गणित

अध्याय-4: द्विघात समीकरण

Fukey Education

द्विघात समीकरण क्या है?

एक द्विघात समीकरण में, एक चर, वर्ग में होता है। इस प्रकार के समीकरण को "घात 2 का समीकरण" भी कहा जाता है। बीजीय व्यंजक $ax^2 + bx + c = 0$, (जहाँ $a \neq 0$ और a, b, c वास्तविक संख्याएं हों) के रूप में होने वाले समीकरण द्विघात समीकरण कहा जाता है।

द्विघात समीकरण के मूल

किसी भी द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, के अधिकतम 2 मूल हो सकते हैं।

उदाहरण के लिए समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ को लेते हैं और इसके मूल ज्ञात करते हैं। समीकरण के गुणनखंड प्राप्त करने के लिए मध्य पद विभाजन के सिद्धांत को अपनाते हैं।

समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ को इस प्रकार से लिख सकते हैं:

$2x^2 - 2x - x + 1 = 0$

$2x(x - 1) - 1(x - 1) = 0$

या $(x - 1)(2x - 1) = 0$

अतः $x = 1, \frac{1}{2}$

इस प्रकार हम कह सकते है कि $x = 1, \frac{1}{2}$ समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ के मूल हैं।

द्विघात समीकरणों को हल करने की विधियाँ

द्विघात समीकरणों को हल करने के लिए निम्नलिखित दो विधियों का प्रयोग करते हैं:

गुणनखंड विधि

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

इस विधि में मध्य पद को इस प्रकार से विभाजित करते हैं कि विभाजित भागों का योग मध्य पद के बराबर हो और दोनों पदों का गुणनफल पहली और तीसरे पद के गुणनफल के बराबर हो।

पूर्ण वर्ग विधि

जब हम एक द्विघात समीकरण जो कि $ax^2 + bx + c$ के रूप में होता है उसे हम जब $a(x + h)^2 + k$ के रूप में बदल देते हैं तब इस विधि को पूर्ण वर्ग बनाना कहते हैं।

अभ्यास के लिए प्रश्न

जॉन और जीवंती दोनों के पास कुल मिलाकर 45 कंचे हैं। दोनों पाँच-पाँच कंचे खो देते हैं और अब उनके पास कंचों की संख्या का गुणनफल 124 है। हम जानना चाहेंगे कि आरंभ में उनके पास कितने-कितने कंचे थे।

उपरोक्त प्रश्न का उत्तर

माना आरम्भ में जॉन के पास x कंचे हैं और जीवंती के पास y कंचे हैं।

प्रश्नानुसार दोनों के पास के कंचों का कुल योग 45 है अर्थात्

$x + y = 45$ (1)

प्रश्न कि दूसरी शर्त के अनुसार दोनों पाँच-पाँच कंचे खो देते हैं तो दोनों के बचे हुए कंचो का गुणनफल 124 है अर्थात्

$(x - 5) \times (y - 5) = 124$ या $xy - 5(x + y) + 25 = 124$, समीकरण 1 से $x + y$ का मान रखने पर

या $xy = 324$ (2)

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

समीकरण 1 से $y = 45 - x$ समीकरण 2 में रखने पर

$x(45 - x) = 324$

या $x^2 - 45x + 324 = 0$ इस समीकरण को इस प्रका लिख सकते हैं

$x^2 - 36x - 9x + 324 = 0$

$x(x - 36) - 9(x - 36) = 0$

इस प्रकार $(x - 36)$ और $(x - 9)$ दो गुणनखंड प्राप्त होते हैं

इसके अनुसार $x = 36, 9$

x का मान समीकरण 1 में रखकर $y = 9, 36$ मिलता है

इस प्रकार मान सकते है कि अगर x का मान 36 है तो y का मान 9 होगा और अगर x का मान 9 है तो y का मान 36 होगा।

गुणनखंडों द्वारा द्विघात समीकरण का हल

द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ पर विचार कीजिए। यदि हम इस समीकरण के बाएँ पक्ष में x को 1 से प्रतिस्थापित करें, तो हमें प्राप्त होता है: $(2 \times 12) - (3 \times 1) + 1 = 0 =$ समीकरण का दाँया पक्ष। हम कहते हैं कि 1 द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ का एक मूल है। इसका यह भी अर्थ है कि 1 द्विघात बहुपद $2x^2 - 3x + 1$ का एक शून्यक है।

