गणित

अध्याय-6: क्रमचय और संचयं

परिभाषा (Definition)

दी हुई वस्तुओं के एक समूह में से एक बार में कुछ अथवा सभी वस्तुओं को लेकर जितने भिन्न-भिन्न विन्यास (Arrangements) बनाये जा सकते हैं, उनमें से प्रत्येक विन्यास को क्रमचय (Permutation) कहते हैं।

माना कि हमारे पास तीन वस्तुएँ a, b तथा c हैं। यदि इनमें से एक बार में दो वस्तुओं को लेना हो तो सम्भव भिन्न-भिन्न विन्यास निम्न होंगे

ab, ba, bc, cb, ac, ca

इनकी संख्या 6 है।इनमें से प्रत्येक क्रमचय कहलाता है।

पुनः यदि वस्तुओं a, b, c में से सभी को एक साथ लेकर विन्यास बनाते हैं, तो वे निम्न होंगे

abc, acb, bca, bac, cab, cba

इन क्रमचयों की संख्या 6 है।

इसी प्रकार, यदि हमारे पास चार वस्तुओं a, b, c, d का एक दिया हुआ समूह है तो इनमें से दो वस्तुओं को एक बार में लेने से निम्न क्रमचय बनेंगे

ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc

इन क्रमचयों की संख्या 12 है।

पुनः a, b,c, d में से तीन वस्तुओं को एक बार में लेने से 24 क्रमचय बनेंगे जो निम्न हैं

abc, acb, bac, bca, cab, cba, abd, adb, bad, bda, dab, dba, acd, adc, cad, cda, dac, dca, bcd, bdc,cbd, cdb, dbc, dcb,

यदि a, b, c, d में से सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर विन्यास बनाने हों, तो निम्न 24 विन्यास बनेंगे

abcd, abdc, acdb, acbd, adbc, adcb, bcad, bcda, badc, bacd, bdca, bdac, cdab, cdba, cabd, cadb, cbda, cbad, dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba.

गणना के नियम (Law of Counting)

गणना के नियमों को निम्नांकित प्रकार से विभाजित किया जाता है

(a) गणना के गुणन का नियम-(Law of Multiplication of Counting)-यदि किसी कार्य को करने कीmभिन्नभिन्न विधियाँ हों और जब यह कार्य उनमें से किसी एक विधि के द्वारा किया जा चुका हो, तब यदि किसी दूसरे कार्य को करने की n विधियाँ हों, तो दोनों कार्यों को साथ-साथ करने की कुल m x n विधियाँ होंगी।

व्याख्या : जब पहला कार्य किसी एक विधि से कर लिया गया है, तो दूसरा कार्य n विधियों से किया जा सकता है। इस प्रकार यदि पहले कार्य को करने के लिए केवल एक विधि का ही प्रयोग किया गया हो, तो दोनों कार्य साथ-साथ n विधियों से किये जा सकते हैं। परन्तु पहला कार्य m विधियों से हो सकता है तथा इनमें से प्रत्येक विधि से पहला कार्य किये जाने पर दूसरा कार्य n विधियों से हो सकता है, अतः दोनों कार्य एक साथ m x n विधियों द्वारा किये जा सकते हैं।

यह सिद्धान्त दो से अधिक कार्यों के लिए भी प्रयक्त किया जा सकता है। यदि पहला कार्य m प्रकार से किया जा सकता है तथा दूसरा कार्य n प्रकार से किया जा सकता है, जबकि पहला कार्य m प्रकारों में से किसी एक प्रकार से किया जा चुका है तथा यदि तीसरा कार्य p प्रकार से किया जा सकता है जबकि पहले दोनों कार्य उनको करने के भिन्न-भिन्न प्रकारों में से किसी एक प्रकार से ही किये गये हैं, तो तीनों कार्य साथ-साथ m x n x p प्रकारों से किये जा सकते हैं।

(b) गणना के योग का नियम (Law of addition of Counting) यदि दो घटनाएँ स्वतन्त्र रूप से क्रमशः m एवं n प्रकार से घटित होती हैं, तब दोनों घटनाएँ (m + n) प्रकार से घटित हो सकती हैं।

श्री महावीराचार्य का जीवन परिचय एवं योगदान (Biography of Mahaviracharya and its Contribution)

महावीराचार्य का जन्म काल 850 ई. सं. में हुआ।महावीराचार्य ने गणितसार, ज्योतिष पटल एवं षत्रिशंका आदि मौलिक एवं अभूतपूर्व ग्रंथ लिखे। अपने इन ग्रंथों के कारण महावीराचार्य ने भारतीय गणित के क्षेत्र में बड़ा महत्वपूर्ण स्थान प्राप्त किया है। - महावीराचार्य ने युगपत समीकरण को हल करने का नियम भी प्रतिपादित किया है तथा वर्गसमीकरण को व्यावहारिक प्रश्नों द्वारा समझाया है। उन्होंने इन प्रश्नों को दो भागों में विभक्त किया है। प्रथम वे प्रश्न जिनमें अज्ञात राशि के वर्गमूल का उल्लेख होता है तथा द्वितीय वे प्रश्न जिनमें अज्ञात राशि के वर्ग का निर्देश रहता है। उन्होंने अंक संबंधी जोड़, घटाना, गुणा, भाग, वर्ग, वर्गमूल और घनमूल इन सब

परिक्रमों का भी उल्लेख किया है। - महावीराचार्य ने अपने ग्रंथ 'गणितसार-संग्रह' में बीजगणित से संबंधित अनेक सिद्धान्तों का भी प्रतिपादन किया है। उन्होंने इसमें मूलधन, ब्याज, मिश्रधन और समय ज्ञात करने एवं भिन्न संबंधी शेषमूल, भाग, शेष संबंधी अनेक ऐसे नियमों का वर्णन किया है जो प्राचीनकाल तथा आधुनिक गणित में बहुत महत्वपूर्ण हैं।

उन्होंने 'गणितसार-संग्रह' में 'न' वस्तुओं में से 'र' वस्तुओं को लेकर एक साथ संचय संख्या ज्ञात करने के लिये निम्नलिखित व्यापक सूत्र प्रदान किया हैन.

$$^{न}स_{र} = \frac{न(न-1)(न-2)\ldots\ldots(न-र+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots र}$$

इस सूत्र के आविष्कारक श्री महावीराचार्य प्रथम भारतीय गणितज्ञ ही नहीं, अपितु विश्व के प्रथम गणितज्ञ थे। यह सूत्र यूरोप में महावीराचार्य के लगभग आठ सौ साल बाद अर्थात् सत्रहवीं शताब्दी में खोजा गया था।

महावीराचार्य ने निम्नलिखित सर्वसमिका का उपयोग किया हैं।

$$\frac{अ}{ब} = \frac{स}{द} = \frac{क}{ख} = \frac{अ+स+क\ldots}{ब+द+ख\ldots}$$

दीर्घवृत्त की परिधि के लिये महावीराचार्य ने निम्नांकित सूत्र दिया है

$$\sqrt{24अ^2 + 16 + ब^2}$$

जहाँ, और इसके क्रमशः बड़े और छोटे अक्षार्द्ध हैं। महावीराचार्य ने एकांशक भिन्नों को बड़ा महत्व दिया है एकांशक भिन्न वे हैं जिनके अंश में 1 होता है उन्होंने किसी हुई भिन्न को एक से अधिक एकांशक भिन्नों के जोड़ के रूप परिवर्तित करने के अनेक नियम दिए हैं। उन्होंने 1 को या किस अन्य एकांशक भिन्न को विविध प्रकार के एकांशक के जोड़ों के रूप में व्यक्त करने के लिये कई नियम दिए हैं। उन्होंने 1 को 'न एकांशक भिन्नों के जोड़ के रूप में व्यक्त करने के लिये ज नियम दिए हैं उसे अग्र प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है-

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots \ldots + \frac{1}{3^{-2}} + \frac{1}{2.3^{-2}}$$

यदि न = 5, तो इस नियम के अनुसार

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}$$

महावीराचार्य ने आरंभ में ही शन्य के प्रयोग के बारे में जो नियम दिए हैं, उन्हें आधुनिक संकेतों से निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है–

