गणित

अध्याय-5: रैखिक असामिकाएँ

Fukey Education

रैखिक असमिकाएँ (Linear Inequalities)

निम्न सम्बन्धों पर विचार करें :

$ar + b > 0$

$ar + b < 0$

$ax + by + c > 0$

$ar + by + c < 0$

चरों में ऐसे एक घातीय सम्बन्ध जो चिन्हों > या < से सम्बद्ध होते हैं, रैखिक असमिकाएँ कहलाते हैं।

समी. (1) व (2) केवल एक चर x में असमिकाएं हैं तथा समी. (3) व (4) दो चरों x तथा y में रैखिक असमिकाएँ हैं।

अंतराल (Intervals)

वास्तविक संख्याओं के ऐसे समुच्चय को, जो दो विशिष्ट संख्याओं के मध्य स्थित होते हैं, अन्तराल कहते हैं।

विवृत्त अन्तराल (Open Interval)- यदि चर x का मान दो निश्चित संख्याओं a और 6 के मध्य हो तो {x:a<x <b} को विवृत्त अन्तराल कहते हैं तथा इसे (a, B) या] a, b[से प्रदर्शित करते हैं।

अर्द्ध विवृत्त अन्तराल (Semi Open Interval)- $\{x: a \leq x < b\}$ को अर्द्ध विवृत्त अन्तराल कहते हैं। इसमें a शामिल होता है, b नहीं। इसे [a, B[से प्रदर्शित करते हैं।

इसी प्रकार, $\{x: a < x \leq b\}$ को भी अर्द्ध विवृत्त अन्तराल कहते हैं। इसमें b शामिल होता है, नहीं। इसे]a,b] से प्रदर्शित करते हैं।

इस अंतराल को अर्द्ध संवृत्त अन्तराल भी कहा जाता है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

संवृत्त अन्तराल (Closed Interval)

$\{x: a < x \leq b\}$ को जिसमें a और b दोनों शामिल होते हैं, संवृत्त अन्तराल कहते हैं। इसे [a, b] से प्रदर्शित करते हैं।

एक चर वाले रैखिक असमिकाओं का हल (Solution of One Variable Linear Inequalities)

एक चर (x) वाला रैखिक असमिकाएं $ax + b > 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0$ और $ax + b < 0$ के रूप में होते हैं। एक चर वाले रैखिक असमिकाओं को हल करने के लिए चर को

बायें पक्ष में और अचर को दायें पक्ष में रखते हैं। असमिका को चर के गुणांक से भाग देते हैं।

एक चर में रैखिक असमिका निकाय (System of Linear Inequalities in One Variable)

दो और दो से अधिक एक चर में रैखिक असमिका एक चर में रैखिक असमिका निकाय बनाते हैं।

असमिका निकाय का हल ज्ञात करने के लिए हम दिये गये असमिकाओं का हल समुच्चय अलग-अलग ज्ञात करते हैं। इसके पश्चात् इनका उभयनिष्ठ हल समुच्चय ज्ञात करते हैं। उभयनिष्ठ हल समुच्चय ही असमिका निकाय का हल होगा।

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Some Important Results)

(i) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

(ii) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

(iii) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ और $x > a$

(iv) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ और $x \geq a$

(v) $|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$

(vi) $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$

(vii) $|x - a| > r \Leftrightarrow x < a - r$ और $x > a + r$

(viii) $|x - a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r$ और $x \geq a + r$.

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

हल-

$$\Rightarrow \quad 4x+3<6x+7$$
$$\Rightarrow \quad 4x-6x+3<6x-6x+7$$
$$\Rightarrow \quad -2x+3<7$$
$$\Rightarrow \quad -2x+3-3<7-3$$
$$\Rightarrow \quad -2x<4$$
$$\Rightarrow \quad 2x>-4$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2x}{2}>\frac{-4}{2}$$
$$\Rightarrow \quad x>-2$$

उदाहरण 1. असमिका:- $\frac{x-4}{x+2} \leq 2$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया है

$$\frac{x-4}{x+2} \leq 2$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x-4}{x+2}-2 \leq 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x-4-2x-4}{x+2} \leq 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{-x-8}{x+2} \leq 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x+8}{x+2} \geq 0$$

प्रथम स्थिति, $x+8 \leq 0,\ x+2<0$

$x \leq -8,\ x<-2$

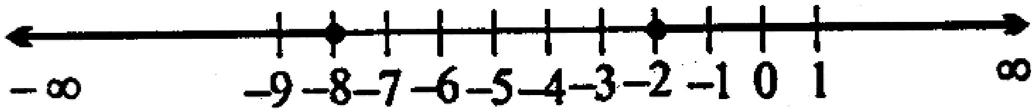
$\therefore \quad x \leq -8$

द्वितीय स्थिति, $x+8 \geq 0,\ x+2>0$

$x \geq -8,\ x>-2$

$\therefore \quad x>-2$

असमिका का हल $(-\infty, -8] \cup (-2, \infty)$ होगा। हल को वास्तविक रेखा पर निम्न प्रकार से आलेखित कर सकते हैं-



उदाहरण 2. असमिका $\frac{2x+5}{x-1} > 4$ कोहल कीजिए।

हल : दिया गया है

$$\frac{2x+5}{x-1} > 4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x+5}{x-1} - 4 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x+5-4x+4}{x-1} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-2x+9}{x-1} > 0$$

प्रथम स्थिति,

$$-2x+9 > 0, \; x-1 > 0$$

$$2x < 9, \quad x > 1$$

$$\Rightarrow \quad x < \frac{9}{2}, \quad x > 1$$

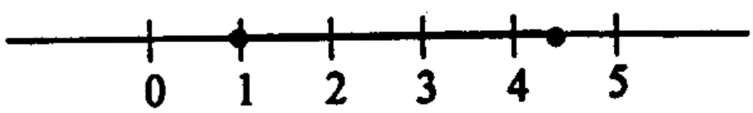
$$\Rightarrow \quad 1 < x < \frac{9}{2}$$

द्वितीय स्थिति, $-2x+9 < 0, \; x-1 < 0$

$$2x > 9, \; x < 1$$

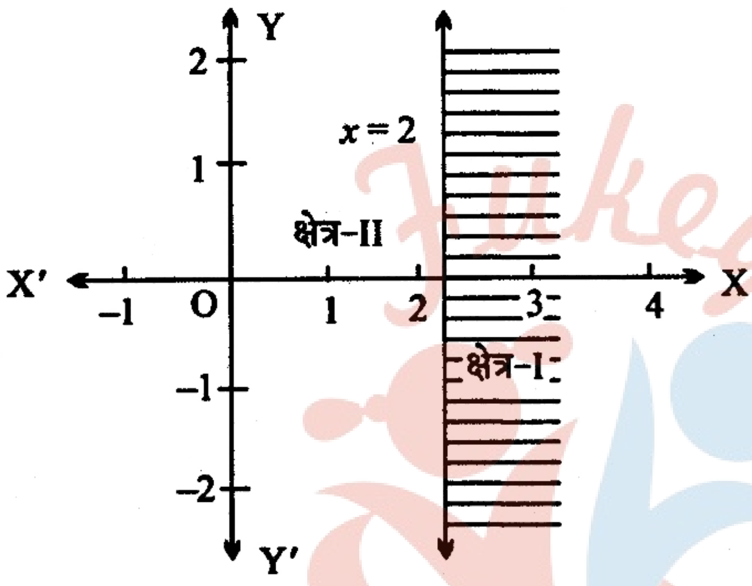
$x > \frac{9}{2}, \; x < 1$ **जो असम्भव है।**

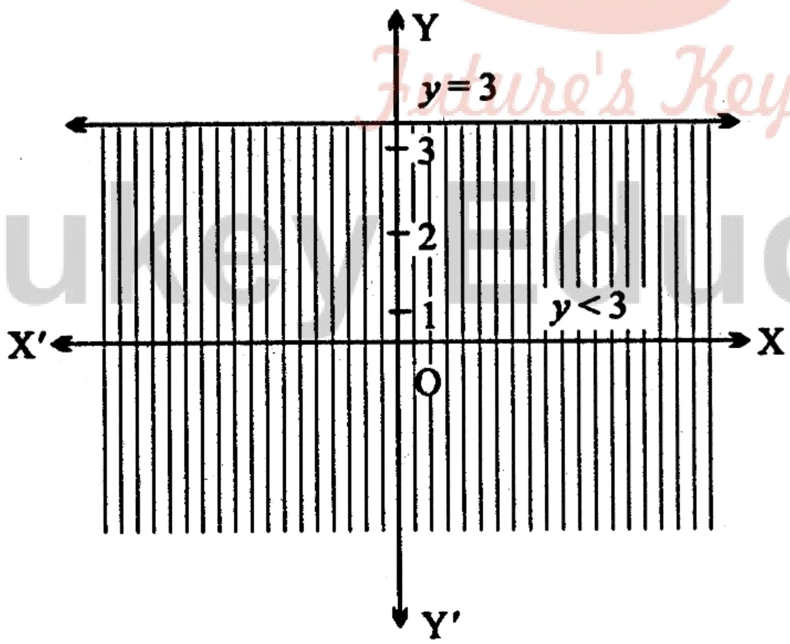
इसलिए असमिका का हल $(1, \frac{9}{2})$ होगा। हल को वास्तविक रेखा पर निम्न प्रकार से आलेखित किया जा सकता है-



एक चर में रेखीय असमिका के लेखाचित्र(Graphs of Linear Inequalities in One variable)

असमिका x>2 का ग्राफ खींचना : x>2 के संगत समीकरण x=2 है।





Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

अतः पहले रेखा x=2 को आलेखित करते हैं। यह तल को दो भागों में विभाजित करती है। क्षेत्र-I, x=2 के दायीं ओर तथा क्षेत्र-II, x=2 के बायीं ओर स्थित है।

वह क्षेत्र जिसके लिए x>2 सत्य है क्षेत्र-I है, जो अभीष्ट लेखाचित्र है।

इसी तरह **y<3 का लेखाचित्र रेखा** y = 3 के नीचे स्थित क्षेत्र को दर्शायेगा। कार्तीय पद्धति में निम्न असमिकाओं द्वारा विभिन्न चतुर्थांशों को दर्शा सकते हैं-

(1) x>0 प्रथम तथा चतुर्थ चतुर्थांश

(2) x<0 द्वितीय तथा तृतीय चतुर्थांश

(3) y>0 प्रथम तथा द्वितीय चतुर्थांश

(4) y<0 तृतीय तथा चतुर्थ चतुर्थांश

दो चरों में रैखिक असमिकाएँ (Linear Inequalities in Two Variables)

$$ax + by < c, ax + by < c$$

जैसा कोई व्यंजक जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं, दो चरों में एक असमिका कहलाता है।

(i) असमिका का हल- यदि कोई क्रमित युग्म दिये हुए असमिका को सन्तुष्ट करता है, तो वह उस असमिका का हल कहलाता है। अतः $(x_1,y_1), ax + by \le 0$ का एक हल है यदि $ax_1+by_1\le0$.

(ii) किसी असमिका के सम्पूर्ण हलों का समुच्चय असमिका का हल समुच्चय कहलाता है।

(iii) इन क्रमित युग्मों को आरेखित करना ही दिये हुए असमिका का ग्राफ कहलाता है।

कार्तीय तल में असमिका का ग्राफ खींचना(To Draw the Graph of an Inequalities in the Cartesian Plane)

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

मानलो असमिका $ax + by \leq c$ (या $ax + by < c$) है।

(i) सर्वप्रथम असमता $\leq$ या $<$ को समता (=) से विस्थापित करते हैं।

(ii) $ax + by = c$ का ग्राफ खींचते हैं। यह एक सरल रेखा होगी।

(iii) यदि असमता $\geq$ या $\leq$ है, तब ग्राफ में इस रेखा के बिन्दुओं को सम्मिलित किया जाता है तथा खींची गई रेखा सतत् होती है।

(iv) यदि असमता $>$ या $<$ है, तब इस रेखा के बिन्दुओं को सम्मिलित नहीं किया जाता है तथा बिन्दुदार रेखा खींची जाती है।

(v) यह रेखा XOY समतल को दो अर्धसमतलों या दो क्षेत्रों में विभक्त करती है।

यह ज्ञात करने के लिए कि कौन-सा क्षेत्र दिये हुए असमिका को सन्तुष्ट करता है, निम्न क्रियाविधि अपनाते हैं

(a)किसी स्वेच्छ बिन्दु या परीक्षण बिन्दु (arbitrarypoint) को चुनते हैं तथा इसे रेखांकित करते हैं। यह दोनों क्षेत्रों में से किसी एक में होगा।

(b) यदि यह दिए हुए असमिका को सन्तुष्ट करता है, तो वह क्षेत्र जिसमें बिन्दु स्थित है अभीष्ट क्षेत्र है।

(c) यदि बिन्दु दिए हुए असमिका को सन्तुष्ट नहीं करता है, तो दूसरा क्षेत्र अभीष्ट क्षेत्र है।

(d) अभीष्ट क्षेत्र को छायांकित करते हैं।

टिप्पणी- यदि संगत समीकरण का ग्राफ मूलबिन्दु से नहीं गुजरता है तो मूलबिन्दु (0,0) स्वेच्छ या परीक्षण बिन्दु के लिए सर्वाधिक उपयुक्त बिन्दु है।

उदाहरण 1. असमिका $2x-3y<5$ का ग्राफ खींचिए।

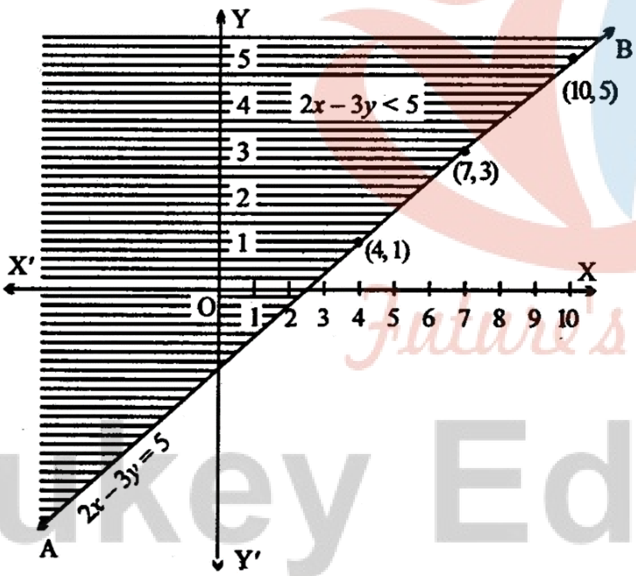
Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

हल: दिये गये असमिका के संगत समीकरण $2x - 3y = 5$ है। समीकरण $2x - 3y = 5$ के लिए x और y के मानों की सारणी निम्नानुसार है|

x	4	7	10
y	1	3	5

बिन्दुओं (4, 1), (10, 5) तथा (7, 3) को ग्राफ पेपर पर आलेखित करते हैं तथा इनको मिलाने वाली बिन्दुदार रेखा खींचते हैं इस रेखा द्वारा तल दो भागों में विभाजित हो जाता है।