गुणनखंड और द्विघात समीकरण का व्यापक रूप

व्यापक रूप में, एक वास्तविक संख्या α द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ का एक मूल कहलाता है, यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो। हम यह भी कहते हैं कि $x = \alpha$ द्विघात समीकरण का एक हल है अथवा α द्विघात समीकरण को संतुष्ट करता है। ध्यान दीजिए कि

द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक और द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल एक ही हैं।

नोट: अतः, किसी द्विघात समीकरण के अधिक से अधिक दो मूल हो सकते हैं।

मध्य पद को विभक्त करके एक द्विघात बहुपद के गुणनखंड प्राप्त करना

मध्य पद को विभक्त करके एक द्विघात बहुपद के गुणनखंड किए जा सकते हैं। हम इस ज्ञान का प्रयोग द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने में करेंगे। एक उदाहरण के माध्यम से इसे समझाने का प्रयास करते हैं:

गुणनखंडन के लिए उदाहरण

गुणनखंडन द्वारा समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

उपरोक्त प्रश्न का हल

सर्वप्रथम हम मध्यपद $-5x$ को $-2x - 3x$ [क्योंकि $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2\times2) \times 3$] के रूप में विभक्त करते हैं।

अतः $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

इसलिए, $2x^2 - 5x + 3$ को $(2x - 3)(x - 1)$ के रूप में पुनः लिखा जा सकता है।

अतः x के वे मान जिनके लिए $2x^2 - 5x + 3 = 0$ वही हैं जो $(2x - 3)(x - 1)$ से प्राप्त होंगे।

अब $2x - 3 = 0$ या $x = 3/2$ और $x - 1 = 0$ या $x = 1$ देता है।

अतः $x = 3/2$ और $x = 1$ दिए हुए समीकरण के हल हैं।

दुसरे शब्दों में $3/2$ और 1 समीकरण $2x^2 - 5x + 3$ के मूल हैं।

Fukey Education

उपरोक्त प्रश्न की समीक्षा

ध्यान दीजिए कि हमने समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूलों को $2x^2 - 5x + 3$ के दो रैखिक गुणनखंडों में गुणनखंडित करके और प्रत्येक गुणनखंड को शून्य के बराबर रखकर प्राप्त किए हैं।

द्विघात समीकरण का पूर्ण वर्ग बनाकर हल

इस विधि को समझने के लिए हम एक उदाहरण का सहारा लेते हैं:

सुनीता की दो वर्ष पूर्व आयु (वर्षों में) तथा अब से चार वर्ष उपरांत की आयु का गुणनफल उसकी वर्तमान आयु के दो गुने से एक अधिक है। उसकी वर्तमान आयु क्या है?

पूर्ण वर्ग बनाकर हल करने की विधि

इसका उत्तर देने के लिए, माना उसकी वर्तमान आयु (वर्षों में) x है। तब, उसकी 2 वर्ष पूर्व आयु एवं अब से चार वर्ष उपरांत की आयु का गुणनफल $(x - 2)(x + 4)$ है।

इसलिए, $(x - 2)(x + 4) = 2x + 1$

अर्थात् $x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

अर्थात् $x^2 - 9 = 0$

अतः सुनीता की वर्तमान आयु द्विघात समीकरण $x^2 - 9 = 0$ को संतुष्ट करती है।

हम इसे $x^2 = 9$ के रूप में लिख सकते हैं। वर्गमूल लेने पर, हम $x = 3$ या $x = -3$ पाते हैं।

क्योंकि आयु एक धनात्मक संख्या होती है, इसलिए $x = 3$ ही होगा।

अतः सुनीता की वर्तमान आयु 3 वर्ष है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

द्विघात समीकरण का पूर्णवर्ग बनाना

समीकरण $x^2 + 4x - 5 = 0$ को पूर्णवर्ग बनाने के लिए इसको लिख सकते हैं $(x + 2)^2 - 9$ या $(x + 2)^2 = 9$ लिख सकते हैं।

वास्तव में, हम किसी भी द्विघात समीकरण को $(x + a)^2 - b^2 = 0$ की तरह बना सकते हैं और फिर हम इसके मूल आसानी से प्राप्त कर सकते हैं।