अ + 0 = अ, अ - 0 = अ, अ x 0 = 0, अ + 0 = अ

यहाँ अंतिम कथन सही नहीं है। किसी राशि को शून्य से भाग देने पर परिणाम अनंत होता है। भास्कराचार्य (1150 ई.) ने ऐसी राशि को 'ख-हर' यानी अनंत कहा है।

श्रीराम-चक्र-सोने-चांदी का यंत्र या चक्र बनाने के लिए हम ज्यामिति का उपयोग करते हैं। ये यंत्र अक्सर फर्श पर विशेष रूप से तैयार किये गये पाउडरों द्वारा बनाये जाते हैं। भारत में पूजा के लिये स्वास्तिक, महासुदर्शन, ह्रीं चक्र आदि का प्रयोग किया जाता है परन्तु ह्रीं चक्र बनाना बहुत जटिल है इसलिए केरल वासी 'कटायापदी' का उपयोग करते हैं।

अब हम एक ऐसे आश्चर्यजनक जादुई चक्र का वर्णन करने जा रहे हैं जिसको 29 प्रकार से जोड़ने पर संख्याओं का योग 34 ही आता है, इसे श्रीराम-चक्र कहते हैं। श्रीराम-चक्र का प्रयोग प्राचीनकाल से ही किसी वस्तु, स्थान आदि को पवित्र करने के लिये किया जाता रहा है । संख्याओं के जोड़ने के प्रकार निम्नलिखित है।

9	16	5	4
7	2	11	14
12	13	8	1
6	3	10	15

1. स्तंभानुसार (4 प्रकार)।

2. पंक्तिनुसार (4 प्रकार)।

3. विकर्णतः (2 प्रकार)। ।

4. किन्हीं भी चार खानों की संख्याएँ (७ प्रकार)।

5. पहली पंक्ति की कोई भी दो आसपास की संख्याएँ और उसके साथ-साथ अंतिम पंक्ति की कोई भी दो संख्याएँ (3 प्रकार)।

6. पहले स्तंभ की कोई भी दो आसपास की संख्याएँ और उसके साथ-साथ अंतिम स्तंभ की कोई भी दो संख्याएँ (3प्रकार)।

7.दो संगत खानों की कोनों की आमने-सामने की संख्याएँ . (2 प्रकार)।

8. कोनों पर किन्हीं भी चार खानों की संख्याएं सामने के कोने पर किन्हीं भी चार खानों की संख्या के बराबर होती है (2 प्रकार)।

उदाहरण 1. 10 काली व 8 सफेद गेंदों में से 1 काली व 1 सफेद गेंद कितने प्रकार से चुनी जा सकती है ?

हल : 10 काली गेंदों में से 1 काली गेंद 10 प्रकार से चुनी जा सकती है तथा 8 सफेद गेंदों में से 1 सफेद गेंद 8 प्रकार से चुनी जा सकती है।

अतः 1 काली व 1 सफेद गेंद साथ-साथ 10 x 8 = 80 प्रकारों से चुनी जा सकती है।

उदाहरण 2. रायपुर से नागपुर के बीच 20 बसें चलती हैं। यदि कोई व्यक्ति रायपुर से नागपुर किसी एक बस से जाकर किसी अन्य बस से लौटना चाहे तो यह कितने प्रकार से सम्भव है?

हल : रायपुर से नागपुर के बीच 20 बसें चलती हैं। अतएव रायपुर से नागपुर कोई व्यक्ति 20 प्रकार से जा सकता है। लौटते समय वह केवल 19 बसों का ही प्रयोग कर सकता है, क्योंकि वह जिस बस से गया था, उससे उसे नहीं लौटना है। इस प्रकार वह 19 तरीकों से लौट सकता है।

अतः किसी बस से रायपुर से नागपुर जाकर किसी अन्य बस से लौटने की कुल 20 x 19 380 विधियाँ हैं।

उदाहरण 3. किसी शहर में 4 सिनेमा हॉल हैं। 3 लड़कियाँ उस शहर में आती हैं। प्रत्येक लड़की अलग-अलग सिनेमा हॉल में फिल्म देखना चाहती है। बताइए वे कितने प्रकार से फिल्म देख सकती हैं ?

हल : पहली लड़की किसी सिनेमा हॉल को 4 प्रकार से चुन सकती है। पहली लड़की द्वारा किसी सिनेमा हॉल को चुन लेने के बाद, दूसरी लड़की शेष 3 सिनेमा हॉलों में से किसी एक को 3 प्रकार से चुन सकती है (क्योंकि प्रत्येक लड़की अलग-अलग सिनेमा हॉल में फिल्म देखना चाहती है)। अत: पहली दो लड़कियाँ 4 x 3 = 12 प्रकार से सिनेमा हॉल चुन सकती हैं। पहली दोनों लड़कियों के द्वारा सिनेमा हॉल चुन लिए जाने के बाद अब केवल दो सिनेमा हॉल शेष रह जाते हैं, जिनमें से किसी एक को तीसरी लड़की 2 प्रकार से चुन सकती है।

अतः तीनों लड़कियों द्वारा अलग-अलग सिनेमा हॉलों में फिल्म देखने की कुल विधियाँ = 4 x 3 x 2 = 24.

उदाहरण 1. अंक 1,2,3,4,5 से चार अंकों वाली कितनी संख्याएँ बनेंगी जबकि कोई अंक एक से अधिक बार न आये?

हल : अंकों की कुल संख्या = 5. प्रत्येक बार में 4 अंक लेने हैं।

अतः अभीष्ट संख्या = $^5P_4$ = 5.4.3.2.= 120.

उदाहरण2. 100 और 1000 के बीच कितनी संख्याएँ 1,2, 3,4,5,6 और 7 से बनायी जा सकती हैं ?

हल : 100 और 1000 के बीच तीन अंकों की संख्या होंगी।

∴ 7 अंकों में से 3 अंकों को लेकर बनने वाली विभिन्न संख्याएँ

= $^7P_3$

$$=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=210.$$

उदाहरण 3. 100 और 1000 के बीच कितनी संख्याएँ 2,3, 0, 4, 8, 9 अंकों से बनाई जा सकती है जबकि अंकों की पुनरावृत्ति न हो? .

हल : 100 और 1000 के बीच तीन अंकों की संख्याएँ होंगी।

6 अंकों में से तीन अंकों की संख्या = $^6P_3$ = 120

इनमें वे संख्याएँ भी सम्मिलित हैं जिनका पहला अंक 0 है।

दो अंकों से बनी संख्या 5 या 20 होंगी।

अतः अभीष्ट संख्याएँ = 120 - 20 = 100 होंगी।

उदाहरण 4. छः अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 की सहायता से 1000 से कम मान वाली कितनी विभिन्न संख्याएँ बनायी जा सकती हैं जबकि किसी भी संख्या में अंकों की पुनरावृत्ति नहो?

हल : 1000 से कम मान वाली संख्याएँ एक अंक, दो अंकों और तीन अंकों वाली होंगी।

6 अंकों से एक अंक वाली संख्याएँ = $^6P_1$.

6 अंकों से दो अंकों वाली संख्याएँ = $^6P_2$

6 अंकों से तीन अंकों वाली संख्याएँ = $^6P_3$

∴ 1000 से कम मान वाली संख्याएँ।

$= {}^6P_1 + {}^6P_2 + {}^6P_3 = 6 + 30 + 120 + 156.$

उदाहरण 5. 1, 3, 5, 7, 9 में से कितने ही अंकों को लेकर कितनी संख्याएँ बन सकती हैं जबकि किसी संख्या में कोई अंक दुबारा न आये? .

हल : दिये हुए अंक 1,3,5,7,9 हैं। इन 5 अंकों में से,

एक अंक वाली कुल संख्याएँ = $^5P_1$

दो अंकों वाली कुल संख्याएँ = $^5P_2$

तीन अंकों वाली कुल संख्याएँ = $^5P_{13}$

चार अंकों वाली कुल संख्याएँ = $^5P_4$

और पाँच अंकों वाली कुल संख्याएँ = $^5P_5$

अतः अभीष्ट कुल संख्याएँ

$= {}^5P_1 + {}^5P_2 + {}^5P_3 + {}^5P_4 + {}^5P_5$

$= 5 + 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 \times 2$

$+ 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 5 + 20 + 60 + 120 + 120$

$= 325.$

उदाहरण 6. अंकों 0 , 1 , 2 , 3 , 4 से पाँच अंकों की कितनी संख्या बन सकती है जबकि संख्या में कोई भी अंक एक बार से अधिक न आये ?