अब परीक्षण बिन्दु (0, 0) लेते हैं । तब $2x - 3y < 5$ से $2 \times 0 - 3 \times 0 < 5$ सत्य है। अतः बिन्दु (0,0) ग्राफ में स्थित होगा। इस प्रकार बिन्दु (0,0) को समाविष्ट करने वाले तल को छायांकित करते हैं जो अभीष्ट ग्राफ होता है।



उदाहरण 3. असमिका x+4y≤8 का ग्राफ खींचिए।

हल: $x + 4y \geq 8$ एक संयुक्त कथन है। इसका अभिप्राय

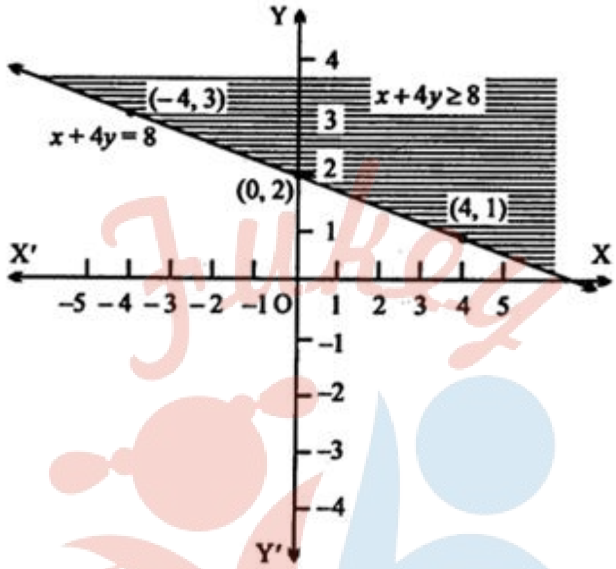
$x + 4y > 8$ या $x + 4y = 8$

ग्राफ खींचते समय हम सरल रेखा x+4y=8 को ग्राफ में सम्मिलित करेंगे।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

समीकरण x+4y=8 के लिए x और y के मानों की सारणी निम्न है-

x	4	0
y	1	2



रेखीय असमिका निकाय (System of Linear Inequalities)

दो या अधिक रेखीय असमिकाओं के समूह को रेखीय असमिका निकाय कहते हैं। असमिका निकाय का हल प्राप्त करने के लिए प्रत्येक असमिका का लेखाचित्र खींचते हैं। निकाय के सभी असमिकाओं को सन्तुष्ट करने वाला क्षेत्र उनके द्वारा निरूपित अर्धतलों का उभयनिष्ठ क्षेत्र होता है। उसे निकाय का हल कहते हैं।

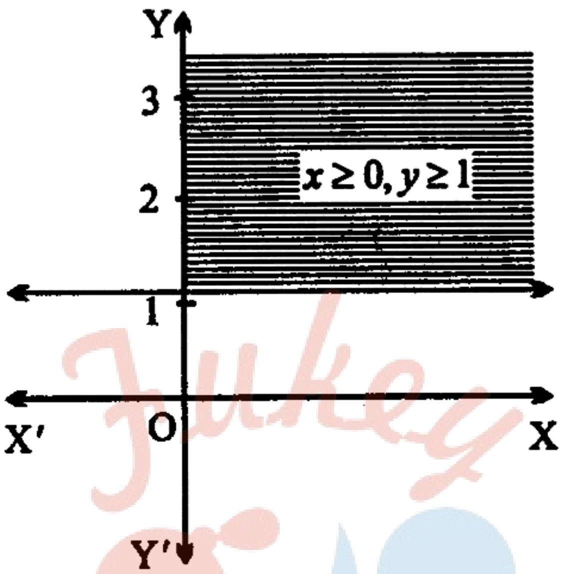
Fukey Education

सुसंगत क्षेत्र (Feasible Region) असमिकाओंको सन्तुष्ट करने वाला क्षेत्र सुसंगत क्षेत्र कहलाता है, क्योंकि उस क्षेत्र में स्थित प्रत्येक बिन्दु असमिका निकाय का सुसंगत हल होता है।

उदाहरण 1. $X \geq 0, y \leq 1$ के हल समुच्चय का ग्राफ खींचिए।

हल : सर्वप्रथम x=0 खींचते हैं जो Y-अक्ष होता है। $x > 0$ का अर्थ वह क्षेत्र है जिसमें धनात्मक है। अत: $x \leq 0$ द्वारा Y-अक्ष सहित उसके दायीं ओर का क्षेत्र निरूपित होगा।

अब y= 1 खींचते हैं। यह X-अक्ष के समान्तर रेखा होगी। अतः $y \geq 1$, रेखा y= 1 सहित उसके ऊपर का क्षेत्र होगा।

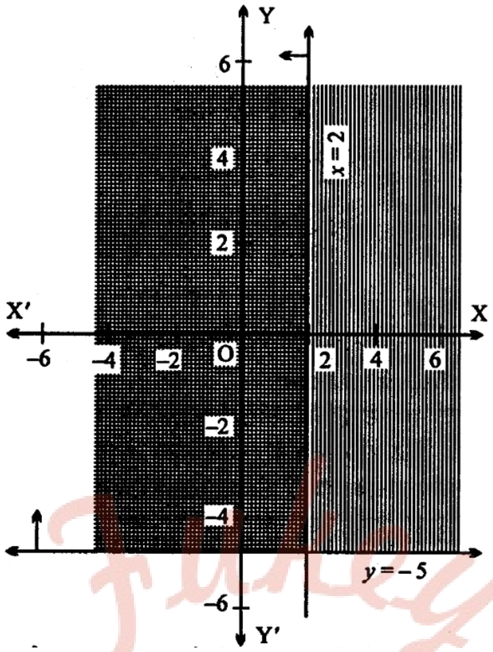


अतः दोनों का उभयनिष्ठ क्षेत्र ही अभीष्ट ग्राफ होगा। चित्र में इसे छायांकित भाग द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

उदाहरण 2. असमिकाओं $x \leq 2$ तथा $y \geq -5$ का लेखाचित्र एक ही ग्राफ पेपर पर खींचिए।

हल: सर्वप्रथम रेखा x = 2 का आलेखन करते हैं। यह Y अक्ष के समान्तर होगी। अत: $x \leq 2$, रेखा x = 2 सहित बायीं ओर के भाग को निरूपित करेगा।

Fukey Education



अब रेखा y = -5 को निरूपित करते हैं। यह X-अक्ष के समान्तर मूलबिन्दु से नीचे खींची गई रेखा होगी।

इस प्रकार $y \geq -5$, रेखा y = -5 सहित ऊपर के क्षेत्र को निरूपित करेगा।

अत: $x \leq 2$ तथा $y \geq -5$ का लेखाचित्र उपर्युक्त दोनों क्षेत्रों का उभयनिष्ठ क्षेत्र होगा। इसे दुहरे रेखांकित क्षेत्र से प्रदर्शित किया गया है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 6.1 (पृष्ठ संख्या 130-131)

प्रश्न 1 हल कीजिए: $24x < 100$, जब

i. x एक प्राकृत संख्या है।
ii. x एक पूर्णांक है।

उत्तर- $24x < 100$

24 से दोनों पक्षों में भाग करने पर

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$x < \frac{100}{24} \text{ अर्थात } x < \frac{25}{6}$$

यदि x एक प्राकृत संख्या है तो हल {1, 2, 3, 4} है।

यदि x एक पूर्णांक संख्या है तो हल {.... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}.

प्रश्न 2 हल कीजिए: -12X > 30, जब

i. x एक प्राकृत संख्या है।
ii. x एक पूर्णांक है।

उत्तर- -12x > 30

-12 से दोनों पक्षों में भाग करने पर,

$$x < \frac{30}{-12} \text{ अर्थात } x < \frac{-5}{2}$$

i. यदि x प्राकृत संख्या है तो कोई हल नहीं है।
ii. यदि x पूर्णांक संख्या है तो हल {..... -5, -4, -3} है।

प्रश्न 3 हल कीजिए: 5x - 3 < 7, जब

i. x एक पूर्णांक है।
ii. x एक वास्तविक संख्या है।

उत्तर- 5x -3<7

दोनों पक्षों में 3 जोड़ने पर,

5x < 10

5 से भाग देने पर

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$x < \frac{10}{5}$

अर्थात x < 2

i. यदि x एक पूर्णांक संख्या है तो हल {....-2, -1, 0, 1}.
ii. यदि x एक वास्तविक संख्या है तो हल x∈(∞,2)

प्रश्न 4 हल कीजिए: 3x + 8 > 2, जब

i. x एक पूर्णांक है।
ii. x एक वास्तविक संख्या है।

उत्तर- 3x + 8 > 2

3x > 2 - 8 या 3x > -6

3 से भाग देने पर

$x > \frac{-6}{3}$ या $x > -2$

i. यदि x एक पूर्णांक संख्या है तो हल {-1, 0, 1, 2,......}.
ii. यदि x एक वास्तविक संख्या है तो हल x ∈ (−2, ∞)

प्रश्न 5 वास्तविक संख्या x को हल कीजिए:

4x + 3 < 6x + 7

उत्तर- 4x + 3 < 6x + 7

6x को बाएँ पक्ष में तथा 3 को दाएँ पक्ष में रखने पर,

4x - 6x < 7 - 3

-2x < 4 - 2 से भाग देने पर

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$x > \frac{4}{-2}$ या $x > -2$

दी हुई असमिका का हल x = (12, ∞)

प्रश्न 6 वास्तविक संख्या x को हल कीजिए:

3x - 7 > 5x - 1

उत्तर- 3x - 7 > 5x - 1

5x को बाएँ पक्ष में तथा 7 को दाएँ पक्ष में रखने पर,

3x - 5x > -1 + 7 या -2x > 6

-2x से भाग देने पर x < -3

दी हुई असमिका का हल x ∈ (−∞ − 3)

प्रश्न 7 वास्तविक संख्या x को हल कीजिए:

$3(x - 1) \leq 2(x - 3)$

उत्तर-

असमिका $3(x - 1) \leq 2(x - 3)$

$3x - 3 \leq 2x - 6$

2x को बाएँ पक्ष में तथा 3 को दाएँ पक्ष में रखने पर,

$3x - 2 \leq 3 - 6$

$x < -3$

दिया है $x \in (-\infty - 3)$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 8 वास्तविक संख्या x को हल कीजिए:

$3(2-x) \geq 2(1-x)$

उत्तर-

दी हुई असमिका $3(2-x) \geq 2(1-x)$

$6-3x \geq 2-2x$

2x को बाएँ ओर तथा 6 को दाएँ ओर रखने पर,

$2x-3x \geq 2-6$

या $-x \geq -4$

या $x \leq 4$

दिया है $x \in (-\infty, 4)$

प्रश्न 9 वास्तविक संख्या x को हल कीजिए:

$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}<11$

उत्तर-

$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}<11$

$\frac{6x+3x+2x}{6}<11$ या $11x<66$

11 से भाग देने पर

$x < \frac{66}{11}$

$\therefore x < 6$

अतः हल है: $x \in (-\infty, 6)$

प्रश्न 10 वास्तविक संख्या x को हल कीजिए:

$\frac{x}{3} > \frac{x}{2} + 1$

उत्तर-

दी हुई असामिका $\frac{x}{3} > \frac{x}{2} + 1$

$\frac{x}{2}$ को बायीं ओर रखने पर $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} > 1$

या $\frac{2x-3x}{6} > 1$ या $\frac{-x}{6} > 1$

-6 से गुणा करने पर $x < -6$

अतः हल है: $x \in (-\infty, -6)$

प्रश्न 11 वास्तविक संख्या x को हल कीजिए:

$\frac{3(x-2)}{5} \leq \frac{5(2-x)}{3}$

उत्तर-

दी हुई असामिका $\frac{3(x-2)}{5} \leq \frac{5(2-x)}{3}$

दोनों और 15 का गुणा करने पर

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$9(x-2) \le 5(2-x)$

या $9x - 18 \le 50 - 25x$

25x को बायीं ओर तथा 18 को दायी और रखने पर

$9x + 25x \le 50 + 18$

$34x \le 68$

या $x \le 2$

$\therefore$ दी हुई असमिका का हल है: $x \in (-\infty, 2)$

प्रश्न 12 वास्तविक संख्या x को हल कीजिए:

$\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{5}+4\right) \ge \frac{1}{3}(x-6)$

उत्तर-

दी हुई असामिका $\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{5}+4\right) \ge \frac{1}{3}(x-6)$

या $3\left(\frac{3x+20}{5}\right) \ge 2(x-6)$

$3(3x+20) \ge 10(x-6)$

$9x + 60 \ge 10x - 60$

10x को बायीं ओर तथा +60 को दाई ओर रखने पर

$9x - 10x \ge -60 - 60$

या $-x \ge -120$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

(-1) से गुणा करने पर

$$x \leq 120$$

$\therefore$ हल है: $x \in (-\infty, 120)$

प्रश्न 13 वास्तविक संख्या x को हल कीजिए:

2(2x + 3) - 10 < 6 (x - 2)

उत्तर- दी हुई असमिका 2 (2x + 3) - 10 < 6 (x -2) 4x + 6 - 10 < 6x - 12

6x को बायीं ओर तथा -4 को दाई ओर रखने पर,

4 - 6x < -12 + 4

-2x < -8 (-1) से गुणा करने पर, x > 4

हल है: x ∈ (4, ∞)

प्रश्न 14 वास्तविक संख्या x को हल कीजिए:

$37 - (3x + 5) \geq 9x - 8(x - 3)$

उत्तर-

दी हुई असमिका $37 - (3x + 5) \geq 9x - 8(x - 3)$

$$37 - 3x - 5 \geq 9x - 8x + 24$$

$$-3x + 32 \geq x + 24$$

x को बायीं ओर तथा 32 को दाई ओर रखने पर,

$$-3x - x \geq 24 - 32$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$-4x \geq -8$

(-1) से गुणा करने पर तथा 4 से भाग देने पर

$x \leq \frac{8}{4}$ या $x \leq 2$

हल है: $x \in (-\infty, 2)$

प्रश्न 15 वास्तविक संख्या x को हल कीजिए:

$\frac{x}{4} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

उत्तर-

दी हुई असमिका $\frac{x}{4} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

60 से दोनों पक्षों में गुणा करने पर

$15x < 20(5x - 2) - 12(7x - 3)$

$15x < 100x - 40 - 84 + 36$

$15x < 16x - 4$

16x को बायीं ओर लाने पर,

$15x - 16x < -4$

या $-x < -4$

-1 से गुणा करने पर,

$x > 4$

$\therefore$ हल है: $x \in (4, \infty)$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 16 वास्तविक संख्या x को हल कीजिए:

$$\frac{(2x-1)}{3} \geq \frac{3x-2}{4} - \frac{2-x}{5}$$

उत्तर-

दी हुई असमिका $\frac{(2x-1)}{3} \geq \frac{3x-2}{4} - \frac{2-x}{5}$

60 से गुणा करने पर

$$20(2x-1) \geq 15(3x-2) - 12(2-x)$$

$$40x - 20 \geq 45x - 30 - 24 + 12x$$

$$40x - 20x \geq 57x - 54$$

57x को बायीं ओर तथा 20 को दायी ओर रखने पर

$$40x - 57x \geq -54 + 20$$

$$-17x \geq -34$$

-17 से भाग देने पर

$$x \leq 2$$

$\therefore$ हल है: $x \in (-\infty, 2)$

Fukey Education

प्रश्न 17 असमिकाओं का हल ज्ञात कीजिए तथा उन्हें संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