प्रक्रिया निम्न प्रकार से है:

$x^2 + 4x = \{x2 + (4/2)\ x\} + (4/2)x$

$= x^2 + 2x + 2x$

$= (x + 2)\ x + 2 \times x$

$= (x + 2)\ x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2$

$= (x + 2)\ x + (x + 2) \times 2 - 2 \times 2$

$= (x + 2)\ (x + 2) - 2^2$

$= (x + 2)^2 - 4$

अतः $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 4 - 5 = (x + 2)^2 - 9$

इस प्रकार, $x^2 + 4x - 5 = 0$ को पूर्ण वर्ग बनाकर $(x + 2)^2 - 9 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसे पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से जाना जाता है।

पूर्णवर्ग बनाने की दूसरी विधि

इसको दर्शाने की एक दूसरी विधि निम्न है:

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

समीकरण $3x^2 - 5x + 2 = 0$

इसको लिख सकते हैं $x^2 - (5/3)x + 2/3 = 0$

अब, $\{x - (½)(5/3)\}^2 - \{(½)(5/3)\}^2 + 2/3$

$= (x - 5/6)^2 + 2/3 - 25/36$

$= (x - 5/6)^2 - 1/36$

$= (x - 5/6)^2 - (1/6)^2$

अर्थात् $(x - 5/6) = +1/6$ या $- 1/6$

इसप्रकार $x = 1, 2/3$

दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग $468\ m^2$ है। यदि उनके परिमापों का अंतर 24 m हो, तो दोनों वर्गों की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

इस प्रश्न को पूर्णवर्ग विधि द्वारा हल करते हैं

माना पहले वर्ग की एक भुजा का माप x m है तथा दूसरे वर्ग की एक भुजा का माप y m है।

इसप्रकार पहले वर्ग का क्षेत्रफल $x^2\ m^2$ है तथा दूसरे का $y^2\ m^2$ है

दोनों के क्षेत्रफल का योग = $x^2 + y^2 = 468\ m^2$ है या $x^2 + y^2 = 468$ (1)

तथा दोनों का परिमापों का अंतर $4x - 4y = 24$ है या $x - y = 6$ (2)

समीकरण 2 से $x = 6 + y$ को समीकरण 1 में रखने पर

$(6 + y)^2 + y^2 = 468$

या $36 + 2y^2 + 12y = 468$

या $y^2 + 6y - 216 = 0$

इसको लिख सकते हैं $(y + 3)^2 = 225$

इसलिए, $y + 3 = +15$ या - 15

अतः $y = 12, -18$

वर्ग की भुजा का परिमाप ऋणात्मक नहीं हो सकता है अतः $y = 12$ है।

y का मान समीकरण 2 में रखने पर $x = 18$ है।

द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति

पिछले अनुच्छेद में, आपने देखा है कि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल

$X = (-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$ द्वारा निर्धारित होते हैं।

यदि, $b^2 - 4ac > 0$ है तो दो भिन्न और वास्तविक मूल होंगे। $X = (-b+\sqrt{b^2-4ac})/2a$, $X = (-b-\sqrt{b^2-4ac})/2a$

यदि, $b^2 - 4ac = 0$ है तो दो बराबर और वास्तविक मूल होंगे।

यदि, $b^2 - 4ac < 0$ है तो ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है, जिसका वर्ग $b^2 - 4ac$ हो। अतः दिए हुए द्विघात समीकरण के इस स्थिति में कोई वास्तविक मूल नहीं हैं। क्योंकि $b^2 - 4ac$ यह निश्चित करता है कि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल वास्तविक हैं अथवा नहीं, $b^2 - 4ac$ को इस द्विघात समीकरण का विविक्तकर कहते हैं।

अतः, द्विघात समीकरण $Ax^2 + Bx + C = 0$ के

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

(i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो

(ii) दो बराबर वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो

(iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होता, यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो

मूलों की प्रकृति पर आधारित उदाहरण

द्विघात समीकरण $2x^2 - 4x + 3 = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल

दिया गया समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का है, जहाँ $a = 2$, $b = -4$ और $c = 3$ है।

इसलिए, विविक्तकार $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(3) = 16 - 24 = -8 < 0$ है। अतः दिए गए समीकरण के मूल वास्तविक नहीं हैं।