हल : चूँकि 0 से प्रारम्भ होने वाली प्रत्येक संख्या 4 अंकों की होती है। अतएव हमें वे संख्याएं ज़ात करनी हैं जो 0 से आरम्भ नहीं होती हैं। दिये हुए पाँच अंकों में से सभी को एक साथ लेकर बनाये गये क्रमचयों की संख्या = $^5P_5$ = 120. इनमें वे क्रमचय भी सम्मिलित हैं जिनके आरम्भ में 0 आता है। यदि 0 को छोड़ दिया जाये तो शेष चार अंकों में से सभी को एक साथ लेकर बने बनाये गये क्रमचयों की संख्या = $^5P_5$ = 120. इनमें वे क्रमचय भी सम्मिलित हैं जिनके आरम्भ में 0 आता है। यदि 0 को छोड़ दिया जाये तो शेष चार अंकों में से सभी को एक साथ लेकर बने क्रमचयों की संख्या =' $^4P_4$ = 24. अत: उपर्युक्त 5 अंकों से बनने वाली कुल संख्याएँ

= $^5P_5$ - $^4P_4$

= 120 - 24 = 96

उदाहरण 7. 99 और 1000 के बीच कितनी संख्याएँ 0, 1, 2, 3, 4, 5 अंकों से बनायी जा सकती हैं ?

हल : 99 और 1000 के बीच 3 अंकों की संख्याएं बनेंगी। कुल 6 अंक हैं। 6 अंकों से तीन अंकों वाली संख्याएँ = $^6P_3$.

इनमें कुछ संख्याएँ ऐसी हैं जिनके प्रारम्भ में शून्य है। वास्तव में ये दो अंकों वाली संख्याएँ हैं।

यदि प्रारम्भ में शून्य को रखा जाये तो शेष दो स्थानों में 5 अंकों को रखने के तरीके = $^5P_2$

कुल विन्यासों की संख्या

= $^6P_3$ - $^5P_2$ = 120 - 20 = 100.

उदाहरण 8. अंक 1, 2, 3, 4, 5 और 6 के प्रयोग से 3000 और 4000 के बीच ऐसी कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं जो 5 से विभाजित हो सकती हों ? किसी भी संख्या में अंक दो बार नहीं आता है। **हल :** कुल 6 अंक हैं। इनमें 4 अंकों वाली संख्याएँ (3000 और 4000 के बीच) बनानी हैं।

शर्त के अनुसार, आरम्भ में 3 तथा अन्त में 5 होना चाहिए।

इस प्रकार, प्रथम स्थान में 3 और अन्तिम स्थान में 5 को रख देने पर दो स्थान बचते हैं जिनमें शेष 4 अंकों को 48 तरीके से रखा जा सकता है।

∴ अभीष्ट क्रमचयों की संख्या = $^4P_2$ = 12.

उदाहरण 9. अंकों 0, 2, 3, 4, 5 की सहायता से पाँच अंकों वाली कितनी विषम संख्याएँ बनायी जा सकतीहैं

हल : विषम संख्याएँ वे होंगी जिनके अन्त में 3 या 5 होगा।

अन्तिम स्थान में 3 और 5 को रखने के तरीके =2

यदि अन्त में 3 या 5 को रख देते हैं तो शेष चार स्थानों में चार अंकों को 4! तरीके से रखा जा सकता है।

इनमें ऐसी संख्याएँ भी शामिल हैं जिनके प्रारम्भ में शून्य है। ऐसी $^3P_3$ संख्याएँ हैं।

अतः अन्त में 3 या 5 में से किसी एक को रखने पर बनने वाले क्रमचयों की संख्या = 4! - $^3P_3$ = 4! - 3! = 18

∴ अभीष्ट क्रमचयों की संख्या

= 18 x 2 = 36

उदाहरण 8. अंकों 0, 1, 2, 3, 4, 5 से कितनी धनात्मक पूर्ण संख्याएं बनायी जा सकती हैं, जबकि कोई भी अंक दोबारा प्रयोग न किया जाये ? इनमें से कितनी संख्याएँ 3000 से बड़ी होंगी?

हल : कुल 6 अंक हैं जिनसे एक, दो, तीन, चार, पाँच व छः अंकों वाली संख्याएँ बनायी जा सकती हैं।

6 अंकों से 1 अंक वाली संख्याएँ

= $^6P_1$ -1 = 5, (शून्य को छोड़कर)

6 अंकों से 2 अंकों वाली संख्याएँ

= $^6P_2$ - $^5P_1$ = 30 - 5 = 25

6 अंकों से 3 अंकों वाली संख्याएँ.

$= {}^6P_3 - {}^6P_2 = 120 - 20 = 100$

6 अंकों से 4 अंकों वाली संख्याएँ.

$= {}^6P_4 - {}^5P_3 = 360 - 60 = 300$

6 अंकों से 5 अंकों वाली संख्याएँ

$= {}^6P_5 - {}^5P_4 = 720 - 120 = 600$

तथा 6 अंकों से 6 अंकों वाली संख्याएँ

$= {}^6P_6 - {}^5P_5 = 720 - 120 = 600$

∴ अभीष्ट संख्याएँ

$= 5 + 25 + 100 + 300 + 600 + 600 = 1630.$

पुनः 3000 से बड़ी संख्याएँ चार, पाँच व छः अंकों वाली होंगी।

3000 से बड़ी चार अंकों वाली संख्याओं के प्रारम्भ में 3,4 या 5 होना चाहिए। अतः प्रथम स्थान को भरने के 3 तरीके होंगे।

यदि प्रथम स्थान में 3, 4 या 5 में से किसी एक अंक को रखते हैं तो शेष 3 स्थानों में रखने के तरीके $= {}^5P_3$

∴ 3000 से बड़ी चार अंकों वाली संख्याएँ

$= {}^5P_3 \times = 180$

अतः 3000 से बड़ी कुल संख्याएँ

$= 180 + 600 + 600 = 1380.$

उदाहरण

LAHORE शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बन सकते हैं ? यदि

(i) सभी अक्षर एक साथ लिये जायें।

(ii) जबकि सभी का प्रथम अक्षर L है।

(iii) कितने क्रमचयों का पहला अक्षर L नहीं होगा?

(iv) कितने शब्द L से प्रारम्भ होकर E पर समाप्त होंगे?

हल : (i) शब्द LAHORE में अक्षरों की संख्या = 6. यहाँ सभी अक्षर असमान हैं।

अतः सभी अक्षरों को एक साथ लेकर बने विभिन्न शब्दों की संख्या

$^6P_6$

= 6!

= 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720.

(ii) चूँकि L सभी का प्रथम अक्षर है अतएव L को प्रथम स्थान पर रहना है। ऐसी अवस्था में शेष अक्षरों की संख्या = 5.

अतः अभीष्ट शब्दों की संख्या = $^5P_5$

= 5! = 5.4.3.2.1

= 120

(iii) उन क्रमचयों की संख्या जिनका पहला अक्षर L नहीं है

= 720 - 120 = 600.

(iv) यदि L प्रथम अक्षर हो तथा E अन्त का अक्षर हो तो केवल 4 अक्षर शेष बच जाते हैं जिनको विन्यासित करना है। अतः इस प्रकार के विन्यासों की संख्या

= $^4P_4$ = 4! = 4.3.2.1 = 24.

उदाहरण

शब्द COMBINE के अक्षरों को भिन्नभिन्न क्रमों में रखकर कितने शब्द बनाये जा सकते हैं यदि स्वर (vowels) अर्थात् 0, I, E

(i) एक साथ रखे जायें?

(ii) एक साथ कभी न रखे जायें ?

(iii) केवल विषम स्थानों पर रखे जायें ?

हल : (i) शब्द COMBINE के अक्षरों की कुल संख्या 7 है। यदि तीनों स्वरों O,I, E को एक साथ रहना है तो इनको एक अक्षर माना जा सकता है। तब शेष 4 अक्षरों (C, M, B, N) को मिलाकर कुल 5 अक्षर बनते हैं जिनको 5! प्रकार से लिख सकते हैं। किन्तु 0, I, E को हम 3! प्रकार से भिन्न-भिन्न क्रमों में लिख सकते हैं,

अतः अभीष्ट शब्दों की संख्या

= 5! x 3! = 120 x 6 = 720.