3x - 2 < 2x + 1

उत्तर- दी हुई असमिका 3x - 2 < 2x + 1

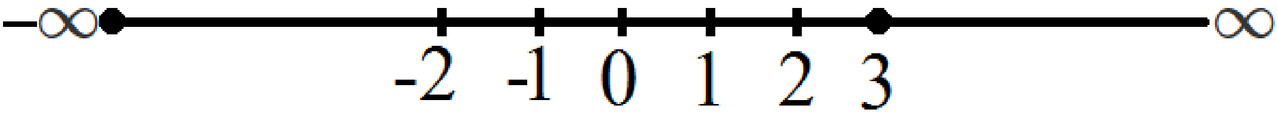
2x को बायीं ओर तथा 2 को दायीं ओर रखने पर,

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$3x - 2x < 1 + 2$

$x < 3$

हल है: $x \in (-\infty, 3)$



प्रश्न 18 असमिकाओं का हल ज्ञात कीजिए तथा उन्हें संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

$5x - 3 \geq 3x - 5$

उत्तर-

दी हुई असमिका $5x - 3 \geq 3x - 5$

3x को बायीं ओर तथा 3 को दायीं ओर रखने पर,

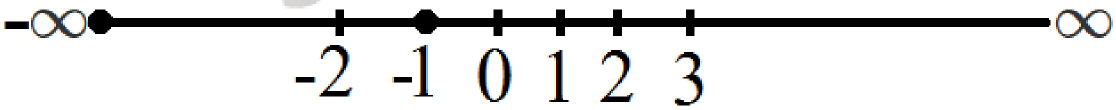
$5x - 3x \geq -5 + 3$

$2x \geq -2$

2 से भाग देने पर,

$x \geq -1$

हल है: $x \in (-1, \infty,)$



Fukey Education

प्रश्न 19 असमिकाओं का हल ज्ञात कीजिए तथा उन्हें संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

$3(1 - x) < 2(x + 4)$

उत्तर- दी हुई असमिका $3(1 - x) < 2(x + 4)$

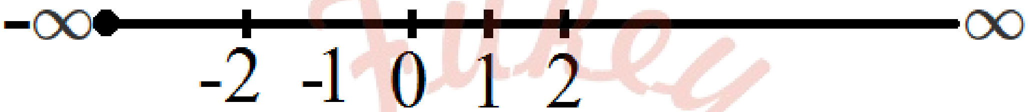
3 - 3x < 2x + 8

2x को बायीं ओर तथा 3 को दायीं ओर रखने पर,

-3x - 2x < 8 - 3

-5x < 5 - 5 से भाग देने पर

हल है: x ∈ (−1, ∞)



प्रश्न 20 असमिकाओं का हल ज्ञात कीजिए तथा उन्हें संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

$$\frac{x}{2} \geq \frac{(5x-2)}{3} - \frac{7x-3}{5}$$

उत्तर-

दी हुई असमिका $\frac{x}{2} \geq \frac{(5x-2)}{3} - \frac{7x-3}{5}$

30 से दोनों पक्षों में गुणा करने पर,

$$15x < 10(5x-2) - 6(7x-3)$$

$$15x < 50x - 20 - 42x + 18$$

$$15x < 8x - 2$$

Fukey Education

8x को बायीं ओर रखने पर,

$$15x - 8x < -2$$

$$7x < -2$$

$$\therefore x < -\frac{2}{7}$$

हल है: $\left(-\infty - \frac{2}{7}\right)$

प्रश्न 21 रवि ने पहली दो एकक परीक्षा में 70 और 75 अंक प्राप्त किए हैं। वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए, जिसे वह तीसरी एकक परीक्षा में पाकर 60 अंक का न्यूनतम औसत प्राप्त कर सके।

उत्तर-

मान लोजिए तीसरे एकक परीक्षा में x अंक प्राप्त किए।

रवि द्वारा प्राप्त अंक का औसत $= \frac{70+75+x}{3}$

Fukey Education

प्रश्नानुसार

$$\frac{70+75+x}{3} \geq 60$$

$$\frac{145+x}{3} \geq 60$$

3 से दोनों पक्षों में गुणा करने पर,

$$145 + x \geq 180$$

$$x \geq 180 - 145$$

$$x \geq 35$$

अतः रवि को तीसरी परीक्षा में 35 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त करने है।

प्रश्न 22 किसी पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाने के लिए एक व्यक्ति को सभी पाँच परीक्षाओं (प्रत्येक 100 में से) में 90 अंक या अधिक अंक का औसत प्राप्त करना चाहिए। यदि सुनीता के प्रथम चार परीक्षाओं के प्राप्तांक 87, 92, 94 और 95 हों तो वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए जिसें पांचवीं परीक्षा में प्राप्त करके सुनीता उस पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाएगी।

उत्तर-

मान लोजिए सुनीता ने पांचवी परीक्षा में x अंक प्राप्त किए।

पाँच परीक्षाओ के प्राप्त अंको का औसत $= \frac{87+92+94=95+x}{5}$

$$\therefore \frac{368+x}{5} \geq 90$$

5 से दोनों पक्षों में गुणो करने पर

$$368 + x \geq 5 \times 90$$

$$368 + x \geq 450$$

$$x \geq 450 - 368$$

$$\therefore x \geq 82$$

प्रश्न 23 10 से कम क्रमागत विषम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए जिनके योगफल 11 से अधिक हों।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर- मान लीजिए x और x + 2 दो विषम परिमेय संख्याएं हैं।

x तथा x + 2 दोनों ही 10 से कम हैं।

⇒ x < 10 और x + 2 < 10 या x < 8 दोनों का योग 11 से अधिक है।

x + (x + 2)> 11

2x + 2 > 11 या 2x > 11 – 2

2x > 9 या $x > \frac{9}{2}$ या $x > 4\frac{1}{2}$

अर्थात् यदि x = 5 हो, तब दूसरी संख्या = x + 2 = 7

इसी प्रकार यदि x = 7, तो x + 2 = 9

दूसरा युग्म (7, 9)

x = 9 नहीं हो सकता क्योंकि x + 2 = 11 > 10

अत: वांछित युग्म है (5, 7), (7, 9).

प्रश्न 24 क्रमागत सैम संख्याओं के ऐसे गुग्म ज्ञात कीजिये जिनमे से प्रत्येक 5 से बड़े हो तथा उनका योगफल 23 से काम हो।

उत्तर- मान लीजिए x और x +2 दो सम संख्याएँ हैं।

x और x + 2 दोनों ही 5 से बड़ी है।

= x > 5

x + (x + 2) < 23

2x + 2 < 23

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$2x < 23 - 2 = 21$

$2x < 21$ या $x < \frac{21}{2}$

यदि $x = 10$, $x + 2 = 12 = x + (x + 2) < 23$

इसी प्रकार (6, 8), (8, 10) युग्म भी दी हुई शर्त पूरी करते हैं।

वांछित युग्म (6, 8), (8, 10), (10, 12).

प्रश्न 25 एक त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा सबसे छोटी भुजा की तीन गुनी है। तथा त्रिभुज की तीसरी भुजा सबसे बड़ी भुजा से 2 सेमी कम है। तीसरी भुजा की न्यूनतम लंबाई ज्ञात कीजिए जबकि त्रिभुज व परिमाप न्यूनतम 61 सेमी है।

उत्तर- मान लीजिए त्रिभुज की सबसे छोटी भजा = x सेमी

सबसे बड़ी भुजा = 3x सेमी

तीसरी भुजा = 3x - 2 सेमी

प्रश्नानुसार

$$x + 3x + (3x - 2) \geq 61$$

$$7x - 2 \geq 61$$

$$7x \geq 61 + 2 = 63$$

$$x \geq 9$$

सबसे छोटी भुजा 9 सेमी है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 26 एक व्यक्ति 91 सेमी लंबे बोर्ड में से तीन लंबाईयाँ काटना चाहता है। दूसरी लंबाई सबसे छोटी लंबाई से 3 सेमी अधिक और तीसरी लंबाई सबसे छोटी लंबाई की दूनी है। सबसे छोटे बोर्ड की संभावित लंबाई क्या है, यदि तीसरा टुकड़ा दूसरे टुकड़े से कम से कम 5 सेमी अधिक लंबा हो?

उत्तर- मान लीजिए कटे हुए सबसे छोटे बोर्ड की लंबाई = x सेमी

दूसरे कटे हुए बोर्ड की लम्बाई = x + 3

तीसरे कटे हुए बोर्ड की लम्बाई = 2x सेमी

दिया है कि

$$x + (x + 3) + 2x \leq 91$$

$$4x + 3 \leq 91$$

$$4x \leq 91 - 3 = 88$$

$$4x \leq 88$$

$$x \leq 22 \ldots. (1)$$

यह भी दिया गया है कि $2x \geq (x + 3) + 5$

$$x \geq 8 \ldots (2)$$

सबसे छोटे बोर्ड की लम्बाई कम से कम 8 सेमी हो और अधिक से अधिक 22 सेमी हो।

प्रश्नावली 6.2 (पृष्ठ संख्या 136)

प्रश्न 1 निम्नलिखित असमिकाओं को आलेखन विधि से द्विमीतिय तल में निरूपित कीजिए।

x + y < 5

उत्तर- समीकरण x + y = 5 को लीजिए। यह एक सरल रेखा है जो बिन्दु (5, 0), (0, 5) से होकर गुजरती है।

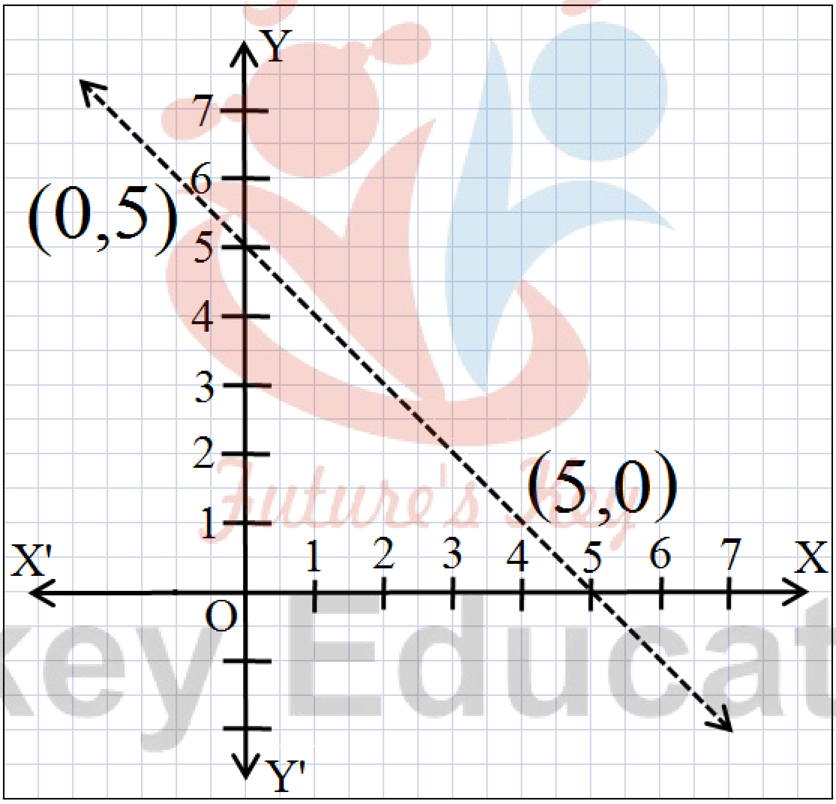
x = 0, y = 0 असमिका x + y < 5 में रखने पर,