क्या निम्न स्थिति संभव है? यदि है तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए। दो मित्रें की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पूर्व उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था।

Fukey Education

हल:

उपरोक्त प्रश्न की संभावना को ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम हम मान लेते हैं कि यदि एक की वर्तमान आयु x वर्ष है तो उस स्थिति में दूसरे की आयु $(20 - x)$ वर्ष होगी।

चार वर्ष पूर्व दोनों की आयु का गुणनफल $(x - 4) \times (20 - x - 4) = 48$

या $(x - 4) \times (16 - x) = 48$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

या $16x - 64 + 4x - x^2 = 48$

सरल करने पर $20x - x^2 - 112 = 0$

इसको लिख सकते हैं $x^2 - 20x + 112 = 0$

यह एक द्विघात समीकरण है इसका विविक्तकर ज्ञात करते हैं।

$b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(1)(112) = 400 - 448 = -48 < 0$ है। अतः दिए गए समीकरण के मूल वास्तविक नहीं हैं। इसलिए प्रश्न में व्यक्त कि गई स्थिति संभव नहीं है।

स्मरणीय तथ्य

1. द्विघाती सूत्रः द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल X = (-b±√(b^2-4ac))/2a के द्वारा निर्धारित होते हैं।

यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ हो।

2. एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ में,

दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो।

दो बराबर मूल (अर्थात् संपाती वास्तविक मूल) होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो और

कोई वास्तविक मूल नहीं होते हैं, यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 4.1 (पृष्ठ संख्या 82)

प्रश्न 1 जाँच कीजिए कि क्या निम्न द्विघात समीकरण है।

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

(v) $(2x - 1)2(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

उत्तर-

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x - 6$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 2x + 1 + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 7 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$a = 1, b = 0$ और $c = 7$ प्राप्त होता है

चूँकि $a \neq 0$ है, अतः यह द्विघात समीकरण है।

(ii) $x^2 - 2x = -6 + 2x$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$a = 1, b = -4$ और $c = 6$ प्राप्त होता है

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

चूँकि $a \neq 0$ है, अत: यह द्विघात समीकरण है।

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

$\Rightarrow x^2 + x - 2x - 2$

$= x^2 + 3x - x - 3$

$\Rightarrow x^2 - x^2 + x + x - 2x + 3x - 2 + 3 = 0$

$\Rightarrow 2x - x - 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

$\therefore$ यह द्विघात समीकरण नहीं है।

(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 6x - 3 = x^2 + 5x$

$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = x^2 + 5x$

$\Rightarrow 2x^2 - x^2 - 5x - 5x - 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 10x - 3 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$a = 1, b = -10$ और $c = -3$ प्राप्त होता है

चूँकि $a \neq 0$ है, अत: यह द्विघात समीकरण है।

(v) $(2x - 1)2(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

$\Rightarrow (2x - 1)(2x - 6) = (x + 5)(x - 1)$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\Rightarrow 4x^2 - 12x - 2x + 6 = x^2 + 4x - 5$

$\Rightarrow 4x^2 - 14x + 6 = x^2 - x + 4x - 5$

$\Rightarrow 4x^2 - x^2 - 14x - 4x + 6 + 5 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 18x + 11 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$a = 3, b = -18$ और $c = 11$ प्राप्त होता है

चूँकि $a \neq 0$ है, अत: यह द्विघात समीकरण है।

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 = x^2 - 2x + 4$

$\Rightarrow x^2 - x^2 + 4x + 3x + 1 - 4 = 0$

$\Rightarrow 7x - 3 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

$\therefore$ यह द्विघात समीकरण नहीं है।

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

$\Rightarrow x^3 + 8 + 6 + 12x = 2x^3 - 2x$

$\Rightarrow 2x^3 - x^3 - 6 - 12x + 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 - 10x - 8 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

∴ यह द्विघात समीकरण नहीं है।

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 8 + 6x^2 + 12x$

$\Rightarrow x^3 - x^3 - 4x^2 + 6x^2 - 12x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 13x + 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर

$a = 2$, $b = -13$ और $c = 1$ प्राप्त होता है

चूँकि $a \neq 0$ है, अत: यह द्विघात समीकरण है।

प्रश्न 2 निम्न स्थिति को द्विघात समीकरणों के रूप में निरुपित कीजिए।

(i) एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल 528 मीटर^2 है। क्षेत्र की लंबाई (मीटरों में) चौड़ाई के दुगुने से एक अधिक है। हमें भूखंड की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात करनी है।

(ii) दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है। हमें पूर्णांकों को ज्ञात करना है।

(iii) रोहन की माँ उससे 26 वर्ष बड़ी है। उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल अब से तीन वर्ष पश्चात् 360 हो जाएगी। हमें रोहन की वर्तमान आयु ज्ञात करणी है।

(iv) एक रेलगाड़ी 480 किमी। की दुरी समान चाल से तय करती है। यदि इसकी चाल 8 किमी/घण्टा कम होती, तो वह उसी दूरी को तय करने में 3 घंटे अधिक लेती। हमें रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करनी है।

उत्तर-

(i) एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल = 528 मीटर^2

माना आयताकार भूखंड की चौड़ाई = x मीटर

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

आयताकार भूखंड की लंबाई = 2x + 1 मीटर

आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल = 528 मीटर^2

लंबाई x चौड़ाई = 528

$(2x + 1)x = 528$

$2x^2 + x = 528$

$2x^2 + x - 528 = 0$

$2x^2 + 33x - 32x - 528 = 0$

$x(2x + 33) - 16(2x + 33) = 0$

$(2x + 33)(x - 16) = 0$

$2x + 33 = 0$ तथा $x - 16 = 0$

$2x = -33$ तथा $x = 16$

$x = \frac{-33}{2}$ तथा $x = 16$

चूँकि आयताकार भूखंड की चौड़ाई = x मीटर^2 = 16 मीटर

आयताकार भूखंड की लंबाई = 2x+ 1 मीटर

= 2 × 16 + 1 मीटर

= 32 + 1 मीटर^2 = 33 मीटर^2

(ii) दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल = 306

माना पहला धनात्मक पूर्णांक = x

दूसरा धनात्मक पूर्णांक = x + 1

दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल = 306

पहला धनात्मक पूर्णांक x दूसरा धनात्मक पूर्णांक = 306

$(x + 1)x = 306$

$x^2 + x = 306$

$x^2 + x - 306 = 0$

$2x^2 + 18x - 17x - 306 = 0$

$x(x +) - 17(x + 18) = 0$

$(x + 18)(x - 17) = 0$

$x + 18 = 0$ तथा $x - 17 = 0$

$x = -18$ तथा $x = 17$

चूँकि पहला धनात्मक पूर्णांक = x = 17

दूसरा धनात्मक पूर्णांक = x + 1

= 17 + 1 = 18

(iii) माना रोहन की वर्तमान आयु = x

रोहन की माँ की आयु = x + 26

तीन वर्ष पश्चात रोहन की आयु = x + 3

तीन वर्ष पश्चात रोहन की माँ की आयु = x + 26 + 3 = x + 29

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

दोनो की आयु का गुणनफल = 306

$(x + 29)(x + 3) = 306$

$x^2 + 29x + 3x + 87 = 306$

$x^2 + 32x + 87 = 306$

$x^2 + 32x = 273$

$x^2 + 32x - 273 = 0$

$x^2 + 39x - 7x - 273 = 0$

$x^2 + 39x - 7x - 273 =0$

$x(x + 39) - 7(x + 39) = 0$

$(x + 39)(x - 7) = 0$

$x + 39 = 0$ तथा $x - 7 = 0$

$x = -39$ तथा $x = 7$

चूँकि रोहन की वर्तमान आयु = 7 वर्ष

रोहन की माँ की आयु = x + 26

= 7 + 26 = 33 वर्ष

(iv)

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

माना, रेलगाड़ी की चाल = x किमी/घण्टा

कुल दूरी = 480 किमी।

इसलिए, लिया गया समय $= \frac{480}{x}$ hrs

यदि इसकी चाल 8 किमी/घण्टा कम होती, तो लिया गया समय $= \frac{480}{x-8}$ hrs

प्रश्नानुसार,

$$\frac{480}{x-8} - \frac{480}{x} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{480x-480(x-8)}{x-8x} = 3$$

$$\Rightarrow 480x - 480x + 3640 = 3(x-8)x$$

$$\Rightarrow 3640 = 3x^2 - 24x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 24x^2 - 3640 = 0$$