(ii) COMBINE शब्द के कुल 7 अक्षरों से 7! शब्द प्राप्त कर सकते हैं। परन्तु इन शब्दों में वे शब्द भी सम्मिलित हैं जिनमें O,I, E सदैव एक साथ रहते हैं। चूँकि इनकी कुल संख्या 720 है, अतः जिन शब्दों में 0, I, E कभी एक साथ न रहें, उनकी संख्या = 7! - 720 = 5040 - 720 = 4320.

(iii) विषम स्थानों की कुल संख्या चार है, पहला, तीसरा, पाँचवाँ और सातवाँ । इन स्थानों पर तीन अक्षरों O, I, E को रखना है जिन्हें हम 42 प्रकार से रख सकते हैं। अब तीन अक्षरों को रखने के बाद चार स्थान शेष रह जाते हैं। इनमें चार ही अक्षर (C, M, B, N) रखने हैं। इन अक्षरों को 4! प्रकार से रख सकते हैं।

अतः अभीष्ट शब्दों की संख्या $= {}^4P_3 \times 4!$

$$= \frac{4!}{(4-3)!} \times 4!$$

$$= \frac{4!}{1!} \times 4!$$

$$= \frac{24 \times 24}{1} = 576.$$

वस्तुओं की पुनरावृत्ति (Repetition of Things)

n असमान वस्तुओं में से एक बार में। वस्तुएं लेने पर बने क्रमचयों की संख्या ज्ञात करना जबकि प्रत्येक वस्तु किसी भी विन्यास में चाहे कितनी बार ली जा सके।

स्पष्ट है कि अभीष्ट क्रमचयों की संख्या उतनी ही होगी जितनी n असमान वस्तुओं से रिक्त स्थानों को भरने की, जबकि प्रत्येक वस्तु चाहे कितनी ही बार प्रयुक्त क्यों न हो जाये। पहले स्थान को n प्रकार से भरा जा सकता है, क्योंकि दी हुई n वस्तुओं में से प्रत्येक वस्तु उस स्थान को भर सकती

है। पहला स्थान भर जाने पर दूसरा स्थान भी प्रकार से भरा जा सकता है, क्योंकि जो वस्तु पहले स्थान पर रख दी गई है, उसका प्रयोग पुनः किया जा सकता है। इस प्रकार पहले दो स्थान n x n a n^2 प्रकार से भरे जा सकते हैं। जब पहले दो स्थान n^2 प्रकारों में से किसी भी प्रकार से भरे जा चुके हों तो तीसरा स्थान भी n प्रकार से भरा जा सकता है। अतएव पहले तीन स्थान ^{n2} x n = n^3 प्रकार से भरे जा सकते हैं ,........ इत्यादि।

उपर्युक्त विवेचन से यह स्पष्ट है कि जितने स्थान भरे जाने हैं, n का घातांक भी उतना ही है। इस प्रकार r स्थान n^r । प्रकार से भरे जायेंगे।

अतः क्रमचयों की अभीष्ट संख्या ' है।

उदाहरण

एक गाँव में एक डाकघर है और तीन डाक के डिब्बे हैं। अब बताइए कि तीन पत्रों को कितनी तरह से इनमें डाला जा सकता है ?

हल : पत्र डालने के कुल स्थान

= 1 डाकघर +3 डिब्बे =4 .

पहला पत्र इन चार स्थानों में से किसी भी एक में डाला जा सकता है।

पहला पत्र डालने के ढंग = 4

इसी प्रकार, दूसरा तथा तीसरा पत्र भी 4, 4 तरीकों से डाला जा सकता है।

अतः पत्र डालने के कुल ढंग = 4^3 = 64.

उदाहरण

ज़ात कीजिए कि 4विद्यार्थियों में 3 पारितोषिक कितने प्रकार से वितरित किये जा सकते हैं, यदि

(i) एक विद्यार्थी कितने ही पारितोषिक प्राप्त कर सकता है?

हल : (i) पहला पारितोषिक 4 प्रकार से दिया जा सकता है, क्योंकि कोई भी छात्र तीनों पारितोषिक प्राप्त कर सकता है।

इसी प्रकार, दूसरे तथा तीसरे पारितोषिक भी 4,4 प्रकार से दिया जा सकते हैं।

अतः पारितोषिक वितरित करने के अभीष्ट तरीके = 4 x 4 x 4 = 4^3 = 64.

(ii) स्पष्टतः यहाँ अभीष्ट संख्या $^4P_3$ अर्थात् 4 x 3x 2 = 24

उदाहरण

अंकों 1, 2, 3, 4, 5 से तीन अंकों की कितनी संख्याएँ बन सकती हैं, यदि किसी भी अंक को चाहे कितनी ही बार प्रयुक्त किया जा सकता है ?

हल : तीन अंकों वाली संख्या का पहला स्थान दिये गये 5 अंकों में से किसी से भी भरा जा सकता है। इसी प्रकार, दूसरे तथा तीसरे स्थान भी 5 - 5 प्रकार से भरे जा सकते हैं।

अतः अभीष्ट संख्या = 5 x 5 x 5 = 5^3 = 125.

उदाहरण

पाँच विषयों की एक परीक्षा में प्रत्येक विषय में उत्तीर्ण होने के लिए निम्नतम अंक निर्धारित हैं। एक परीक्षार्थी कितने प्रकार से अनुत्तीर्ण हो सकता है?

हल : प्रत्येक विषय में परीक्षार्थी द्वारा निम्नतम अंक प्राप्त करने की निम्न दो संभावनायें हैं

(i) वह निम्नतम अंक प्राप्त कर लेता है।

(ii) वह निम्नतम अंक प्राप्त नहीं करता है।

अतः 5 विषयों में परीक्षार्थी द्वारा अंक प्राप्त न करने की कुल संभावनाएँ

= 2^5 = 32

परन्तु इसमें एक संभावना यह भी सम्मिलित है कि वह सभी विषयों में निम्नतम अंक प्राप्त कर लेता है (इस स्थिति में वह पास हो जायेगा)।

अतः परीक्षार्थी द्वारा निम्नतम अंक प्राप्त न करने की कुल संभावनाएं

= 32 – 1 = 31

अतः परीक्षार्थी 31 प्रकार से अनुत्तीर्ण हो सकता है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 7.1 (पृष्ठ संख्या 150)

प्रश्न 1 अंक 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी 3 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि-

(i) अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो।
(ii) अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हो।

उत्तर- 3 अंकीय संख्या में 3 स्थान होते हैं: इकाई, दहाई और सैकड़ा।

(i) इकाई का स्थान 5 तरीकों से भरा जा सकता है u में से कोई भी एक अंक लिया जा सकता है।

दहाई का स्थान भी 5 तरीकों से भरा जा सकता है क्योंकि पुनरावृत्ति की अनुमति है।

1, 2, 3, 4, 5 में से कोई भी अंक लिया जा सकता है।

इसी प्रकार सैकड़े का स्थान भी 5 तरीकों से भरा जा सकता है।

3 अंकीय संख्याओं की संख्या = $5 \times 5 \times 5 = 125$

(ii) इकाई का स्थान 1, 2, 3, 4, 5 में से कोई-से एक अंक को लेकर 5 तरीकों से भरा जा सकता है।

दहाई का स्थान 4 तरीकों से भरा जा सकता है क्योंकि एक अंक पहले ही चयनित कर लिया गया। पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

सैकड़े का स्थान 3 तरीकों से भरा जा सकता है क्योंकि 2 अंक पहले ही चयनित कर लिए गए हैं।

3 अंकीय संख्याओं की संख्या = $5 \times 4 \times 3 = 60$

प्रश्न 2 अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6 से कितनी 3 अंकीय सम संख्याएँ बनाई जा सकती है, यदि अंको की पुनरावृत्ति की जा सकती है?

उत्तर- इकाई का स्थान 2, 4, 6 में से एक को लेकर 3 तरीकों से भरा जा सकता है।

क्योंकि पुनरावृत्ति की जा सकती है।

इसी प्रकार सैकड़े का स्थान 6 तरीकों से ही भरा जा सकता है।

3 अंकीय संख्याओं की संख्या = $6 \times 6 \times 3 = 108$

प्रश्न 3 अंग्रेजी वर्णमाला के प्रथम 10 अक्षरों से कितने 4 अक्षर कोड बनाए जा सकते है, यदि किसी भी अक्षर की पुनरावृति नहीं की जा सकती?

