 84.3^6 . a^3$

$a = \frac{36.3^7}{84.3^6}$

$= \frac{36\times3}{84} = \frac{9}{7}$

प्रश्न 3 द्विपदीय प्रमेय का प्रयोग करते हुए गुणनफल $(1 + 2x)^6 (1 - x)^7$ में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$(1+2x)^6 = 1 + {}^6C_1(2x) + {}^6C_2(2x)^2 + {}^6C_3(2x)^3$$
$$+ {}^6C_4(2x)^4 + {}^6C_5(2x)^5 + \ldots$$
$$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + \ldots$$
$$\text{और } (1-x)^7 = 1 - {}^7C_1x + {}^7C_2x^2 - {}^7C_3x^3 + {}^7C_4x^4 - {}^7C_5x^5 + \ldots$$
$$= 1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^4 + \ldots$$

इन दोनों के गुणनखंड में से x^5 के गुणांक का चयन करते हुए

$$x^5 \text{ का गुणांक} = 192 - 7 \times 240 + 21 \times 160 - 35 \times 60 + 35 \times 12 - 21 \times 1$$
$$= 192 - 1680 + 3360 - 2100 + 420 - 21$$
$$= 171$$

प्रश्न 4 यदि a और b भिन्न-भिन्न पूर्णांक हों, तो सिद्ध कीजिए कि $a^n - b^n$ का एक गुणनखंड $(a - b)$ है, जबकि n एक धन पूर्णांक है।

उत्तर-

$$a = b + (a-b)$$
$$a^n = [b + (a+b)]^n$$
$$= b^n + {}^nC_1a^{n-1}(a-b) + {}^nC_2b^{n-2}(a-b)^2 + \ldots {}^nC_n(a-b)^n$$
$$\therefore a^n - b^n = {}^nC_1b^{n-1}(a-b) + {}^nC_2b^n \times (a-b)^2 + \ldots {}^nC_n(a-b)^n$$
$$= (a-b)\left[{}^nC_1b^{n-1} + {}^nC_2b^{n-2}(a-b) + \ldots + {}^nC_n(a-b)^{n-1}\right]$$

अतः स्पष्ट है कि $a^n - b^n$ का $a - b$ एक गुणनखंड है।

प्रश्न 5 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$(a+b)^6$ और $(a-b)^6$ का प्रसार करने पर,

$(a+b)^6 = a^6 + {}^6C_1a^5b + {}^6C_2a^4b^2 + {}^6C_3a^3b^3 + {}^6C_4a^2b^4 + {}^6C_5ab^5 + {}^6C_6b^6$

$= a^5 + 6a^5b + 15a^4 + b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \ldots (i)$

इसी प्रकार $(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + {}^6C_6b^6 \ldots (ii)$

समीकरण (i) में से (ii) घटने पर,

$(a+b)^6(a-b)^6 = 2(6a^5b + 20a^3b^3 + 6ab^5$

$= 4ab(3a^4 + 10a^2b^2 + 3b^4)$

$a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}$ रखने पर,

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6 - (\sqrt{3}+\sqrt{2})^6 = 4\sqrt{3}\sqrt{2}\left[3(\sqrt{3})^4 + 10(\sqrt{3})^2(\sqrt{2})^2 + 3(\sqrt{2})^4\right]$

$= 4\sqrt{6}(27 + 60 + 12)$

$= 4\sqrt{6} \times 99 = 36\sqrt{6}$

प्रश्न 6 $\left(a^2 + \sqrt{a^2-1}\right)^4 + \left(a^2 - \sqrt{a^2-1}\right)^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$a^2 = x, \sqrt{a^2-1} = y$ रखने पर,

$(x+y)^4 = x^4 + {}^4C_1x^3y + {}^4C_2x^2y^2 + {}^4C_3xy^3 + {}^4C_4y^4$

$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

इसी प्रकार,

$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

दोनों को जोड़ने पर,

$(x-y)^4 + (x-y)^4 = 2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)$

x और y का मान रखने पर,

$$(a^2+\sqrt{a^2-1})^4+(a^2-\sqrt{a^2-1})^4$$

$$=2\left[(a^2)^4+6(a^2)^2(\sqrt{a^2-1})^2+(\sqrt{a^2-1})^4\right]$$

$$=2[a^8+6a^4(a^2-1)+(a^2-1)^2]$$

$$=2[a^8+6a^6-6a^4+a^4-2a^2+1]$$

$$=2[a^8+6a^6-5a^4-2a^2+1]$$

$$=2a^8+12a^6-10a^4-4a^2+2$$

प्रश्न 7 $(0.99)^5$ प्रसार के पहले 3 पदों का प्रयोग करते हुए इसका निकटतम मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$(0.99)^5=(1-0.01)^5=1-\ {}^5C_1(0.01)+\ {}^5C_2\times(0.01)^2+\ \ldots$$

$$=1-5\times0.01+10\times0.0001$$

$$=1-0.05+0.001=1.001-0.05$$

$$=0.951$$

प्रश्न 8 यदि $\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ के प्रसार में आरम्भ से 5वेँ और अंत से 5वें पद का अनुपात $\sqrt{6}:1$ हो तो n का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ के प्रसार में आरम्भ से 5वाँ पद

$$=\ {}^nC_4\left(\sqrt[4]{2}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4$$

$$=\ {}^nC_4 2^{\frac{n-4}{4}}3^{\frac{4}{4}}=\ {}^nC_4 2^{\frac{n-4}{4}}\frac{1}{3}\ \ldots(i)$$