अतः रेलगाड़ी की चाल द्विघात समीकरण $3x^2 - 24x^2 - 3640 = 0$ संतुष्ट करती है।

प्रश्नावली 4.2 (पृष्ठ संख्या 85)

प्रश्न 1 गुणनखंड विधि से निम्न द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए-

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2x^2} + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

(iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

$x^2 - 5x + 3x - 10 = 0$

$x(x - 5) + 2(x - 5) = 0$

$(x - 5)(x + 2) = 0$

$x - 5 = 0$ तथा $x + 2 = 0$

$x = 5$ तथा $x = -2$

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

$2x^2 + 4x - 3x - 6 = 0$

$x(x + 2) - 3(x + 2) = 0$

$(x + 2)(x - 3) = 0$

$x + 2 = 0$ तथा $x - 3 = 0$

$x = -2$ तथा $x = 3$

(iii)

Fukey Education

$$\sqrt{2x^2} + 7x + 5\sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2x^2} + 5x + 2x + 5\sqrt{2} = 0$$

$$x(\sqrt{2x} + 5) - \sqrt{2}(\sqrt{2x} + 5) = 0$$

$$(\sqrt{2x} + 5)(x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\sqrt{2x} + 5 = 0 \text{ तथा } x - \sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2x} = -5 \text{ तथा } x = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{-5}{\sqrt{2}} \text{ तथा } x = \sqrt{2}$$

(iv)

$$2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$$

$\Rightarrow 16x^2 - 4x - 4x + 1 = 0$

$\Rightarrow 4x(4x - 1) - 1(4x - 1) = 0$

$\Rightarrow (4x - 1)(4x - 1) = 0$

$\Rightarrow (4x - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow 4x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

अत: दत्त समीकरण के अभीष्ट मूल $\frac{1}{4}$ एवं $\frac{1}{4}$ हैं।

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$100x^2 - 10x - 10x + 1 = 0$

$x(10x - 1) -1(10x - 1) = 0$

$(x - 1)(10x - 1) = 0$

$10x - 1 = 0$ तथा $10x - 1 = 0$

$10x = 1$ तथा $10x = 1$

$x = \frac{1}{1}0$ तथा $x = \frac{1}{10}$

प्रश्न 2 उदाहरण 1 में दी गई समस्याओं को हल कीजिए।

जॉन और जीवंती दोनों के पास कुल मिलाकर 45 कंचे हैं। दोनों पाँच-पाँच कंचे खो देते हैं और अब उनके पास कंचों की संख्या का गुणनपफल 124 है। हम जानना चाहेंगे कि आरंभ में उनके पास कितने कंचे थे।