उत्तर- 4 अक्षरों वाले कोड में 4 स्थान है। प्रत्येक अक्षर के लिए एक स्थान चाहिए।

पहले स्थान को 10 तरीको से, दूसरे स्थान को 9 तरीकों से, तीसरे शान को 8 तरीकों से और चौथे स्थान को 7 तरीकों सेभर सकते है क्योंकि पुनरावृति की अनुमति नहीं है।

एक अक्षर दुबारा नहीं लिखा जा सकता।

चार अक्षर वाले कोडो की संख्या = $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

प्रश्न 4 0 से 9 तक के अंको का प्रयोग करके कितने 5 अंकीय टेलीफ़ोन नंबर बनाए जा सकते है, यदि प्रत्येक नंबर 67 से आरम्भ होता है और कोई अंक एक बार से अधिक नहीं आता है?

उत्तर- पांच अंकीय नंबर में 5 स्थान हैं जिसमे पहले और दूसरे को I और II से निरूपित किया गया है। I और II स्थान पर 6 और 7 को रखा गया है।

शेष 8 अंको में से एक-एक अंक लेकर I, IV और V स्थान को भरना है। स्थान III को 8 तरीकों से भर सकते है।

5 अंकीय टेलीफोन नम्बरों की संख्या = $8 \times 7 \times 6 = 336$

प्रश्न 5 एक सिक्का तीन बार उछाला जाता है और परिणाम अंकित कर लिए जाते है। परिणामों की संभव संख्या क्या है?

उत्तर- एक बार सिक्का उछालने से दो में से एक भाग ऊपर आता है अर्थात T या H जबकि H चित और T पट को निरूपित करते है।

एक बार सिक्का उछालने से दो परिणाम होते है।

तीन बार सिक्का उछालने से $2 \times 2 \times 2 = 8$ परिणाम होंगे।

ये परिणाम इस प्रकार है:

TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH, HHH

प्रश्न 6 भिन्न-भिन्न रंगो के 5 झंडे दिए हुए है। इससे कितने विभिन्न संकेत में 2 झंडो, एक के नीचे दूसरे के प्रयोग की आवश्यकता पड़ती हैं।

उत्तर- झंडे के ऊपर का स्थान भरने के 5 तरीके हैं। एक झंडा प्रयोग होने के बाद 4 झंडे रह जाते है। निचे का दूसरा स्थान 4 तरीकों से भरा जा सकता है।

कुल संकेतो की संख्या = $5 \times 4 = 20$

प्रश्नावली 7.2 (पृष्ठ संख्या 153)

प्रश्न 1 मान निकालिए:

(i) $8!$

(ii) $4! - 3!$

उत्तर-

(i) $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$

(ii) $4! - 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 3 \times 2 \times 1 = 24 - 6 = 18$

प्रश्न 2 क्या $3! + 4! = 7!$

उत्तर- बायाँ पक्ष = $3! + 4! = 3! + 4! = 3 \times 2 \times 1 + 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 + 24 = 30$

दायाँ पक्ष = $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

अतः $3! + 4! \neq 7!$

प्रश्न 3 $\frac{8!}{6!\times 2!}$ का परिकलन कीजिए।

उत्तर-

$$\frac{8!}{6!\times 2!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times(6\times5\times4\times3\times2\times1)}$$

$$= \frac{8\times7}{2} = 28$$

प्रश्न 4 यदि $\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=\frac{x}{8!}$, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\frac{x}{8!} = \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

$$= \frac{1}{6\times5\times4\times3\times2\times1} + \frac{1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= \frac{7+1}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= \frac{8\times8}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = \frac{64}{8!}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{8!} = \frac{64}{8!}$$

$$\therefore x = 64$$

प्रश्न 5 $\frac{n}{(n-r)!}$ का मान निकालिए जबकि-

(i) n = 6, r = 2

(ii) n = 9, r = 5

उत्तर-

(i)

$$\frac{n!}{(n-r!)} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!}$$

$$= \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}$$

$$= 6 \times 5 = 30$$

(ii)

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!}$$

$$= \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}$$

$$= 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$

प्रश्नावली 7.3 (पृष्ठ संख्या 161)

प्रश्न 1 1 से 9 तक के अंको को प्रयोग करके कितनी 3 अंकीय संख्याएं बनाई जा सकती है, यदि किसी भी अंक को दोहराया नहीं गया है?

उत्तर- 3 अंकिय संख्या में तीन स्थान होते है: इकाई, दहाई और सैकड़ा।

इकाई के स्थान को 9 तरीकों से, दहाई के स्थान को 8 तरीकों से और सैकड़े के स्थान को 7 तरीको से भरा जा सकता है।

3 अंकीय संख्याओं की संख्या = 9 × 8 × 7 = 504

प्रश्न 2 किसी भी अंक को दोहराए बिना कितनी 4 अंकीय संख्याएँ होती है?

उत्तर- 0 से 9 तक कुल अंक है। 10 में से 4 अंक लेकर सखाओं की संख्या = $10P_4$ = 10 × 9 × 8 × 7 = 5640

इनमें वे संख्याएँ सम्मिलित हैं जिनमें हजार के स्थान पर 0 है।

0 को हजार के स्थान पर रखने पर और सेष स्थानों पर कोई तीन अंक रखने पर कुल संख्याओं की संख्या

$= 9P_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

चार अंकीय संख्याओं की संख्या = 5040 - 504 = 4536

प्रश्न 3 1, 2, 3, 4, 6, 7 को प्रयुक्त करने से कितनी 3 अंकीय सम संख्याएँ बनाई जा सकती है, यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया है?

उत्तर- 2, 4, 6 में से एक को इकाई के स्थान पर रखने से सम संख्या बनती है। इकाई का स्थान 3 तरीकों से भरा जा सकता हैं।

दहाई स्थान को 5 तरीकों से और सैकड़े के स्थान को 4 तरीको से भरा जा सकता है।

३ अंकीय सम संख्याओं की संख्या $= 3 \times 5 \times 4 = 60$

प्रश्न 4 अंक 1, 2, 3, 4, 5 के उपयोग द्वारा कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं। यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया हैं? इनमें से कितनी सम संख्याएँ होंगी?

i. उत्तर- 5 में से 4 अंक लेकर संख्याओं की संख्या $= 5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$
ii. इकाई के स्थान पर 2 या 4 रखने से संख्या सम बनती है।

इस प्रकार इकाई का स्थान 2 तरीकों से, दहाई का स्थान 4 तरीकों से, सैकड़े का स्थान 3 तरीकों से और हजार का स्थान 2 तरीकों से भरा जा सकता है।

4 अंकीय सम संख्याओं की संख्या $= 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$

प्रश्न 5 8 व्यक्तियों की समिति में, हम कितने प्रकार से एक अध्यक्ष और एक उपाध्यक्ष चुन सकते है, यह मानते हुए की एक व्यक्ति एक से अधिक पद नहीं रह सकता है।

उत्तर- 8 व्यक्तियों में से एक को अध्यक्ष चुनने के तरीके = 8

अध्यक्ष चुनने के बाद 7 व्यक्तियों में से एक उपाध्यक्ष चुना जाना है।

उपाध्यक्ष चुनने के तरीके = 7

एक अध्यक्ष और एक उपाध्यक्ष को 8 × 7 = 56 तरीकों से चुना जा सकता है।

प्रश्न 6 यदि $^{n-1}P_3 : {}^nP_4 = 1 : 9$ तो n ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