अर्थात

0 + 0 < 5 या 0 < 5

⇒ मूल बिन्दु x + y < 5 के क्षेत्र में है।

छायांकित क्षेत्र x + y < 5 को निरूपित करता है जो इसका हल है।



प्रश्न 2 निम्नलिखित असमिकाओं को आलेखन विधि से द्विमीतिय तल में निरूपित कीजिए।

2x + y ≥ 6

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

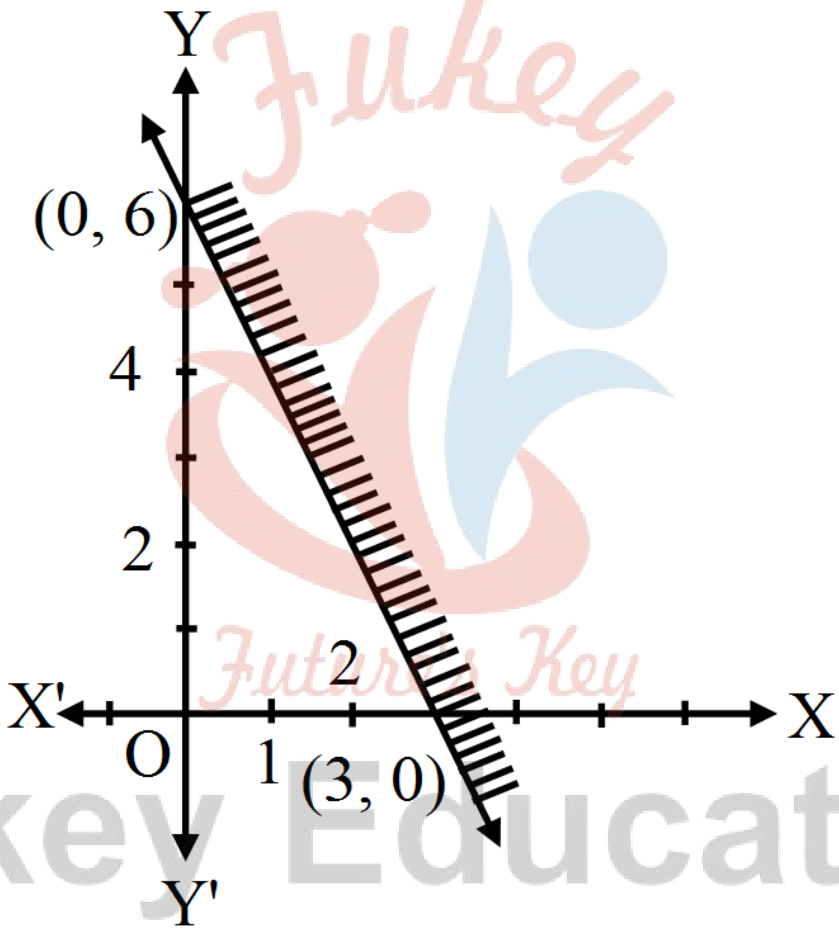
$2x + y \geq 26$

समीकरण $2x + y = 6$ को लीजिए, यह रेखा (3, 0) और (0, 6) से गुजरती है।

$x = 0, y = 0$ को $2x + y \geq 6$ में रखें तो $0 \geq 6$ जो सत्य नहीं है।

मूल बिन्दु $2x + y \geq 6$ के क्षेत्र में नहीं हैं।

$2x + y \geq 6$ का क्षेत्र छायांकित किया गया है।



प्रश्न 3 निम्नलिखित असमिकाओं को आलेखन विधि से द्विमीतिय तल में निरूपित कीजिए।

3x + 4y ≤ 12

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

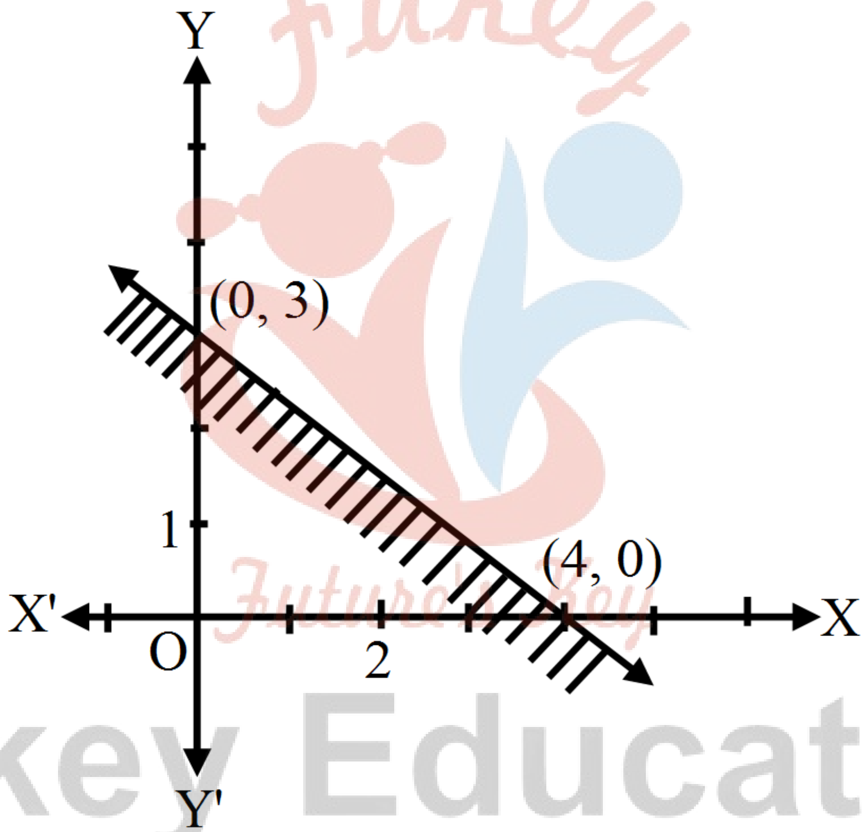
दी गई असमिका $3x + 4y \le 12$ सरल रेखा $3x + 4y = 12$ बिन्दु (4, 0), (o, 3) से होकर जाती है।

असमिका $3x + 4y \le 12$ में (o, 0) रखने पर,

$0 + 0 \le 12$ अर्थात $0 \le 12$ जो सत्य है।

मूल बिन्दु $3x + 4y \le 12$ के क्षेत्र में आता है।

इसका आलेख साथ वाली आकृति में दिखा गया है।



प्रश्न 4 निम्नलिखित असमिकाओं को आलेखन विधि से द्विमीतिय तल में निरूपित कीजिए।

$y + 8 \ge 2x$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

दी हुई रैखिक असमिका $y + 8 \geq 2x$ सरल रेखा $2x - y = 8$ बिन्दु (4,0) और (0, -8) से होकर जाती है।

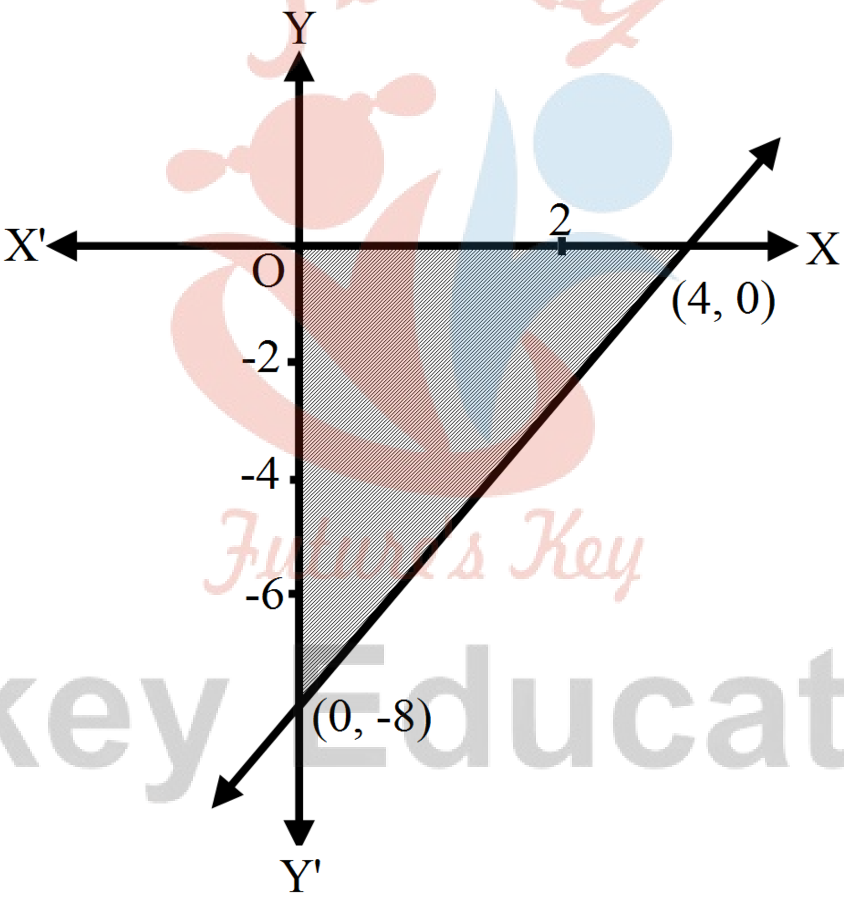
असमिका $y + 8 \geq 2x$,

$x = 0, y = 0$ रखने पर

$0 + 8 \geq 0$ अर्थात $8 \geq 0$ जो सत्य है।

मूल बिन्दु $y + 8 \geq 2x$ के क्षेत्र में आता है।

इसका आलेख साथ दी हुई आकृति में बनाया गया है।



प्रश्न 5 निम्नलिखित असमिकाओं को आलेखन विधि से द्विमीतिय तल में निरूपित कीजिए।

$x - y \leq 2$

उत्तर-

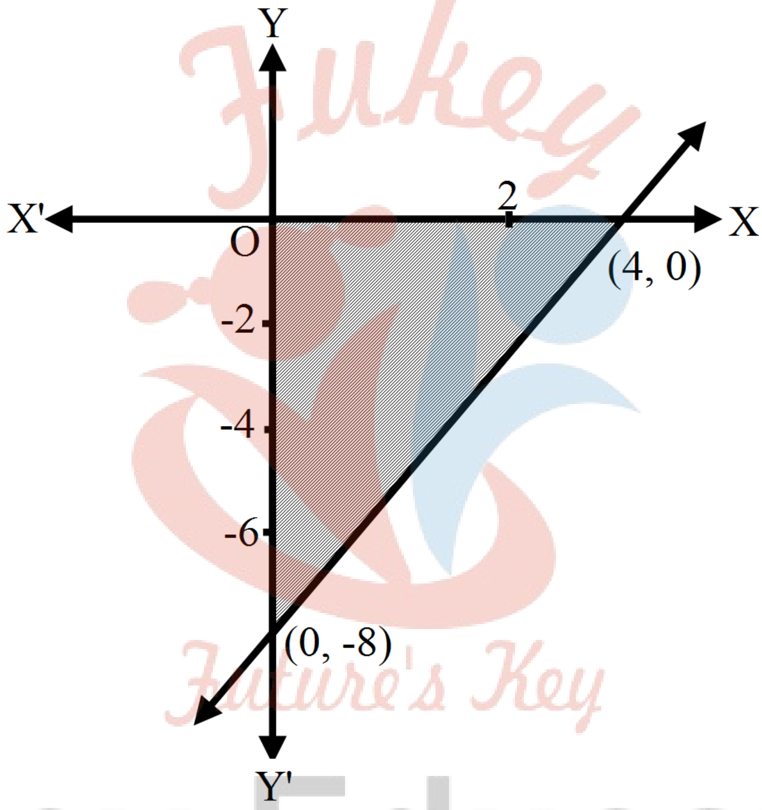
Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

दी हुई असमिका $x - y \leq 2$

सरल रेखा $x - y = 2$ बिन्दु $(2, 0), (0, -2)$ से होकर जाती है।

$x = 0, y = 0$ असमिका $x - y \leq 2$ में रखने पर $0 \leq 2$ जो सत्य है। मूल बिन्दु $x - y \leq 2$ के क्षेत्र में है।

असमिका $x - y \leq 2$ का आलेख साथ वाली आकृति में बनाया गया।



प्रश्न 6 निम्नलिखित असमिकाओं को आलेखन विधि से द्विमीतिय तल में निरूपित कीजिए।

2x - 3y > 6

उत्तर- दी हुई रैखिक असमिका 2x -3y > 6

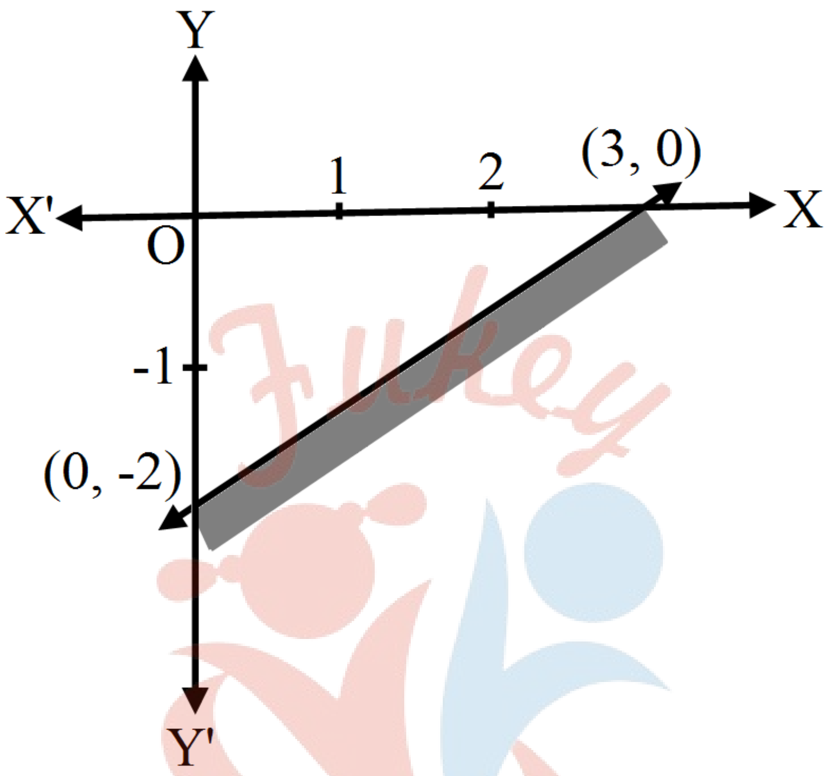
सरल रेखा 2x -3y = 6, (3, 0) और (o, -2) से होकर जाती है।

असमिका 2x -3y > 6 में x = 0, y = 0 रखने पर 0 > 6 जो सत्य नहीं है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

मूल बिन्दु (0, 0) दी हुई असमिका में नहीं आता है।

इसका आलेख दी हुई आकृति में दर्शाया गया है।



प्रश्न 7 निम्नलिखित असमिकाओं को आलेखन विधि से द्विमीतिय तल में निरूपित कीजिए।

$-3x + 2y \geq -6$

उत्तर-

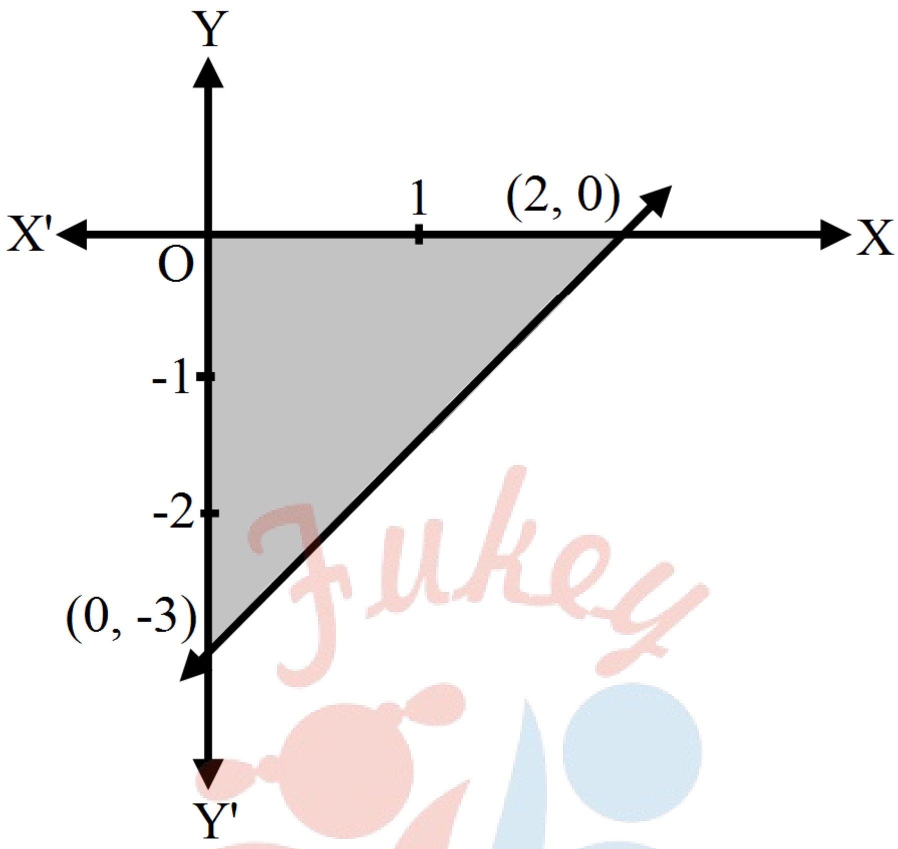
दी हुई रैखिक असमिका $-3x + 2y \geq -6$ या $3x - 2y \leq 6$

सरल रेखा $-3x + 2y = -6$ बिन्दु (2, 0) और (0, -3) से होकर जाती है।

$-3x + 2y \geq -6$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq -6$ जो सत्य है।