दिए गए व्यजक के प्रसार में $n + 1$ पद है।

अंत से 5वाँ पद $= [(n + 1) - 5 + 1]$ वाँ पद प्रारम्भ से $(n - 3)$ वाँ पद

$$= {}^nC_{n-4}\left(\sqrt[4]{2}\right)^{n-(n-4)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{n-4}$$

$$= {}^nC_4 2^{\frac{4}{4}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-4}{4}} [\because\ {}^nC_2 = {}^nC_{n-2}$$

$$= {}^nC_4 2.\frac{1}{3^{\frac{n-4}{4}}} \ldots (ii)$$

समीकरण (i) को (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{\text{प्रारंभ से 5 वाँ पद}}{\text{अंत से 5 वाँ पद}}$$

$$= \frac{{}^nC_4 2^{\frac{n-4}{4}}\frac{1}{3}}{{}^nC_4 2\frac{1}{\frac{n-4}{4}}} = \frac{\sqrt{6}}{1}$$

या $\dfrac{2^{\frac{n}{4}-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{4}-2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{1}$

या $(2.3)^{\frac{n}{4}-2} = \dfrac{\sqrt{6}}{1}$

या $6^{\frac{n}{4}-2} = 6^{\frac{1}{2}}$

अर्थात् $\frac{n}{4} - 2 = \frac{1}{2}$

या $\frac{n}{4} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

या $n = 10$

प्रश्न 9 $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$ का द्विपदीय प्रसार ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4=\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{x}\right]^4$$

$$=\left(1+\frac{x}{2}\right)^4+{}^4C_1\left(1+\frac{x}{2}\right)^3.\left(-\frac{2}{x}\right)+{}^4C_2\left(1+\frac{x}{2}\right)^2.\left(-\frac{2}{x}\right)^2$$

$$+{}^4C_3\left(1+\frac{x}{2}\right)^4\left(-\frac{2}{x}\right)+{}^4C_4\left(-\frac{2}{x}\right)^4$$

$$=\left(1+\frac{x}{2}\right)^4+4\left(1+\frac{x}{2}\right)^3\left(-\frac{2}{x}\right)+6\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{4}{x^2}\right)$$

$$+4\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{8}{x}\right)+\left(\frac{16}{x^4}\right)$$

$$=\left(1+\frac{x}{2}\right)^4,\left(1+\frac{x}{2}\right)^3,\left(1+\frac{x}{2}\right)^2$$ का प्रसार करने पर,

$$=\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4=\left(1+4.\frac{x}{2}+6\frac{x^2}{4}+4.\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}\right)$$

$$-\frac{8}{x}\left(1+3.\frac{x}{2}+3.\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}\right)+\frac{24}{x^2}\left(1+x+\frac{x^2}{4}\right)-\frac{32}{x^3}\left(1+\frac{x}{2}\right)+\frac{16}{x^4}$$

$$=\left(1+2x=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{x^4}{16}\right)-\frac{8}{x}\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}x^2+\frac{x^3}{8}\right)$$

$$+\frac{24}{x^2}\left(1+x+\frac{x^2}{4}\right)-\frac{32}{x^3}\left(1+\frac{x}{2}\right)+\frac{16}{x^4}$$

$$=\left(1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{x^4}{16}\right)-\left(\frac{8}{x}+12+6x+x^2\right)$$

$$+\left(\frac{24}{x^2}+\frac{24}{x}+6\right)-\left(\frac{32}{x^3}+\frac{16}{x^2}\right)+\frac{16}{x^4}$$

$$= \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{2} + \left(\frac{3}{2} - 1\right)x^2 + (2-6)x + (1-12+6)$$

$$+ (-8+24)\frac{1}{x} + (24-16)\frac{1}{x^2} - \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}$$

$$= \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x - 5 + \frac{16}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^4}$$

प्रश्न 10 $(3x^2 - 2ax + 33a^2)^3$ का द्विपदीय प्रमेय से प्रसार ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$[3x^2 - a(2x - 3a)]^3$$

$$= (3x^3)^3 - 3C_1(3x^2).a(2x-3a) + {}^3C_2(3x^2)a^2(2x-3a)^2 - a^3(2x-3a)^3$$

$$= 27x^6 - 3 \times 9x^4a(2x-3a) + 3 \times 3x^3a^2(4x^2 - 12a\,x + 9a^2)$$

$$- a^3(8x^3 - 3 \times 4x^2 \times 3a + 3 \times 2x \times 9a^2 - 27a^3)$$

$$= 27x^6 - 54ax^5 + 81a^2x^4 + 36a^2x^4 - 108a^3x^3 + 81a^4x^2 - 8a^3x^3$$

$$+ 36a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6$$

$$= 27x^6 - 54ax^5 + 117a^2x^4 - 116a^3x^3 + 117a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6$$