उत्तर- जॉन और जीवंती दोनों के पास कुल कंचों की संख्या हैं = 45

माना जॉन के पास कुल कंचों की संख्या हैं = x

जीवंती के पास कुल कंचों की संख्या हैं = $45 - x$

कुल कंचों पाँच-पाँच कंचे खो जाने के बाद

जॉन के पास कुल कंचों की संख्या हैं = $x - 5$

जीवंती के पास कुल कंचों की संख्या हैं = $45 - x - 5 = 40 - x$

शेष कंचों की संख्या का गुणनपफल है = 124

$(x - 5)(40 - x) = 124$

Fukey Education

$40x - x^2 - 200 + 5x = 124$

$-x^2 + 40x + 5x - 200 - 124 = 0$

$-x^2 + 45x - 324 = 0$

$x^2 - 45x + 324 = 0$

$x^2 - 36x - 9x + 324 = 0$

$x(x - 36) - 9(x - 36) = 0$

$(x - 36)(x - 9) = 0$

$x - 36 = 0$ तथा $x - 9 = 0$

$x = 36$ तथा $x = 9$

चूँकि x के दो मान है इसलिए $x = 36$ तथा $x = 9$

प्रश्न 3 ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हो।

उत्तर- संख्याओं का योग = 27

संख्याओं का गुणनफल = 182

माना पहली संख्या = x

दूसरी संख्या = x + 1

दोनों संख्या का गुणनफल = 182

$x(27 - x) = 182$

$27x - x^2 = 182$

$-x^2 + 27x - 182 = 0$

$x^2 - 27x + 182 = 0$

$x^2 - 14x - 13x + 182 = 0$

$x(x - 14) - 13(x - 14) = 0$

$(x - 14)(x - 13) = 0$

$x - 14 = 0$ तथा $x - 13 = 0$

$x = 14$ तथा $x = 13$

पहली संख्या = $x = 13$

दूसरी संख्या = $x + 1$

$= 13 + 1 = 14$

प्रश्न 4 दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 365 हो।

उत्तर- दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल = 306

माना पहला धनात्मक पूर्णांक = x

दूसरा धनात्मक पूर्णांक = x + 1

दोनों क्रमागत संख्या के वर्गों का योग = 365

$(x)^2 + (x + 1)^2 = 365$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 365$

$2x^2 + 2x + 1 = 365$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$2x^2 + 2x + 1 - 365 = 0$

$2x^2 + 2x + 1 - 365 = 0$

$2x^2 + 2x - 364 = 0$

$2(x^2 + x - 182) = 0$

$$x^2 + x - 182 = \frac{0}{2}$$

$x^2 + x - 182 = 0$

$x^2 + 14x - 13x - 182 = 0$

$x(x + 14) - 13(x + 14) = 0$

$(x + 14)(x - 13) = 0$

$x + 14 = 0$ तथा $x - 13 = 0$

$x = -14$ तथा $x = 13$

चूँकि पहला धनात्मक पूर्णांक = x = 13

दूसरा धनात्मक पूर्णांक = x + 1 = 13 + 1 = 14

प्रश्न 5 एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 सेमी. कम है। यदि कर्ण 13 सेमी. का हो, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- समकोण त्रिभुज का आधार = x सेमी.

समकोण त्रिभुज की ऊँचाई = x -7सेमी.

समकोण त्रिभुज में कर्ण = 13 सेमी.

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

पाईथागोरस प्रमेय के प्रयोग से

$(\text{कर्ण})^2 = (\text{ऊँचाई})^2 + (\text{आधार})^2$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(13)^2 = (x - 7)^2 + (x)^2$

$169 = x^2 - 14x + 49 + x^2$

$169 - 49 = 2x^2 - 14x$

$120 = 2(x^2 - 7x)$

$x^2 - 7x = \frac{2}{120}$

$x^2 - 7x - 60 = 0$

$x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$

$x(x - 12) + 5(x - 12) = 0$

$(x - 12)(x + 5) = 0$

$x - 12 = 0$ तथा $x + 5 = 0$

$x = 12$ तथा $x = -5$

चूँकि समकोण त्रिभुज का आधार = x सेमी.

= 12 सेमी.

समकोण त्रिभुज की ऊँचाई = x – 7 सेमी.

= 12 – 7 = 5 सेमी.

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 6 एक कुटीर उधोग एक दिन में कुछ बर्तनों का निर्माण करता है। एक विशेष दिन यह देखा गया की प्रत्येक नाग की निर्माण लागत (रुपयों में) उस दिन के निर्माण किए बर्तनों की संख्या के दुगुने से 3 अधिक थी। यदि उस दिन की कुल निर्माण लागत 90 रूपए थी, तो निर्मित बर्तनों की संख्या और प्रत्येक नाग की लागत ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना उस दिन निर्मित बर्तनों की संख्या = x

प्रत्येक नाग की निर्माण लागत = 2x + 3

उस दिन की कुल निर्माण लागत = 90 रुपये

$x(2x + 3) = 90$

$2x^2 + 3x = 9$

$2x^2 + 3x - 90 = 0$

$2x^2 + 15x - 12x - 90 = 0$

$x(2x + 15) - 6(2x + 15) = 0$

$(2x + 15)(x - 6) = 0$

$2x + 15 = 0$ तथा $x - 6 = 0$

$x = -15$ तथा $x = 6$

माना उस दिन निर्मित बर्तनों की संख्या = x = 6

उ स दिन प्रत्येक निर्मित बर्तनों का लागत = 2x + 3

$= 2 \times 6 + 3 = 12 + 3$

= 15 रूपये

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्नावली 4.3 (पृष्ठ संख्या 97)

प्रश्न 1 यदि निम्नलिखित द्विघात समीकरण के मूल का अस्तित्व हो तो इन्हें पूर्ण वर्ग बनाए की विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