मूल बिन्दु (0, 0), $3x + 2y \geq -6$ असमिका के क्षेत्र में है।

इसका आलेख दी हुई आकृति में दर्शाया गया है।



प्रश्न 8 निम्नलिखित असमिकाओं को आलेखन विधि से द्विमीतिय तल में निरूपित कीजिए।

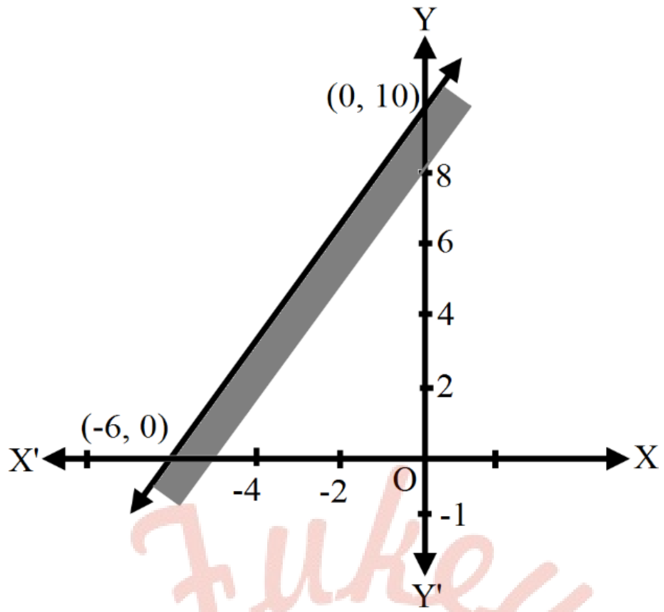
3y - 5y < 30

उत्तर- दी हुई असमिका 3y - 5x < 30

सरल रेखा 3y - 5x = 30, बिन्दु (-6, 0) और (0, 10) से होकर जाती है।

असमिका 3y - 5x < 30 में x = 0, y = 0 रखने पर 0 <30 सत्य है।

मूल बिन्दु (0, 0), 3y - 5x < 30 के क्षेत्र में है। इसका आलेख दी गई आकृति में दर्शाया गया है।



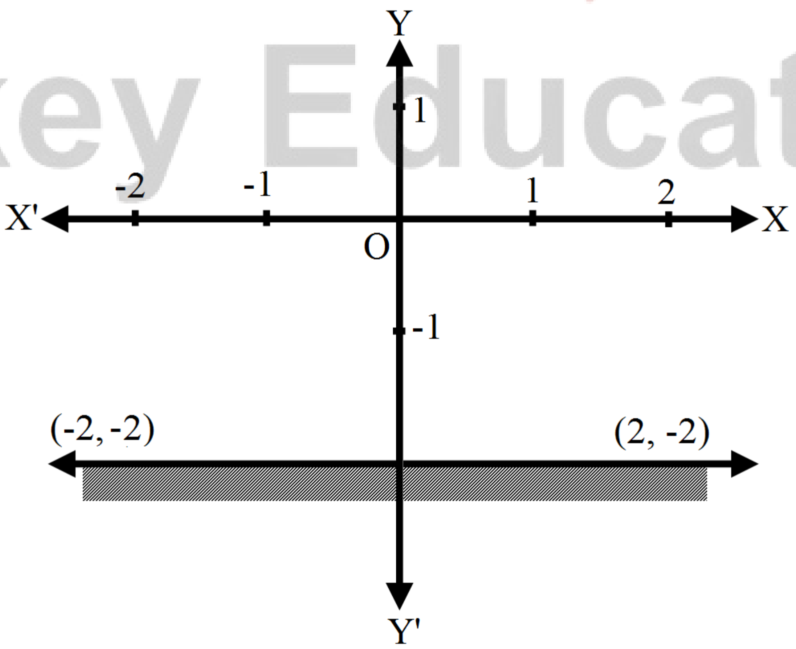
प्रश्न 9 निम्नलिखित असमिकाओं को आलेखन विधि से द्विमीतिय तल में निरूपित कीजिए।

y < -2

उत्तर- दी हुई रैखिक असमिका y < -2 सरल रेखा y = -2 बिन्दु (2, -2) और (-2, -2) से होकर जाती है।

y < -2 में y = 0 रखने पर < -2, यह सत्य नहीं है। मूल बिन्दु (0, 0), < -2 में नहीं।

दी हुई आकृति में छायांकित क्षेत्र से दर्शाया गया है।



प्रश्न 10 निम्नलिखित असमिकाओं को आलेखन विधि से द्विमीतिय तल में निरूपित कीजिए।

x > -3

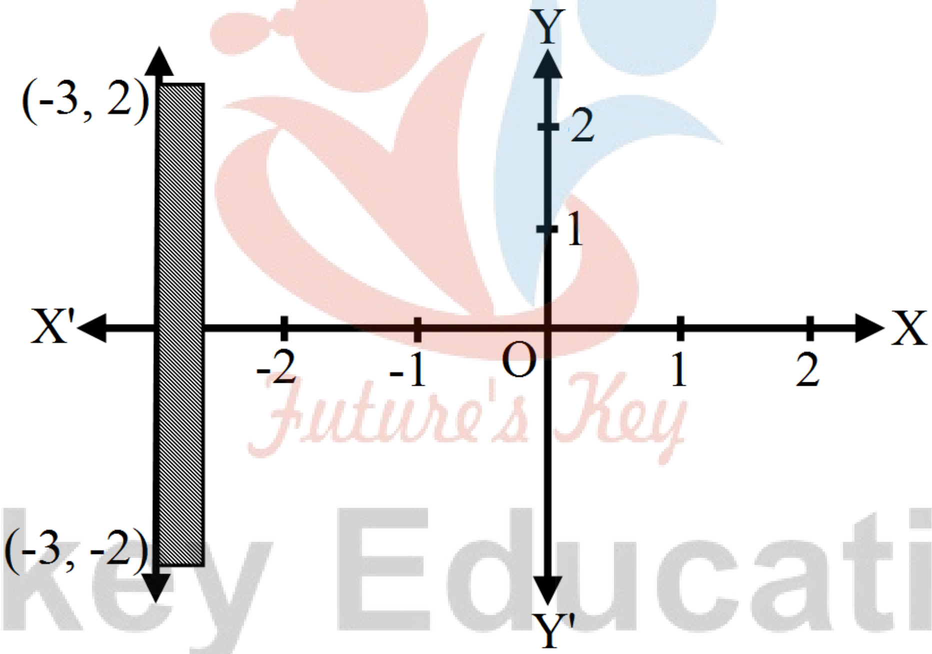
उत्तर- दी हुई रैखिक असमिका x > -3

सरल रेखा x = -3 बिन्दु (-3, 2), (-3, -2) से होकर जाती है।

x > -3 में x = 0 रखने पर,

0 > -3, यह सत्य है।

मूल बिन्दु (0, 0), x > 3 में है। दी हुई आकृति में x > -3 छायांकित क्षेत्र से दर्शाया गया है।



प्रश्नावली 6.3 (पृष्ठ संख्या 140)

प्रश्न 1 निम्नलिखित आसमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

x ≥ 3, y, ≥ 2

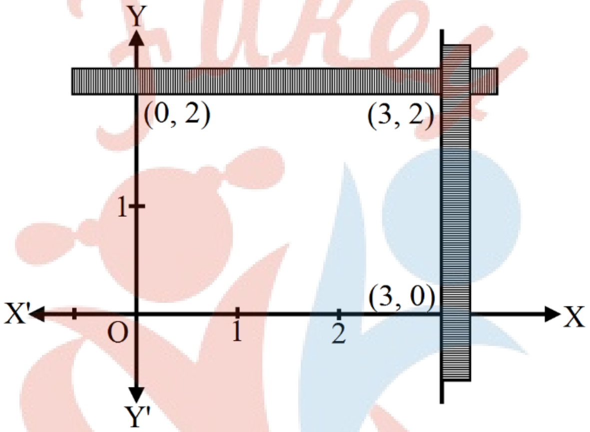
उत्तर- x ≥ 3, y, ≥ 2

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

(i) सरल रेखा x = 3 बिन्दु (3, 0) और (3, 2) से होकर जाती है। $x \geq 3$ में x = 0 रखने पर $0 \geq 3$, यह सत्य नहीं है।

मूल बिन्दु (0, 0) $x \geq 3$ के क्षेत्र में नहीं है।

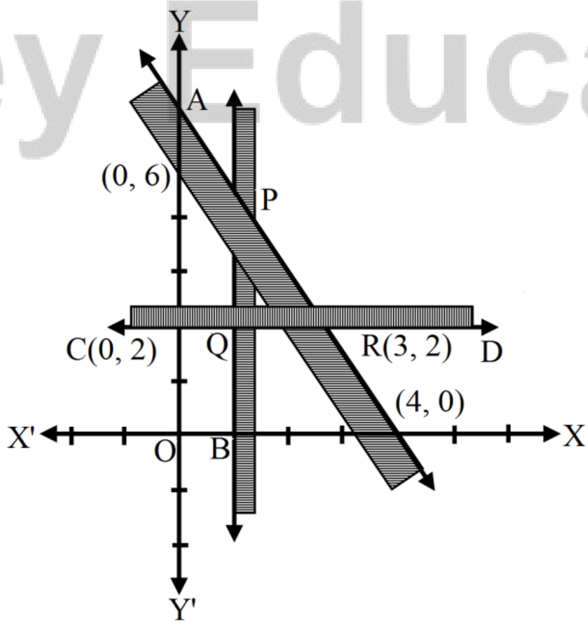
(ii) सरल रेखा y = 2 बिन्दु (0, 2) और (3, 2) से होकर जाती है। $y \geq 2$ में y = 0 रखने पर $0 \geq 2$, यह सत्य नहीं है। मूल बिन्दु (0, 0) इसके क्षेत्र में नहीं है। $x \geq 3$ और $x \geq 2$ का हल उभयनिष्ठ छायांकित क्षेत्र से दर्शाया गया है।



प्रश्न 2 निम्नलिखित आसमिका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

$3x + 2y \leq 12, x \geq 1, y \geq 12$

उत्तर-



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

i. रेखा 3x + 2y = 12 बिन्दु (2, 0) और (0, 6) से होकर जाती है।

$3x + 2y \leq 12$ में x = 0, y = 0 रखने पर।

$0 + 0 \leq 12$, अर्थात् $= 0 \leq 12$ जो सत्य है।

मूल बिन्दु (0, 0) इसके क्षेत्र में है।

$3x + 2y \leq 12$ के हल में वे सभी बिन्दु हैं जो AB के नीचे है।

ii. रेखा x = 1 बिन्दु B(1, 0), Q(1, 2) से होकर जाती है।

$x \leq 1$ में x = 0 रखने पर $0 \leq 1$, यह सत्य नहीं है।

मूल बिन्दु (0, 0) इसके क्षेत्र में नहीं है।

$x \geq 1$ को हल के सभी बिन्दु है जो है जो x = 1 के दाईं ओर है।

iii. रेखा y = 2, बिन्दु C(0, 2) और D(3, 2) से होकर जाती है।

$y \geq 2$ में y = 0 रखने पर $0 \geq 2$, यह सत्य नहीं है।

मूल बिन्दु (0, 0) इसके क्षेत्र में नहीं है।

y ≥ 2y ≥ 2 का हल वे सब बिन्दु हैं जो y = 2 के ऊपर हैं। तीनों असमिकाओं का हल इसके उभयनिष्ठ क्षेत्र △POR के सभी बिन्दु हैं।

प्रश्न 3 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

2x + y ≥ 6, 3x + 4y ≤ 12

उत्तर- दी हुई असमीका 2x + y ≥ 6, 3x + 4y ≤ 12

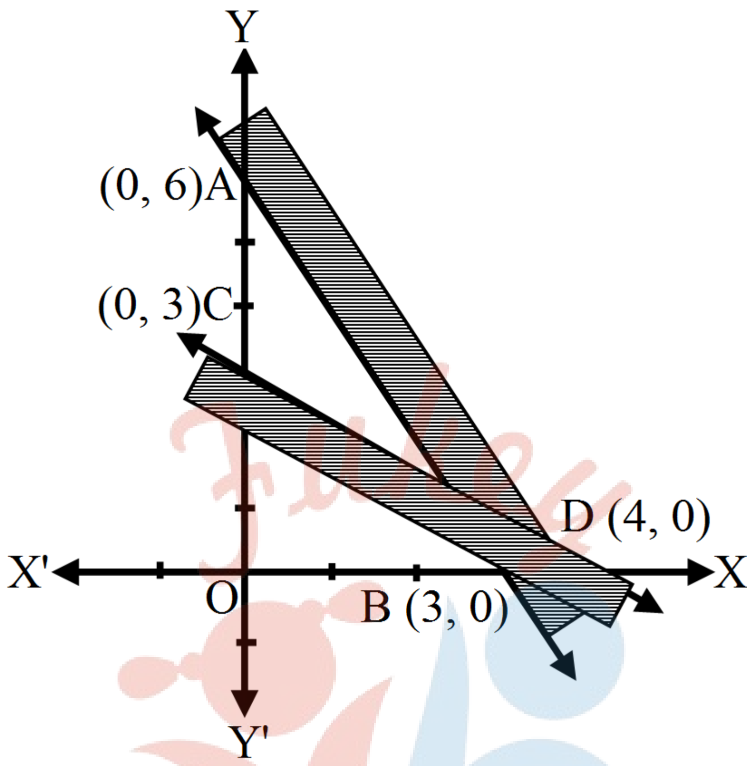
सरल रेखा 2x + y = 6 बिन्दु (3, 0) तथा (0, 6) से होकर जाती हैं।

2x + y ≤ 6 में x = 0, y = 0 रखने पर 0 ≤ 6 जो सत्य नहीं है।

मूल बिन्दु (0, 0) इसके क्षेत्र में नहीं है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$2x + y \geq 6$ का हुल वे सभी बिन्दु हैं जो $2x + y = 6$ के ऊपर हैं।



सरल रेखा $3x + 4y = 12$ बिन्दु D(4, 0) और C(0, 3) से होकर जाती है।

$3x + 4y \leq 12$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 + 0 \leq 12$, जो सत्य है।

मूल बिन्दु (0, 0) इसके क्षेत्र में है।

अत: $3x + 4y \leq 12$ का हल वे सब बिन्दु हैं जो रेखा CD के नीचे

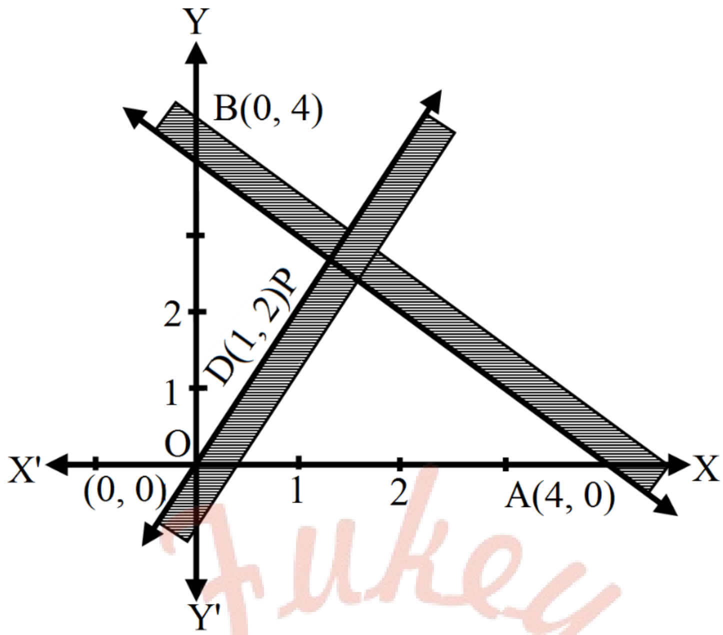
इस प्रकार $2x + y \geq 6$, $3x + 4y \leq 12$ का हल वह उभयनिष्ठ क्षेत्र है जो $2x + y = 6$ के ऊपर और $3x + 49 = 12$ के नीचे है। यह चित्र में उभयनिष्ठ क्षेत्र द्वारा दर्शाया गया है।