हम जानते है कि $^nP_r = n(n-1)\ldots(n-r+1)$

$\therefore\ ^{n-1}P_3 = (n-1)(n-2)(n-3)$

$^nP_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$

$\therefore\ \frac{^{n-1}P_3}{^nP_4} = \frac{1}{9}$

या $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{1}{9}$

या $\frac{1}{n} = \frac{1}{9}$

अतः $n = 9$

प्रश्न 7 r ज्ञात कीजिए यदि-

$^5P_r = 2.\ ^6P_{r-1}$

$^5P_r = {}^6P_{r-1}$

उत्तर-

(i)

$$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\therefore\ ^5P_r = \frac{5!}{(5-r)!}$$ और $$^6P_{r-1} = \frac{6!}{(7-r)!}$$

$$\frac{5!}{(5-r)!} = 2 \times \frac{6!}{(7-r)!}$$

$$\frac{5!}{(5-r)!} = 2 \times \frac{6(5)}{(7-r)(6-r)(5-r)!}$$

$$1 = \frac{2\times6}{(7-r)(6-r)}$$

या $(7-r)(6-r) = 12$

या $42 - 13r + r^2 = 12$

या $r^2 - 13r + 30 = 0$

$\Rightarrow (r-10)(r-3) = 0$

r = 10 या 3

r संख्या 5 से अधिक नहीं हो सकती

$\therefore r \neq 10 \therefore r \neq 3$

(ii)

$$^5P_r = \frac{5!}{(5-r)!}$$

$$^6P_{r-1} = \frac{6!}{[6-(r-1)]!} = \frac{6!}{(7-r)!}$$

$$= \frac{6[(5)!]}{(7-r)(6-r)[(5-r)]!}$$

इसका मान $^5P_r = {}^6P_{r-1}$ में रखने पर

$$\frac{5!}{(5-r)!} = \frac{6[(5)!]}{(7-r)(6-r)[(5-r)]!}$$

या $1 = \frac{6}{(7-r)(6-r)}$

या $(7-r)(6-r) = 6$

या $42 - 13r + r^2 = 6$

$\therefore r^2 - 13r + 36 = 0$

या $(r-9)(r-4) = 0$

$\therefore r = 9, 4$

$r \neq 9$ क्योंकि यह 5 से बड़ा है।

अतः $r = 4$

प्रश्न 8 EQUATION शब्द के अक्षरों में से प्रत्येक को तथ्यतः केवल एक बार उपयोग करके कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन शब्द बन सकते हैं?

उत्तर- शब्द EQUATION में कुल 8 अक्षर हैं।

इन अक्षरों से बनने वाले शब्दों (जो अर्थपूर्ण या अर्थहीन हैं) की संख्या = (28) = 8! = 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 40320

प्रश्न 9 MONDAY शब्द के अक्षरों से कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन शब्द बन सकते हैं, यह मानते हुए कि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं की जाती है,

i. एक समय में 4 अक्षर लिए जाते हैं?
ii. एक समय में सभी अक्षर लिए जाते हैं?
iii. सभी अक्षरों का प्रयोग किया जाता है, किन्तु प्रथम अक्षर एक स्वर है?

उत्तर-

i. MONDAY शब्द में कुल 6 अक्षर हैं। 6 अक्षरों में से 4 अक्षर एक समय पर लेकर कुल शब्दों की संख्या = 6P = 6 × 5 × 4 × 3 = 360 जबकि शब्द अर्थपूर्ण या अर्थहीन हो सकते हैं।

ii. सभी अक्षरों को एक साथ लेकर शब्दों की संख्या = 6! = 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 720

iii. पहले स्थान पर A या O रखना है। यह दो तरीकों से हो सकता है। शेष 5 स्थान 5! = 120 तरीकों से भरे जा सकते हैं। उन शब्दों की संख्या जो स्वर से प्रारम्भ होते हैं = 2 × 120 = 240

प्रश्न 10 MISSISSIPPI शब्द के अक्षरों से बने भिन्न-भिन्न क्रमचयों में से कितनों में चारों I एक साथ नहीं आते हैं?

उत्तर- शब्द MISSISSIPPI में कुल 11 अक्षर हैं-

जिसमें M, एक बार, चार बार S चार बार, तथा P दो बार प्रयुक्त हो रहे हैं।

इन अक्षरों से बने शब्दों की संख्या $\frac{11!}{4!4!2!}$

मान लीजिए के 4 - 1 एक साथ हों, तब

कुल अक्षर = 8

इन अक्षरों से बनने वाले शब्दों की संख्या $= \frac{8!}{4!2!}$

उन शब्दों का संख्या जब 4, I एक साथ नहीं है-

$$= \frac{11!}{4!4!2!} - \frac{8!}{4!2!}$$

$$= \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8!}{4!4!2!} - \frac{8!}{4!2!}$$

$$= \frac{8!}{4!2!}\left(\frac{11.10.9}{4!} - 1\right)$$

$$= \frac{8!}{4!2!} \times \frac{990-24}{24} [4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24]$$

$$= \frac{8!}{4!2!} \times \frac{966}{24}$$

$$= \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5(4!)\times966}{4!2!\times24}$$

$$= 35 \times 966 = 33810$$

प्रश्न 11 PERMUTATIONS शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि

i. चयनित शब्द का प्रारंभ P से तथा अंत S से होता है।
ii. चयनित शब्द में सभी स्वर एक साथ हैं।
iii. चयनित शब्द में P तथा S के मध्य सदैव 4 अक्षर हों?

उत्तर- PERMUTATIONS शब्द में कुल 12 अक्षर हैं जिनमें T - 2 है, शेष सब भिन्न हैं।

i. P और 9 के स्थान स्थिर कर दिए गए हैं। शेष अक्षर से बने शब्दों की संख्या $= \frac{10!}{2!} =$ 1814400
ii. सभी स्वरों को एक साथ कर दिया गया है। (EUAIO)PRMTTNS) जिनमें 2T हैं।

उन शब्दों की संख्या जब स्वर एक साथ है $= \frac{8!}{2!} \times 5$

$$= \frac{40320 \times 120}{2} = 2419200$$

iii. P तथा 5 के बीच चार अक्षर होने चाहिए। मान लीजिए 12 अक्षरों के स्थानों का नाम 1, 2, 3, ... 12 रख दिया

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 इस प्रकार P को स्थान 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 पर रखा जा सकता है तो S को स्थान 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 पर रखा जा सकता है। Pऔर S को 7 स्थानों पर रखा जा सकता है। इसी प्रकार S और P को 7 स्थानों पर रखा जा सकता है। P और S या s और P को 7 + 7 = 14 तरीकों से रखा जा सकता शेष $\frac{10!}{2!}$ अक्षरों को 10 तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है। उन शब्दों की संख्या जब P और S के बीच में 4 अक्षर हों

$$= \frac{10!}{2!} \times 14 = 10! \times 7 = 25401600$$

प्रश्नावली 7.4 (पृष्ठ संख्या 166-167)

प्रश्न 1 यदि $^nC_8 = {}^nC_2$, तो $^nC_2$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$^nC_8 = {}^nC_2 = {}^nC_{n-2}$$

$$8 = n - 2$$

$$\therefore n = 10$$

$$\therefore {}^nC_2 = {}^{10}C_2 = \frac{10\times9}{1\times2} = 45$$

प्रश्न 2 n का मान निकालिए, यदि

(i) $^{2n}C_3 : {}^nC_2 = 12 : 1$

(ii) $^{2n}C_2 : {}^nC_3 = 11 : 1$

उत्तर-

(i)

$$^{2n}C_3 : {}^{n}C_2 = 12 : 1$$

$$\therefore \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\times2\times3} : \frac{n(n-1)}{1\times2} = 12 : 1$$

या $\frac{2n(2n-1)\times2(n-1)}{6} \times \frac{2}{n(n-1)} = \frac{12}{1}$

या $2n - 1 = 9$

$$2n = 10 \Rightarrow n = 5$$

(ii)

या $\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\times2\times3} : \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3} = 11 : 1$

या $\frac{4n(2n-1)(n-1)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{11}{1}$

या $4(n-1) = 11(n-2)$

या $8n - 4 = 11n - 22$

$\therefore 3n = 22 - 4 = 18$

$\Rightarrow n = 6$

प्रश्न 3 किसी वृत्त पर स्थित 21 बिन्दुओ से होकर जाने वाली कितनी जिवाएँ खींची जा सकती है?

उत्तर- 21 बिन्दुओ में कोई 2 बिंदु मिलाने से एक जीवा प्राप्त होती है।

जिवाओं की संख्या

$$= {}^{21}C_2 = \frac{21\times20}{1\times2} = 210$$

प्रश्न 4 5 लडके और 4 लड़कियों में से 3 लडके और 3 लड़कियों की टीमें बनाने के कितने तरीके है?