प्रश्न 4 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

$x + y \geq 4$, $2x - y < 0$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



i. दी हुई असमीका x + y ≥ 4, 2x – y < 0

रेखा x + y = 4 बिन्दु (4, 0) तथा (0, 4) से होकर जाती हैं।

x + y > 4 में x = 0, y = 0 रखने पर 0 > 4 जो सत्य नहीं है।

मूल बिन्दु (0, 0) इसके क्षेत्र में नहीं है।

x + y > 4 का हल वे सभी बिन्दु हैं जो AB के ऊपर हैं।

ii. रेखा 2x - y = 0 बिन्दु O(0, 0) और D(1, 2) से होकर जाती है।

2x - y > 0 में x = 1, y = 0 रखने पर 2 > 0 जो सत्य है।

मूल बिन्दु P(1, 0), 2x - y = 0 इसके क्षेत्र में है।

2x - y = 0 का हल वे सब बिन्दु हैं जो रेखा OD के नीचे है।

प्रश्न 5 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

2x - y > 1, x - 2y < -1

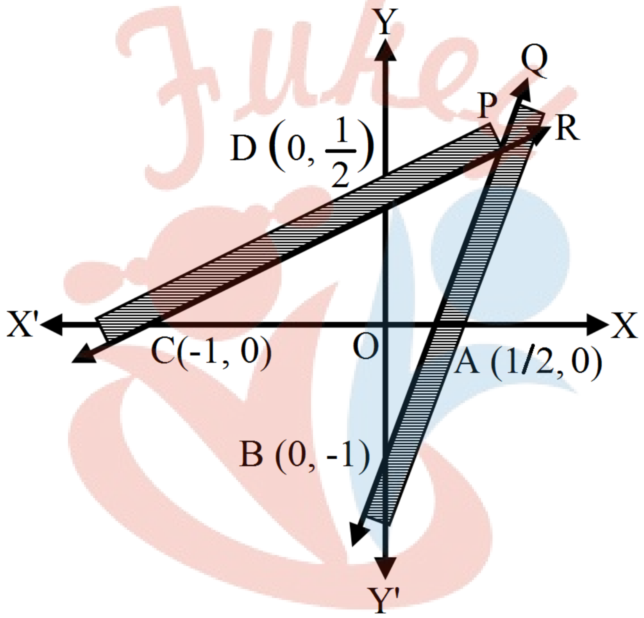
Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर- दी हुई रैखिक असमिकाएँ $2x-y>1$ और $x-2y<-1$

सरल रेखा $2x - y = 1$ बिन्दु $\left(\frac{1}{2},0\right)$ और (0, -1) से होकर जाती है। $2x - y > 1$ में $x = 0$, $y = 0$ रखने पर $0 > 1$, यह सत्य नहीं है।

मूल बिन्दु (0, 0), $2x -y>1$ के क्षेत्र में नहीं है।

$2x - y > 1$ का हल वे सब बिन्दु हैं जो रेखा AB के नीचे है।



रेखा $x - 2y = -1$ बिन्दु C(-1, 0) और D$\left(0,\frac{1}{2}\right)$ से होकर जाती है।

$x - 2y < -1$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 < -1$, यह सत्य नहीं है।

मूल बिन्दु (0, 0) इसके क्षेत्र में नहीं है।

$2x - y> 1$ और $x - 2y < -1$ का हल वह उभयनिष्ठ भाग QPR है जो AB के नीचे और CD के ऊपर है।

प्रश्न 6 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

$x + y \leq 6$, $x + y \geq 4$

उत्तर-

दी हई रैखिक असमिकाएँ $x + y \leq 6$ और$x + y \geq 4$ है।

i. रेखा x + y = 6, बिन्दु A(6,0), B(0, 6) से होकर जाती है।

$x + y \leq 6$ में x = 0, y= 0 रखने पर $0 + 0 \leq 6$ अर्थात् $0 \leq 6$ जो सत्य है।

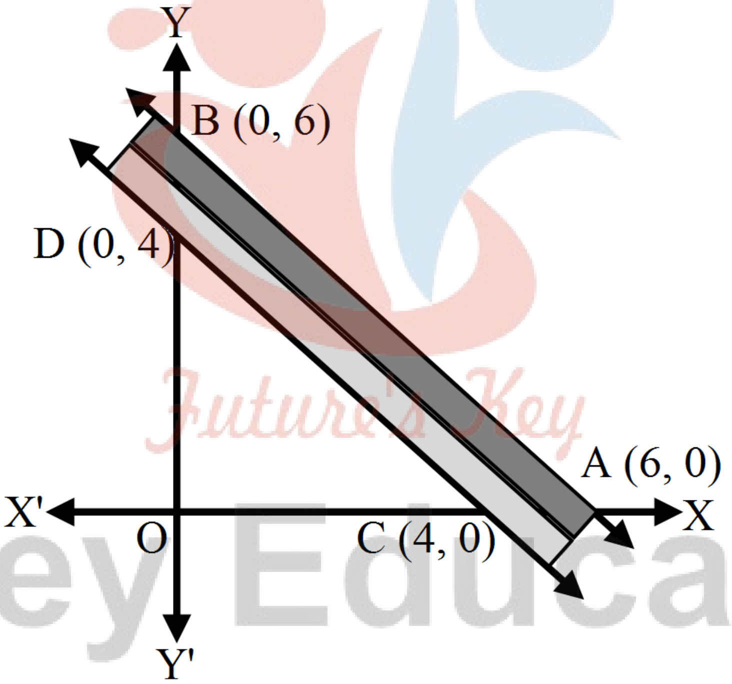
मूल बिन्दु (0, 0), $x + y \leq 6$ के क्षेत्र में है।

ii. रेखा x + y = 4, बिन्दु (4, 0) और D(0, 4) से होकर जाती है।

$x + y \leq 4$ में x = 0, y = 0 रखने पर, $0 \leq 4$, यह सत्य नहीं है।

मूल बिन्दु (0, 0) $x + y \leq 4$ में नहीं है। इसका हल वे सब बिन्दु हैं जो CD के ऊपर है।

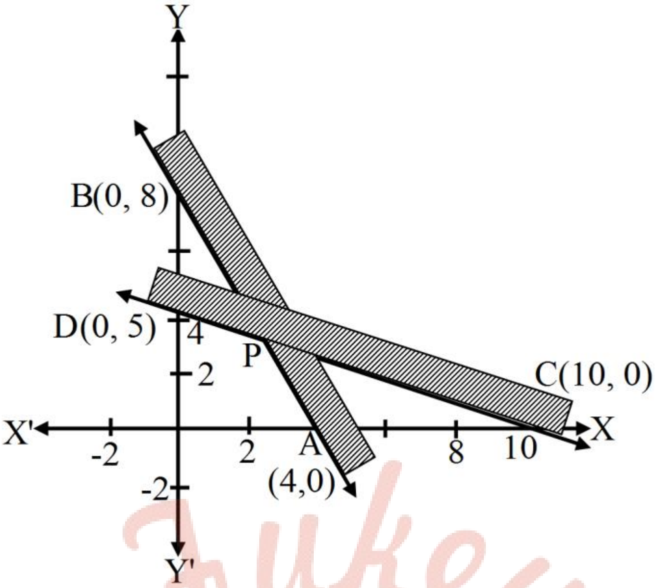
दी हुई आकृति में छायांकित क्षेत्र $x + y \leq 6$ और $x + y \geq 4$ के हल को दर्शाता है।



प्रश्न 7 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

2x + y ≥ 8, x + 2y ≥ 10

उत्तर-



दी हई रैखिक असमिकाएँ $2x + y \geq 8, x + 2y \geq 10$

i. रेखा 2x + y = 8, बिन्दु A(4 0), B(0, 8) से होकर जाती है।

$2x + y \leq 8$ में x = 0, y= 0 रखने पर $0 \leq 8$ जो असत्य है।

मूल बिन्दु (0, 0), के क्षेत्र में नहीं है।

$2x + y \leq 8$ को हल वे सब बिन्दु है जो रेखा AB के ऊपर है।

ii. रेखा x + 2y = 10, बिन्दु C(10, 0) और D(0, 5) से होकर जाती है।

$x + 2y \geq 10$ में x = 0, y = 0 रखने पर, $0 \geq 10$, यह सत्य नहीं है।

मूल बिन्दु (0, 0) $x + 2y \geq 10$ में नहीं है।

$x + 2y \geq 2$ के सब बिन्दु हैं जो CD के ऊपर है।

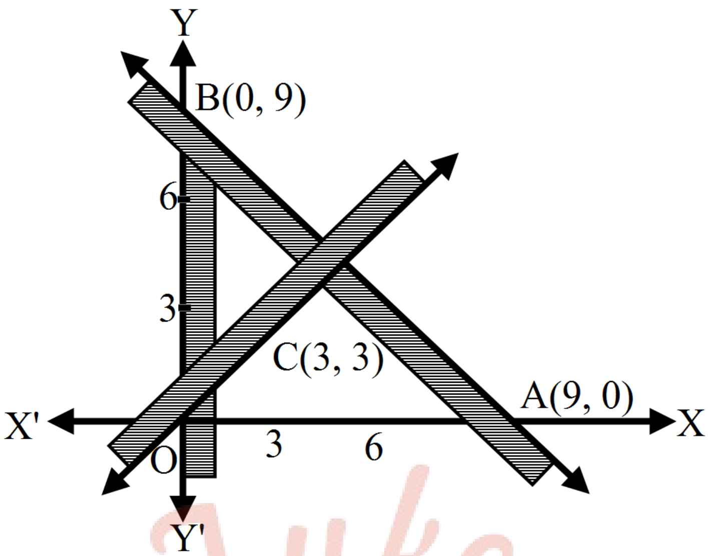
अर्थात $2x + y \geq 8, x + 2y \geq 10$ का हल छायांकित कउभयनिष्ट भाग BPC है।

प्रश्न 8 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

x + y ≤ 9, y > x, x ≥ 0

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



दी हुई रैखिक असमिकाएँ $x + y \leq 9, y > x, x \geq 0$

i. रेखा x + y = 9, बिन्दु A(9, 0), B(0, 9) से होकर जाती है।

$x + y \leq 9$ में x = 0, y= 0 रखने पर $0 + 0 \leq 9$ अर्थात $0 \leq 9$ जो सत्य है।

मूल बिन्दु (0, 0), के क्षेत्र में नहीं है।

$x + y \leq 9$ को हल वे सब बिन्दु है जो रेखा AB के ऊपर है।

ii. रेखा x = y, बिन्दु O(0, 0) और C(3, 3) से होकर जाती है।

x > y में x = 0, y = 3 रखने पर, 3 > 0, यह सत्य है।

मूल बिन्दु (3, 0) इसके क्षेत्र में है।

y > x के सब बिन्दु हैं जो t = x के ऊपर है।

iii. सरल रेखा x = 0, y - अक्ष को रूपांतरित करती है।

$x \geq 0$ में x = 0, y = 0 रखने पर $3 \leq 0$ जो सत्य है।

$x \geq 0$ के सभी बिन्दु x = 0 के दाई ओर है।

आकृति में उभयनिष्ट छायांकित क्षेत्र असमिकाओ $x + y \leq 9, y > x, x \geq 0$ का हल है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 9 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

5x + 4y ≤ 20, x ≥ 1, y ≥ 2

उत्तर-

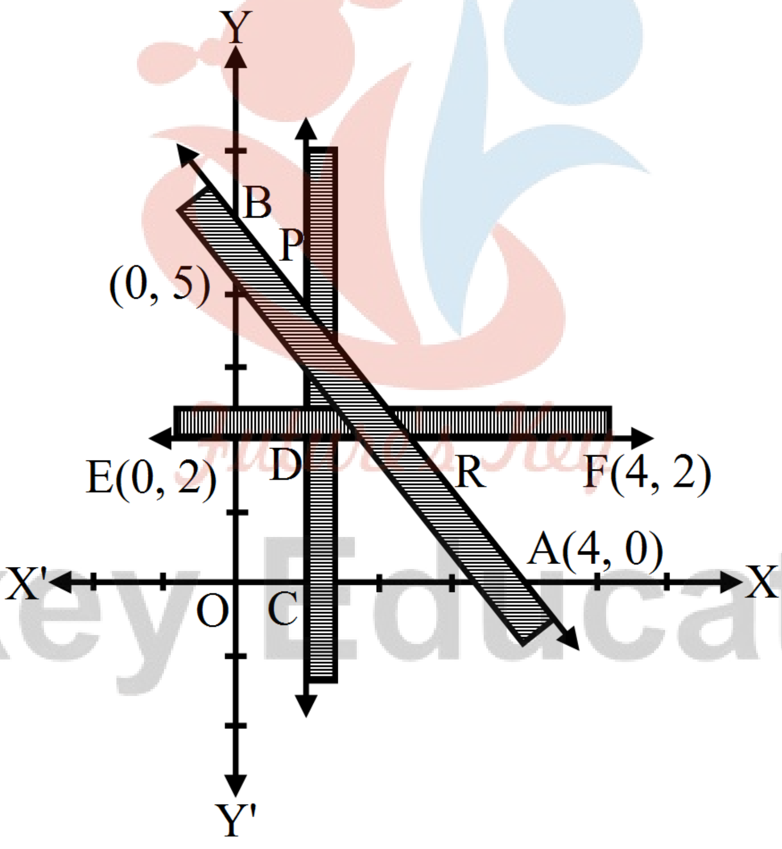
दी हई रैखिक असमिकाएँ $5x + 4y \leq 20, x \geq 1, y \geq 2$

सरल रेखा 5x + 4y - 20 बिन्दु A(4, 0) और B(0, 5) से होकर जाती है।

$5x + 4y \leq 20$ में x = 0, y = 0 रखने पर, $0 + 0 \leq 20$ अर्थात $0 \leq 20$ जो सत्य में है।

मूल बिन्दु (0, 0) इसके क्षेत्र में है।

$5x + 4y \leq 20$ के सभी बिन्दु रेखा AB के निचे है।



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

i. x = 1 बिन्दु C(1, 0), D(1, 2) से होकर जाती है।

$x \geq 1$ में x = 0 रखने पर $0 \leq 1$ जो सत्य है।

$x \geq 1$ के सभी बिन्दु x= 1 के दाई और होते है।

ii. y = 2 बिन्दु E(0, 2) और F(4, 2) से होकर जाती है।

मूल बिन्दु इसके क्षेत्र में नहीं है।

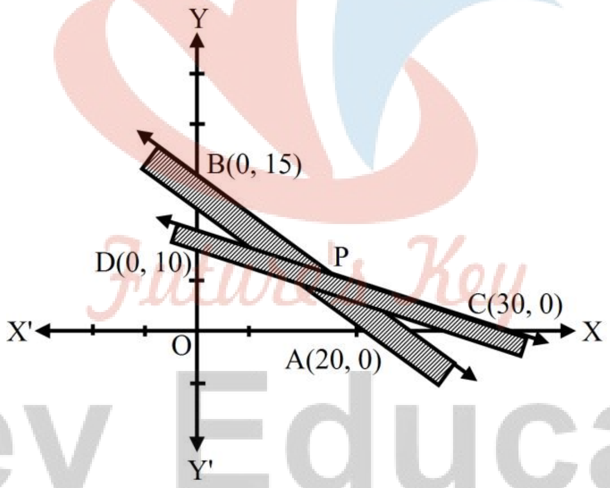
$y \geq 2$ का हल वे सब बिन्दु है जो EF के ऊपर है।

दो हुई असमिकाओ का हल आकृति में उभयनिष्ट PDR छायांकित क्षेत्र द्वारा दर्शाया गया है।

प्रश्न 10 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

$3x + 4y \leq 60,\ x + 3y \leq 30,\ x \leq 0,\ y \leq 0$

उत्तर-



i. दी हुई असमिकाएँ $3x + 4y \leq 60, x + 3y \leq 30, x \leq 0, y \leq 0$

रेखा 3x + 4y = 60 बिन्दु A (20, 0) तथा B (0, 15) से होकर जाती है।

असमिका $3x + 4y \leq 60$ में x = 0, y = 0 रखने पर $0 \leq 60$ जो सत्य

मूल बिन्दु इस क्षेत्र में पड़ता है।

इस असंमिका का हल वे सब बिन्दु हैं जो AB के नीचे हैं।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

ii. रेखा x + 3y = 30 बिन्दु C(30, 0) और D(0, 10) से होकर जाती

असमिका $x + 3y \le 30$ में x = 0, y = 0 रखने पर $0 \le 30$ जो सत्य

मूल बिन्दु इसके क्षेत्र में है।

इसका हल वे सब बिन्दु हैं जो CD के नीचे हैं।

iii. x = 0, y-अक्ष को निरुपित करती है।

$x \ge 0$ में वे सब बिन्दु हैं जो y-अक्ष की दाईं ओर हैं।

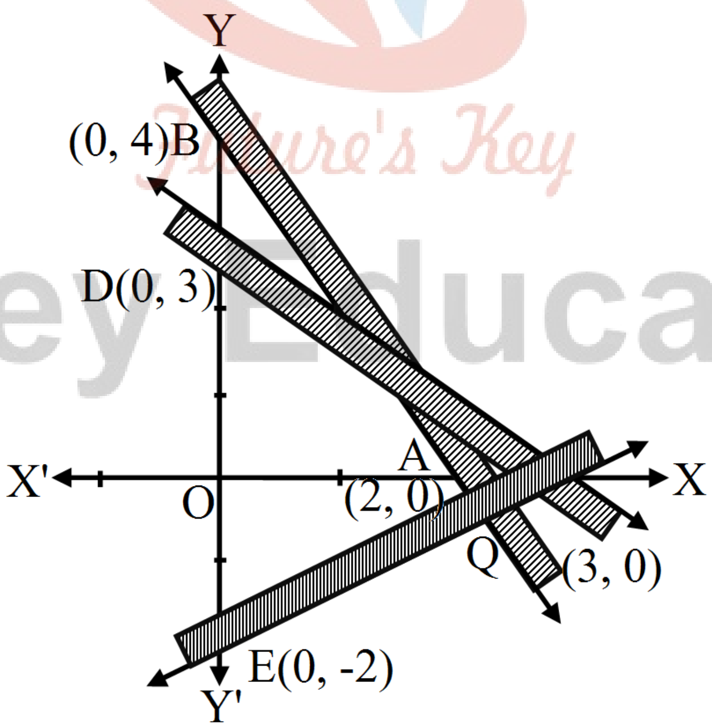
iv. y = 0, x-अक्ष को निरुपित करती है। और $y \ge 0$ में वे सब बिन्दु हैं जो x-अक्ष के ऊपर हैं।

दी हुई असमिका का हल वे सब बिन्दु हैं जो उभयनिष्ठ क्षेत्र PDOA में आते हैं।

प्रश्न 11 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

$2x + y \ge 4,\ x + y \le 3,\ 2x - 3y \le 6$

उत्तर-



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

दी हुई असमिकाएँ $2x + y \geq 4, x + y \leq 3, 2x - 3y \leq 6$

i. रेखा 2x + y = 4 बिन्दु A(2, 0) तथा B(0, 4) से होकर जाती है।

असमिका $2x + y \geq 4$ में x = 0, y = 0 रखने पर $0 + 0 \geq 4$ अर्थात $0 \geq 4$ जो सत्य नहीं है।

मूल बिन्दु इस क्षेत्र में नहीं है।

इसका हल वे सब बिन्दु हैं जो AB के ऊपर हैं।

ii. रेखा x + y = 3 बिन्दु C(3, 0) और D(0, 3) से होकर जाती हैं।

असमिका $x + y \leq 3$ में x = 0, y = 0 रखने पर $0 \leq 3$ जो सत्य हैं।

मूल बिन्दु इसके क्षेत्र में है।

इसका हल वे सब बिन्दु हैं जो CD के नीचे हैं।

iii. रेखा 2x - 3y =6 बिन्दु C(3, 0) और D(0, 3) से होकर जाती हैं।

असमिका $2x + 3y \leq 6$ में x = 0, y = 0 रखने पर $0 \leq 6$ जो सत्य हैं।

मूल बिन्दु इसके क्षेत्र में है। इसका हल वे सब बिन्दु है जो SE के ऊपर है।

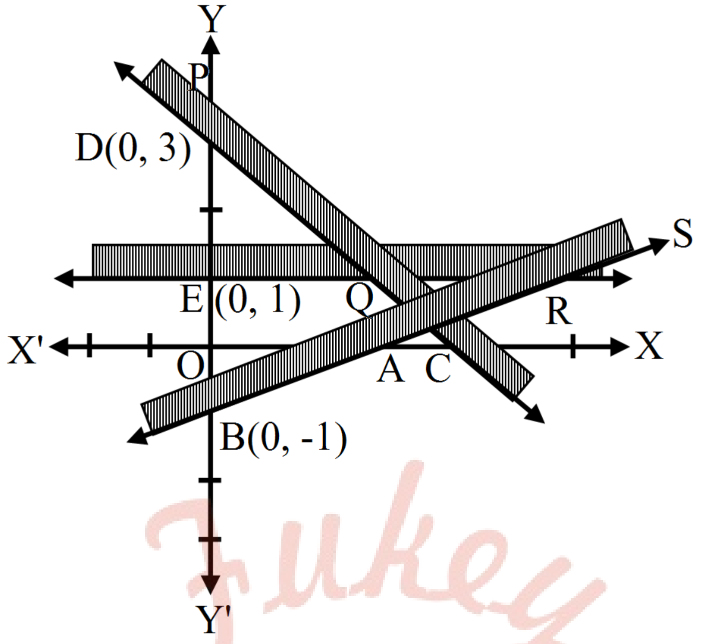
दी हुई असामिकाओ का हल छायांकित क्षेत्र AQC के सब बिन्दु है।

प्रश्न 12 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

$x - 2y \leq 3, 3x + 4y \geq 12, x \geq 0, y \geq 1$

उत्तर- दी हुई असमिकाएँ $x - 2y \leq 3, 3x + 4y \geq 12, x \geq 0, y \geq 1$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



i. रेखा x - 3y = 3 बिन्दु A(3, 0) तथा B(0, -1) से होकर जाती है।

असमिका x – 3y ≤ 3 में x = 0, y = 0 रखने पर 0 ≤ 3 जो सत्य है।

∴ मूल बिन्दु इस क्षेत्र में नहीं है।

इसका हल वे सब बिन्दु हैं जो AB के ऊपर हैं।

ii. रेखा 3x + 4y = 12 बिन्दु C(4, 0) और D(0, 3) से होकर जाती हैं।

असमिका 3x + 4y ≥ 12 में x = 0, y = 0 रखने पर 0 ≤ 12 जो सत्य नहीं हैं। मूल बिन्दु इसके क्षेत्र में नहीं है।

इसका हल वे सब बिन्दु हैं जो CD के ऊपर हैं।

iii. x = 0, x-अक्ष को दर्शाता है।

x ≥ 1 का हल वे सब बिन्दु है जो y-अक्ष के दाई ओर है।

iv. रेखा y = 1 बिन्दु E(0, 1) और Q(3, 1) से होकर जाती हैं।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

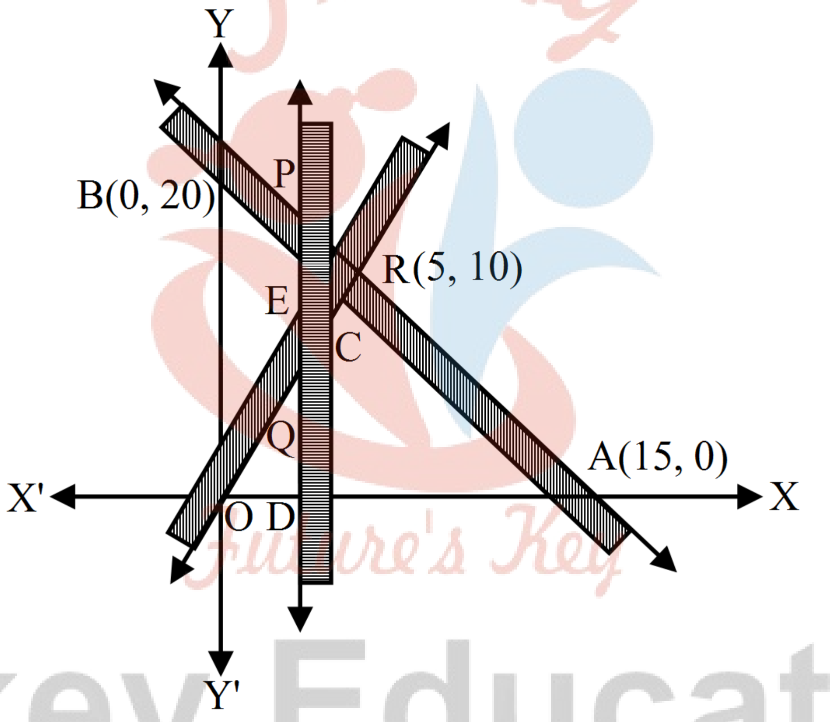
असमिका $y \geq 1$ का हल वे सब बिन्दु है जो संख्या $y = 1$ पर पड़ते है या इसके ऊपर है।

दी हुई असामिकाओ का हल वे सब बिन्दु है जो उभयनिष्ट क्षेत्र PDQRS से निरूपित किया गया है।

प्रश्न 13 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

$4x + 3y \leq 60$, $y + 2x$, $x \geq 3$, $x, y \geq 0$

उत्तर- दी हुई असमिकाएँ $4x + 3y \leq 60$, $y + 2x$, $x \geq 3$, $x, y \geq 0$



i. सरल रेखा $4x + 3y = 60$, बिन्दु A(15, 0), B(0, 20) से होकर जाती है।

$4x + 3y \leq 60$ में $x = 0$, $y = 0$ रखने पर $0 \leq 60$ जो सत्य है।

मूल बिन्दु इसके क्षेत्र में है। इस असमीका का हल वे सब बिन्दु हैं जो AB या AB के निचे हैं।

ii. $y - 2y = 0$ बिन्दु O(0, 0) और C(5, 10) से होकर जाती हैं।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$y + 2x \geq 0$ में $x = 5, y = 0$ रखने पर $0 - 10 \geq 0$ अर्थात $-10 \geq 0$ जो सत्य नहीं हैं।

बिन्दु (5, 0) इसके क्षेत्र में नहीं है।

$y - 2x \geq 0$ को हल वे सब बिन्दु हैं जो OC पर ओर OC के ऊपर हैं।

iii. रेखा $x \geq 3$ बिन्दु D(3, 0), E(3, 10) से होकर जाती है।

असमीका $x \geq 3$ के हल वे बिन्दु हे जो DE या CE के दाई ओर है।

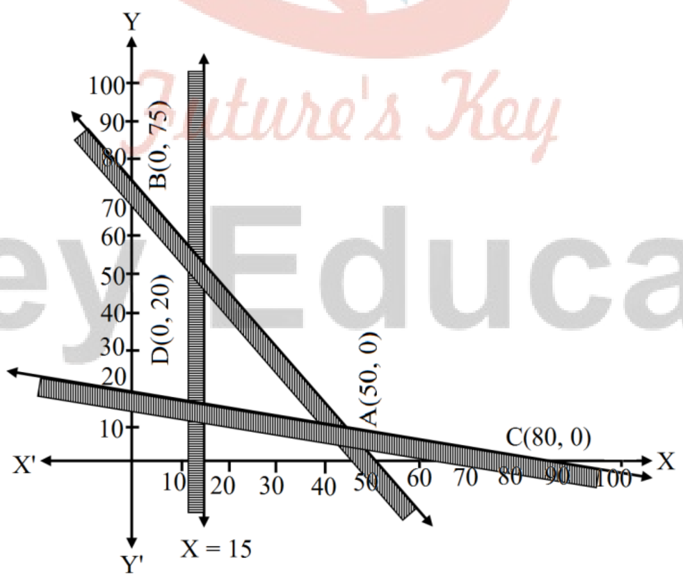
$x \geq 0, y \geq 0$ पहले चतुर्थाश के बिन्दु है।

दी हुई असमिकवो का हल उभयनिष्ठ क्षेत्र POR पर ओर उसके अन्दर के बिन्दु है।

प्रश्न 14 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

$3x + 2y \leq 150, x + 4y \leq 80, x \leq 15, y \geq 0, x \geq 0$

उत्तर- दी हुई असमिकाएँ $3x + 2y \leq 150, x + 4y \leq 80, x \leq 15, y \geq 0, x \geq 0$



i. सरल रेखा $3x + 2y = 150$, बिन्दु A(50, 0), B(0, 75) से होकर जाती है।

असमिकाएँ $3x + 2y \leq 150$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \leq 150$ जो सत्य है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