उत्तर- 5 लडको में से 3 लड़को के चुनने के तरीके = $^5C_3$

4 लड़कियों में से 3 लड़कियों को चुनने के तरीके = $^4C_3$

∴ 5 लड़को और 4 लड़कियों में से 3 लड़के और लड़कियों टीमों की संख्या,

$$= {}^5C_3 \times {}^4C_3$$

$$= {}^5C_2 \times {}^4C_1$$

$$\frac{5 \times 4}{1 \times 2} \times \frac{4}{1}$$

$$= 10 \times 4 = 40$$

प्रश्न 5 6 लाल रंग की, 5 सफ़ेद रंग की और 5 नीले रंग की गेंदों में से 9 गेंदों के चुनने के तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि प्रत्येक संग्रह में प्रत्येक रंग की 3 गेंदें हैं।

उत्तर- 6 लाल रंग की गेंदों में से 3 गेंदें चुनने के तरीके = $^6C_3$

5 सफ़ेद रंग की गेंदों में से 3 गेंदें चुनने के तरीके = $^5C_3$

5 नीले रंग गेंदों में से 3 गेंदें चुनने के तरीके = $^5C_3$

इस प्रकार 6 लाल, 5 सफ़ेद तथा 5 नीले रंग की गेंदों में से प्रत्येक रंग की 3 गेंदों के चुनने के तरीके

$$= {}^6C_3 \times {}^5C_3 \times {}^5C_3$$

$$= {}^6C_3 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 [\because {}^nC_n = {}^nC_{n-1}]$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{5 \times 4}{1 \times 2} \times \frac{5 \times 4}{1 \times 2}$$

$$= 20 \times 10 \times 10$$

$$= 2000$$

प्रश्न 6 52 पत्तो की गड्डी मे से 5 पत्तो को लेकर बनने वाले संचयो की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि प्रत्येक संचय में तथ्यतः एक एक्का हो।

उत्तर- ताश की गड्डी में 4 एक्के होते है।

∴ 4 में से 1 एक्का चुनने के तरीके = $^4C_1$

इक्का छोड़कर शेष पत्ते = 52 - 4 = 48

48 पत्तो में से 4 अन्य पत्ते चुनने के तरीके = $^{48}C_4$

∴ ताश की गड्डी में 1 इक्का और 4 अन्य पत्ते चुनने के तरीके

$$= {}^4C_1 \times {}^{48}C_4$$

$$= \frac{4}{1} \times \frac{48\times47\times46\times45}{1\times2\times3\times4}$$

$$\left[{}^nC_r = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\times2\times3\ldots r}\right]$$

$$= 778320$$

प्रश्न 7 17 खिलाडियों में से, जिनमें केवल 5 गेंदबाजी कर सकते है, के क्रिकेट टीम के 11 खिलाडियों का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है, यदि प्रत्येक टीम में तथ्यतः 4 गेंदबाज है।

उत्तर- 5 गेंदबाज में 4 गेंदबाज चुनने के तरीके = $^5C_4$

शेष खिलाडी = 17 - 5 = 12

शेष चुने जाने वाले खिलाडी = 11 - 4 = 7

∴ 12 खिलाडियों में से 7 खिलाडी चुनने के तरीके = $^{12}C_7$

कुल टीमों की संख्या

$$= {}^{5}C_{4} \times {}^{12}C_{4}$$

$$= {}^{5}C_{1} \times {}^{12}C_{5} [{}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r}]$$

$$= \frac{5}{1} \times \frac{12\times11\times10\times9\times8}{1\times2\times3\times4\times5} = 3960$$

प्रश्न 8 एक थैली में 5 काली तथा 6 लाल गेंदें हैं। 2 काली तथा 3 लाल गेंदों के चयन के तरीको की संख्या निर्धारित कीजिए।

उत्तर- 5 काली गेंदों में से 2 गेंदे चुनने के तरीके = ${}^{5}C_{2}$

6 लाल गेंदों में से 3 गेंदें चुनने के तरीके = ${}^{6}C_{2}$

5 काली व 6 लाल गेंदों में से 2 काली और 3 लाल गेंदें चुनने के कुल तरीके

$$= {}^{5}C_{2} \times {}^{6}C_{3}$$

$$= \frac{5\times4}{1\times2} = \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}$$

$$= 10 \times 20 = 200$$

प्रश्न 9 9 उपलब्ध पाठ्यक्रमों में से, एक विद्यार्थी 5 पाठ्यक्रमों का चयन कितने प्रकार से कर सकता है, यदि प्रत्येक विद्यार्थी के लिए 2 विशिष्ट पाठ्यक्रम अनिवार्य है?

उत्तर- दो पाठ्यक्रम अनिवार्य हो, तब शेष पाठ्यक्रम = 9 - 2 = 7

7 पाठ्यक्रमों में से 3 पाठ्यक्रम तरीके = ${}^{7}C_{3}$

अतः 9 में से 5 पाठ्यक्रम चुनने के तरीके = ${}^{7}C_{3} = \frac{7\times6\times5}{1\times2\times3} = 35$

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 170-171)

प्रश्न 1 DAUGHTER शब्द के अक्षरों से, कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन शब्दों की रचना की जा सकती है, जबकि प्रत्येक शब्द में 2 स्वर तथा 3 व्यंजन हों?

उत्तर- DAUGHTER शब्द में 8 अक्षर है जिसमें 3 स्वर और 5 व्यंजन हैं

3 स्वर में से 2 स्वर चुनने के तरीके = $^5C_3 = 3$

5 व्यंजनों में से 3 व्यंजन चुनने के तरीके = $^5C_3 = {}^5C_2$

$$= \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$$

2 स्वर और 3 व्यंजन चुनने के तरीके = 3 × 10 = 30

प्रत्येक संचय में 5 अक्षर हैं।

उनके क्रमसंचयों की संख्या = 5! = 120

DAUGHTER शब्द के 2 स्वर और 3 व्यंजन लेकर शब्दों की संख्या = 30 × 120 = 3600

प्रश्न 2 EQUATION शब्द के अक्षरों से कितने, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की रचना की जा सकती है, जबकि स्वर तथा व्यंजन एक साथ रहते हैं?

उत्तर- EQUATION शब्द में कुल 8 अक्षर हैं जिनमें 5 स्वर और 3 व्यंजन हैं।

स्वर अक्षरों का क्रमसंचय =5! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120

व्यंजन अक्षरों का क्रमसंचय = 3! =3 × 2 × 1 = 6

स्वरों और अक्षरों को 2 तरीकों से लिखा जा सकता है, पहले स्वर ले या व्यंजन लें।

EQUATION शब्द के अक्षरों से बनने वाले शब्द जब स्वर तथा व्यंजन एक साथ आएँ = 120 × 6 × 2 = 1440

प्रश्न 3 9 लड़के और 4 लड़कियों से 7 सदस्यों की एक समिति बनानी है, यह कितने प्रकार से किया सकता है, जबकि समिति में,

(i) तथ्यत: 3 लड़कियाँ हैं?
(ii) न्यूनतम 3 लड़कियाँ हैं?
(iii) अधिकतम 3 लड़कियाँ हैं?

उत्तर- 9 लड़के और 4 लड़कियों से 7 सदस्यों की एक समिति बनानी है।

(i) जब उस समिति में 3 लड़कियाँ हों तो उस समिति में 4 लड़के होंगे। 3 लड़कियाँ और 4 लड़के चुनने के तरीके-

$$= {}^4C_3 \times {}^9C_4$$

$$= {}^4C_1 \times {}^9C_4 \; [\because {}^4C_3 = {}^4C_1]$$

$$= \frac{4}{1} \times \frac{9\times8\times7\times6}{1\times2\times3\times4}$$

$$= 9 \times 8 \times 7 = 504$$

(ii) समिति में कम से कम 3 लड़कियाँ है तो समितियाँ निम्न प्रकार बनेंगी:

(a) 3 लड़कियाँ 4 लड़के,

(b) 4 लड़कियाँ 3 लड़के इन समितियों को बनाने के कुल तरीके-

$$= {}^4C_3 \times {}^9C_4 + {}^4C_4 \times {}^9C_3$$

$$= {}^4C_1 \times {}^9C_4 + 1 \times {}^9C_3$$

$$= 4 \times \frac{9\times8\times7\times6}{1\times2\times3\times4} + \frac{9\times8\times7}{1\times2\times3}$$

$$= 504 + 84$$

$$= 588$$

(iii) यदि समिति में अधिकतम 3 लड़कियाँ लेनी हैं तो समितियाँ निम्न प्रकार बनेंगी:

(a) कोई लड़की नहीं और 7 लडके,

(b) 1 लड़की और 6 लडके,

(c) 2 लड़की और 5 लड़के,

(d) 3 लड़की और 4 लड़के,

अतः बानी कुल समितियाँ-

$$= {}^4C_0 \times {}^9C_7 + {}^4C_1 \times {}^9C_6 + {}^4C_2 \times {}^9C_5 + {}^4C_3 \times {}^9C_4$$

$$= 1 \times {}^9C_2 + {}^4C_1 \times {}^9C_4 + {}^4C_1 \times {}^9C_4$$

$$= 1 \times \frac{9\times8}{1\times2} + \frac{4}{1} \times \frac{9\times8\times7}{1\times2\times3} + \frac{4\times3}{1\times2} \times \frac{9\times8\times7\times6}{1\times2\times3\times4} + \frac{4}{1} \times \frac{9\times8\times7\times6\times}{1\times2\times3\times4}$$

$$= 1 \times 36 + 4 \times 84 + 6 \times 126 + 4 \times 126$$

$$= 36 + 336 + 126 \times (6 + 4)$$

$$= 372 + 1260$$

$$= 1632$$

प्रश्न 4 यदि शब्द EXAMINATION के सभी अक्षरों से बने विभिन्न क्रमचयों को शब्द कोष की तरह सूचीबद्ध किया जाता है, तो E से प्रारम्भ होने वाले प्रथम शब्द से पूर्व कितने शब्द हैं?

उत्तर- A से प्रारंभ होने वाले शब्दों में 21, 2N और शेष भिन्न अक्षर हैं-

ऐसे कुल शब्दों की संख्या $= \frac{10!}{2!2!}$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4}$$

= 907200

शब्द कोष के अक्षरों की तरह दिए हुए अक्षरों को क्रमबद्ध करते हुए अगला अक्षर E होगा,

∴ E से पहले बने शब्दों की संख्या = 907200

प्रश्न 5 0, 1,3,5,7 तथा 9 अंकों से 10 से विभाजित होने वाली और बिना पुनरावृत्ति किए कितनी 6 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं?

उत्तर- 10 से विभाजित होने वाली वे संख्याएँ हैं जिनमें इकाई के स्थान पर 0 को रखा गया है।

अब हमें 6 अंकीय संख्याएँ बनाने के लिए शेष 5 स्थान और भरने हैं।

5 स्थानों को भरने का क्रमसंचय = 5! = 120 ... 6 अंकीय संख्याएं जो 10 से विभाजित हो जाएँ उनकी संख्या = 120.

प्रश्न 6 अंग्रेजी वर्णमाला में 5 स्वर तथा 21 व्यंजन हैं। इस वर्णमाला में 2 भिन्न स्वरों और 2 भिन्न व्यंजनों वाले कितने शब्दों की रचना की जा सकती है?

उत्तर- 5 स्वरों में से 2 स्वर लेकर संचयों की संख्या = $^5C_2$

व्यंजनों में से 2 व्यंजन लेकर संचयों की संख्या = $^{21}C_2$

स्वरों और 2 व्यंजन को चयन करने के तरीके = $^5C_2 \times {}^{21}C_2$

2 स्वरों और 2 व्यंजनों का क्रमसंचय = 4!

∴ 2 स्वर और 2 व्यंजन से बनने वाले शब्दों की संख्या

$$= {}^5C_2 \times {}^{21}C_2 \times 4!$$

$$= \frac{5\times4}{1\times2} \times \frac{21\times20}{1\times2} \times 24$$

$$= 10 \times 210 \times 24$$

$$= 50400$$

प्रश्न 7 प्रश्नों वाले दो खण्डों में विभक्त हैं अर्थात खंड I और खण्ड II, एक विद्यार्थी का प्रत्येक खंड से न्यूनतम 3 प्रश्नों का चयन करते हुए कुल 8 प्रश्नों को हल करना है। एक विद्यार्थी कितने प्रकार से प्रश्नों का चयन कर सकता है?

उत्तर- एक विद्यार्थी को कुल 8 प्रश्न हल करने हैं। प्रत्येक खण्ड से कम से कम 3 प्रश्न करने हैं।

भाग I और II से प्रश्नों को इस प्रकार चुनाव करने हैं।

भाग I से चुने जाने वाले प्रश्न 3, 4, 5 प्रश्नों की कुल संख्या 5,

भाग II से चुने जाने वाले प्रश्न 5, 4, 3 प्रश्नों की कुल संख्या 7,

इन प्रश्नों को चयन करने के कुल तरीके,

$$= {}^5C_3 \times {}^7C_5 + {}^5C_4 \times {}^7C_4 + {}^5C_5 \times {}^7C_3$$

$$= {}^5C_2 \times {}^7C_2 + {}^5C_1 \times {}^7C_3 + 1 \times {}^7C_3 \quad [\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r}]$$

$$= \frac{5\times4}{1\times2} \times \frac{7\times6}{1\times2} + \frac{5}{1} \times \frac{7\times6\times5}{1\times2\times3} + \frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}$$

$$= 10 \times 21 + 5 \times 35 + 35$$

$$= 420$$

प्रश्न 8 52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्तों के संचय की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि 5 पत्तों के प्रत्येक चयन (संचय) में तथ्यतः एक बादशाह है।

उत्तर- बादशाह वाले पत्तों की कुल संख्या = 4

इनमें से एक पत्ता चयन करने के तरीके = $^4C_1 = 4$

अब शेष 48 पत्तों में से 4 पत्ते चयन करने के तरीके = $^{48}C_4$

$$= \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

= 194580

इस प्रकार 52 पत्तों में से 5 पत्ते लेकर (जिनमें से 1 बादशाह है) संचयों की संख्या

$= {}^4C_1 \times {}^{48}C_4 = 4 \times 194580 = 778320$

प्रश्न 9 5 पुरुषों और 4 महिलाओं को एक पंक्ति में इस प्रकार बैठाया जाता है कि महिलाएँ सम स्थानों पर बैठती हैं। इस प्रकार कितने विन्यास संभव हैं?

उत्तर- महिलाओं का 4 सम स्थानों पर बैठाने के विन्यास = 4! = 24

5 पुरुषों को 5 विषम स्थानों पर बैठाना के तरीके = 5! = 120

4 महिलाओं को सम स्थानों पर और 5 पुरुषों को विषम स्थानों पर बैठाने के विन्यास = 4! × 5! = 24 × 120 = 2880.

प्रश्न 10 25 विद्यार्थियों की एक कक्षा से 10 का चयन एक भ्रमण दल के लिए किया जाता है। तीन विद्यार्थी ऐसे हैं, जिन्होंने यह निर्णय लिया है कि या तो वे तीनों दल में शामिल होंगे या उनमें से कोई भी दल में शामिल नहीं होगा। भ्रमण दल का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है?

उत्तर- 25 विद्यार्थियों में से 10 विद्यार्थियों को भ्रमण दल में शामिल करना है। परन्तु 10 विद्यार्थियों में से 3 ऐसे हैं (i) जब तीनों भ्रमण दल में शामिल होते हैं या (ii) तीनों नहीं होते।

i. जब तीनों विद्यार्थी टीम में शामिल होते हैं तो भ्रमण दल का चयन करने के तरीके = $22C_7$
ii. जब तीनों विद्यार्थी भ्रमण दल में शामिल नहीं होते हैं तो चयन करने के तरीके = $22C_{10}$

दोनो दशाओं में भ्रमण दल का चयन करने के तरीके = $22C_7 + 22C_{10}$

प्रश्न 11 ASSASSINATION शब्द के अक्षरों के कितने विन्यास बनाए जा सकते हैं जबकि सभी s एक साथ रहें?

उत्तर- ASSASSINATION में कुल 13 अक्षर हैं जिसमें A तीन बार, s चार बार, I दो बार तथा N दो बार प्रयुक्त हो रहे हैं।

4 - s को एक साथ रहना है। अतः उसे एक अक्षर मान लिया।

इस प्रकार इसमें 10 अक्षर रह गए जिसमें 3 - A, 2 - 1 और 2 - N समान हैं।

इस शब्द के अक्षरों का विन्यास जब s एक साथ रहते हो

$$= \frac{10!}{3!\,2!\,2!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1) \times (2 \times 1)}$$

= 151200