मूल बिन्दु इसके क्षेत्र में है।

इसका हल वे सब बिन्दु हैं जो AB या AB के निचे हैं।

ii. रेखा $x - 4y = 80$ बिन्दु C(80, 0) और D(0, 20) से होकर जाती हैं।

असमीका $x + 4y \geq 80$ में $x = 5, y = 0$ रखने पर $0 \leq 80$ जो सत्य हैं।

मूल बिन्दु इस क्षेत्र में है। इसका हल वे सब बिन्दु है जो CD पर या CD के निचे स्थित है।

iii. $x = 15$ रेखा -अक्ष के समान्तर है और $x \leq 15$ का हल है।

बिन्दु है जो $x = 15$ पर या उसके बाई और स्थित है।

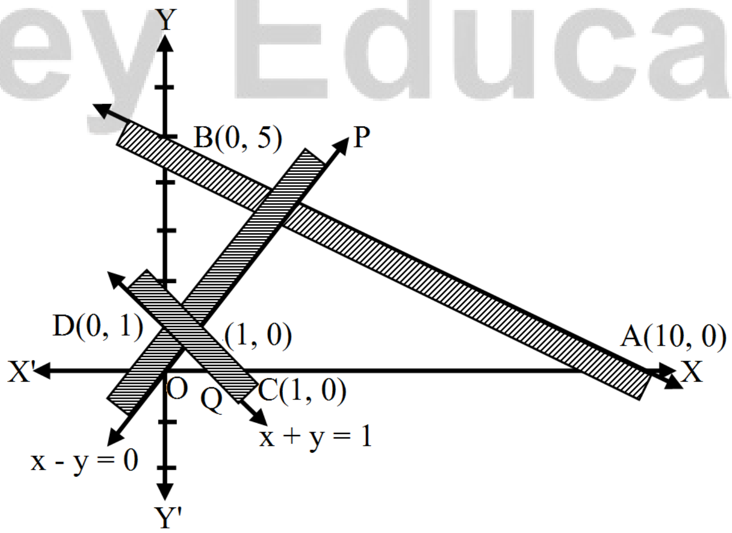
iv. $y \geq 0$ में y -अक्ष पर ओर उसके ऊपर के सब बिन्दु है

दी हुई असमिकवो का हल उभयनिष्ठ क्षेत्र PORS है।

प्रश्न 15 निम्नलिखित असमीका निकाय को आलेखित विधि से हल कीजिए।

$x + 2y \leq 10, x + y \geq 1, x - y \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$

उत्तर- दी हुई असमिकाएँ $x + 2y \leq 10, x + y \geq 1, x - y \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

i. सरल रेखा $x + 2y = 10$, बिन्दु A(10, 0), B(0, 5) से होकर जाती है।

असमिकाएँ $x + 2y \leq 10$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \leq 10$ जो सत्य है।

मूल बिन्दु इसके क्षेत्र में है।

इस असमीका का हल वे सब बिन्दु हैं जो AB या AB के निचे हैं।

ii. रेखा $x + y = 1$ बिन्दु C(1, 0) और D(0, 1) से होकर जाती हैं।

असमीका $x + y \geq 1$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \geq 1$ जो सत्य नहीं हैं।

मूल बिन्दु इसके क्षेत्र में नहीं है। इस असामिका का हल वे सब बिन्दु हे जो CD पर है या इसके ऊपर है।

iii. रेखा $x - y = 0$ बिन्दु (0, 0) और (1, 1) से होकर जाती है।

असमीका $x - y \leq 0$ में $x = 0, y = 0$ रखने पर $0 \leq 0$ जो सत्य है (0, 0) इसके क्षेत्र में है।

इस असमीका का हल बिन्दु जो $x - y = 0$ पर है या इसके ऊपर है।

iv. $x \geq 0$ वह क्षेत्र है जो y-क्षेत्र के दाईं ओर है।

$y \geq 0$ वह क्षेत्र हे जो x-क्षेत्र के ऊपर है।

दी हुई असमिकाओ का हल वे सब बिन्दु है जो उभनिष्ठ क्षेत्र PQDB है।

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 143-144)

प्रश्न 1 असमीका को हल कीजिए:

$2 \leq 3x - 4 \leq 5$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$2 \leq 3x - 4 \leq 5$$

$$2 + 4 \leq 3x \leq 5 + 4$$

$$6 \leq 3x \leq 9$$

3 से दोनों पक्षों में भाग देने पर

$$2 \leq x \leq 3$$

दी हुई असमीका का हल =[2, 3]

प्रश्न 2 असमीका को हल कीजिए:

$6 \leq -3(2x - 4) < 12$

उत्तर-

$$6 \leq -3(2x - 4) < 12, 6 \leq -6(x - 2 > 12)$$

-6 से दोनों पक्षों में भाग देने पर

$$-1 \geq x - 2 > -2$$

$$-1 + 2 \geq x > -2 + 2$$

$$1 \geq x > 0 \text{ या } 0 < x \leq 1$$

दी हुई असमीका का हल [0, 1]

प्रश्न 3 समीका को हल कीजिए:

$$-3 \leq 4 - \frac{7x}{2} \leq 18$$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

दी हुई असमीका $-3 \leq 4 - \frac{7x}{2} \leq 18$

2 से गुना करने पर $-6 \leq 8 - 7x \leq 36$

8 घटने पर $-14 \leq -7x \leq 28$

-7 से भाग देने पर $2 \geq x \geq -4, -4 \leq x \leq 2$

∴ दी हुई असमिका का हल [-4, 2]

प्रश्न 4 असमीका को हल कीजिए:

$$-15 < \frac{3(x-2)}{2} \leq 0$$

उत्तर-

$$-15 < \frac{3(x-2)}{2} \leq 0$$

5 से गुना करने पर $-75 \leq 3x - 6 \leq 0$

$$-75 + 6 < 3x \leq 6$$

3 से भाग देने पर $\frac{-69}{3} < x \leq 2, -23 < x \leq 2$

∴ दी हुई असमिका का हल [-23, 2]

प्रश्न 5 असमीका को हल कीजिए:

$$-12 < 4\frac{3x}{-5} \leq 2$$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$-12 < 4\frac{3x}{-5} \leq 2$$

$$-12 < 4 + \frac{3x}{5} \leq 2$$

4 घटने पर $-16 < \frac{3x}{-5} \leq -2$

$\frac{5}{3}$ से गुणा करने पर $-\frac{80}{3} < x \leq \frac{-10}{3}$

$\therefore$ दी हुई असमिका का हल $\left[-\frac{80}{3}, \frac{-10}{3}\right]$

प्रश्न 6 असमीका को हल कीजिए:

$$7 \leq \frac{(3x+11)}{2} \leq 11$$

उत्तर-

$$7 \leq \frac{(3x+11)}{2} \leq 11$$

11 घटने पर $3 \leq 3x \leq 11$

3 से गुणा करने पर $1 \leq x \leq \frac{11}{3}$

$\therefore$ दी हुई असमिका का हल $\left[1, \frac{11}{3}\right]$

प्रश्न 7 असमिका को हल कीजिए और उनके हल को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

5x + 1 > -24, 5x - 1 < 24

उत्तर- 5x + 1 > -24, 5x - 1 < 24

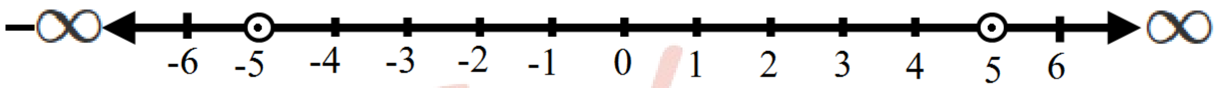
5x + 1 > -24 या 5x > -25 या x > -5

5x - 1 < 24 या 5x < 25

x < 5

असमिकाओ का हल (-5, 5)

इसका संख्या रेखा दवरा निरूपण इस प्रकार है:



प्रश्न 8 असमिका को हल कीजिए और उनके हल को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

2(x - 1) < x + 5, 3 (x + 2) > 2 - x

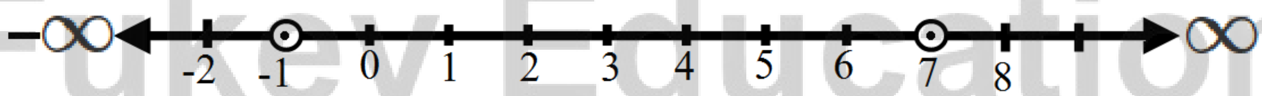
उत्तर- दी हुई असमिकाएँ 2(x - 1) < x + 5 या 3 (x + 2) > 2 - x

∴ 2x - 2 < x + 5 या 3x + 6 > 2 - x

x < 7 या 3x + x > 2 - 6

4x > -4 ∴ x > -1

असमिकाओ का हल (-1, 7)



प्रश्न 9 असमिका को हल कीजिए और उनके हल को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

3x - 7 > 2 (x - 6), 6 - x > 11 - 2x

उत्तर- दी हुई असमिकाएँ 3x - 7 > 2 (x - 6), या 6 - x > 11 - 2x

3x - 7 > 2(x - 6) या 6 - x > 11 - 2x

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

3x - 7 > 2x - 12

2x को बायीं और तथा 7 को दायी लाते हुए

2x को दायी और लाने पर

3x - 2x > -12 + 7

6 + 2x - x > 11

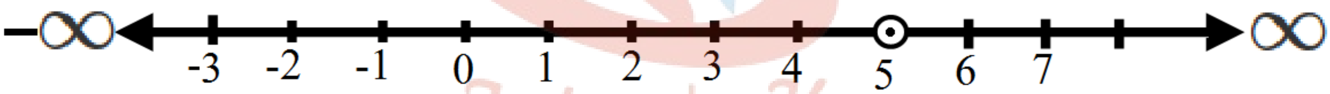
x > -5

6 + x > 11

x > 11 - 6

x > 5

दी हुई असमिकाओ का हल (5, ∞) है और संख्या रेखा पर निरूपण इस प्रकार है।



प्रश्न 10 असमिका को हल कीजिए और उनके हल को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

$5(2x-7)-3(2x+3) \leq 0, 2x+19 \leq 6x+47$

उत्तर-

दी हुई असमिकाएँ $5(2x-7)-3(2x+3) \leq 0,\ 2x+19 \leq 6x+47$

$10x - 35 - 6x - 9 \leq 0$

$2x - 6x \leq 47 - 19$

$4x - 44 \leq 0$

$-4x \leq 28$

Fukey Education

$4x \leq 44$

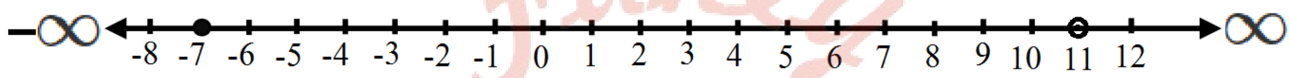
$x \geq -7$

4 से भाग देने पर

$x \leq 11$

$\therefore$ असमिकाओ का हल $= [-7, 11]$

इसकी संख्या रेखा इस प्रकार है।



प्रश्न 11 एव वलयन को 68° F और 77° F के मध्य रखना है। सेल्सियस पैमाने पर विलयन के तापमान का परिसर ज्ञात कीजिए, जहाँ सेल्सियस फारेनहाइट परिवत सूत्र $F = \frac{9}{5}C + 32$ है।

उत्तर-

दिया है: $F = \frac{9}{5}C + 32$

और $68^\circ < F < 77^\circ$

$\Rightarrow 68^\circ < \frac{9}{5}C + 32^\circ < 77^\circ$

32 घटने पर $68^\circ - 32^\circ < \frac{9}{5}C < 77^\circ - 32^\circ$

$36^\circ < \frac{9}{5}C < 45^\circ$

$\frac{5}{9}$ से गुणा करने पर $20^\circ < C < 25^\circ$

$\therefore$ C का परिसर अंतराल $(20^\circ, 25^\circ)$

प्रश्न 12 8% बोरिक एसिड के विलयन में 2% बोरिक एसिड का विलयन मिलाकर तनु (dilute) किया जाता है। परिणामी मिश्रण में बोरिक एसिड 4% से अधिक तथा 6% से कम होना चाहिए। यदि हमारे पास 8% विलयन की मात्रा 640 लिटर हो तो ज्ञात कीजिए कि 2% विलयन के कितने लिटर इसमें मिलाने होंगे?

उत्तर- माना 2% बोरिक एसिड का x लीटर विलयन मिलाया जाता है।

कुल मिश्रण में 4% से अधिक 640 + x

i. यदि मिश्रण में 4% से अधिक का विलयन है तो

x का 2% + 640 का 8% > (640 + x) को 4%

$$\frac{2}{100}+x+\frac{8}{100}\times 640<\frac{4}{100}\times(640+x)$$

$$2x+5120>2560+4x$$

$$5120-2560<4x-2x$$

$$2x<2560$$

$$x<1280$$

ii. यदि मिश्रण 6% बोरिक मिश्रण एसिड विलयन से कम है।

x का 2% + 640 का 8% < (640 + x) का 6%

$$\frac{2}{100}\times x+\frac{8}{100}\times 640<\frac{6}{100}\times(640+x)$$

$$2x+5120-3840<6x$$

$$5120-3840<6x-2x$$

$$\Rightarrow 4x>1280$$

$$\therefore x>320$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

इस प्रकार 2% एसिड विलयन की मात्रा 320 लीटर से अधिक और 1280 लीटर से काम होनी चाहिए।

प्रश्न 13 45% अम्ल के 1125 लिटर विलयन में कितना पानी मिलाया जाए कि परिणामी मिश्रण में अम्ल 25% से अधिक परंतु 30% से कम हो जाए?

उत्तर- मान लीजिए 45% एसिड विलयन में x लीटर पानी मिलाया जाये तो मिश्रण की कुल मात्रा = (1125 + x) लीटर

i. (1125 + x) का 25% < 1125 का 45%

$$\therefore \frac{25}{100} \times (1125 + x) < \frac{45}{100} \times 1125$$

20 से गुणा करने पाए

$$5(1125 + x) < 9(1125)$$

$$5625 + 5x < 10125$$

$$5x < 10125 - 5625$$

$$x \frac{4500}{5}$$

$$\Rightarrow x < 900$$

ii. (1125 + x) का 30% > 1125 का 45%

$$\therefore \frac{30}{100} \times (1125 + x) > \frac{45}{100} \times 1125$$

$\frac{20}{3}$ से गुणा करने पर

$$2(1125 + x) > 3 \times 1125$$

$$2250 + 2x > 3375$$

Fukey Education

$$2x > 3375 - 2250$$

$$x > \frac{1125}{2}$$

$$\Rightarrow x > 562.5$$

$$\Rightarrow 562.5 < x < 900$$

अर्थात 562.5 लीटर से अधिक किंतु 100 लीटर से काम

प्रश्न 14 एक व्यक्ति के बौद्धिक-लब्धि (IQ) मापन का सूत्र निम्नलिखित है:

$$iQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

जहाँ MA मानसिक आयु और CA कालानुक्रमी आयु है। यदि 12 वर्ष की आयु के बच्चों के एक समूह की IQ, असमिका 80 < IQ < 140 द्वारा व्यक्त हो, तो उस समूह के बच्चों की मानसिक आयु का परिसर ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

दिया हे की $80 \leq IQ \leq 140$

$$\therefore 80 \leq \frac{MA}{CA} \times 100 \leq 140$$

परन्तु CA = 12 वर्ष

$$\Rightarrow 80 \leq \frac{MA}{12} \times 100 \leq 140$$

Fukey Education

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\frac{3}{5}$ से गुणा करने पर

$$48 \leq \text{MA} \times 5 \leq 84$$

5 भाग देने पर

$$9.6 \leq \text{MA} \leq 16.8$$

अतः मानसिक आयु काम से काम 9.6 वर्ष है और अधिक से अधिक 16.8 है।

s

Fukey Future's Key Fukey Education