(iii) $4x2 + 4\sqrt{3x} + 3 = 0$

(iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

उत्तर-

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$a = 2, b = -7$ और $c = 3$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (7)^2 - 4 \times 2 \times 3$

$D = 49 - 24$

$D = 25$

Fukey Education

$b^2 - 4ac > 0$ अर्थात $D > 0$ अत: इस समीकरण के दो वास्तविक एवं असमान मूल होंगे।

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

दोनों पक्षों में 8 से गुणा करने पर

$8(2x^2 - 7x + 3 = 0$

$16x^2 - 56x + 24 = 0$

$((4x)^2 - 2.4x.7 + (7)^2) - (7)^2 + 24 = 0$

$(a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2)$

$(4x - 7)^2 - 49 + 24 = 0$

$(4x - 7)^2 - 25 = 0$

$(4x - 7)^2 = 25$

$4x - 7 = 25$

$$4x - 7 = \sqrt{45}$$

$$4x - 7 = \pm 5$$

$$4x = 7 = \pm 5$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4}, x = \frac{7-5}{4}$$

$$x = \frac{12}{4}, x = \frac{2}{4}$$

$$x = 3, x = \frac{1}{2}$$

(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

$a = 2, b = 1$ और $c = -4$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-3)$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

D = 1 + 24

D = 25

$b^2 - 4ac > 0$

अत: इस समीकरण के दो वास्तविक और असमान मूल होंगे।

$2x^2 + x - 4 = 0$

दो से भाग देने पर

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{4}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{x}{2} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[x^2 + 2.x\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{-1-36}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{-33}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{-33}{16}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\Rightarrow x - \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{33}{16}}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{4} = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4} = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{33}}{4}, x = \frac{1-\sqrt{33}}{4}$$

(iii)

$$4x2 + 4\sqrt{3x} + 3 = 0$$

$$a = 4, b = 4\sqrt{3} \text{ और } c = 3, D = b^2 - 4ac$$

$$D = (4\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times 3$$

$$D = 48 - 48$$

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0 \text{ अर्थात } D = 0$$

अत: इस समीकरण के दो वास्तविक और असमान मूल होंगे

$2x^2 + x - 4 = 0$

दो से भाग देने पर

(iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

$a = 2, b = 1, c = 4$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$D = b^2 - 4ac$

$D = (1)^2 - 4 \times 2 \times 4$

$D = 1 - 32$

$D = -31$

$b^2 - 4ac < 0$ अर्थात $D < 0$

अत: इस समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है।

प्रश्न 2 उपर्युक्त प्रश्न 1 में दिए गए द्विघात समीकरणों के मूल, द्विघाती सूत्र का उपयोग करके, ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

(iii) $4x2 + 4\sqrt{3x} + 3 = 0$

उत्तर-

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

द्विघाती सूत्र द्वारा-

$a = 2, b = -7, c = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \frac{7\pm5}{4}$$

$$x = \frac{7\pm5}{4}, x = \frac{7-5}{4}$$

$$x = \frac{12}{4} = x = \frac{2}{4}$$

$$x = 3, x = \frac{1}{2}$$

(ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

द्विघाती सूत्र द्वारा-

a = 2, b = 1, c = -4

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times2(-4)}}{2\times2}$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{1+32}}{4}$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}, x = \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$$

(iii)

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$4x2 + 4\sqrt{3x} + 3 = 0$$

द्विघाती सूत्र द्वारा-

$$a = 4, b = 4\sqrt{3}, c = 3$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(4\sqrt{3})\pm\sqrt{(4\sqrt{3})^2-4\times4\times3}}{2\times4}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}\pm\sqrt{48-48}}{8}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}\pm\sqrt{0}}{8}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}\pm\sqrt{0}}{8}$$

$$x = \frac{-4\sqrt{3}+0}{8}, x = \frac{-4\sqrt{3}-0}{8}$$

$$x = \frac{-4\sqrt{3}}{8}, x = \frac{-4\sqrt{3}}{8}$$

$$x = \frac{-2\sqrt{3}}{4}, x = \frac{-2\sqrt{3}}{4}$$

अतः दिए गए समीकरण का मूल है। $\frac{-2\sqrt{3}}{4}$ और $\frac{-2\sqrt{3}}{4}$

प्रश्न 3 निम्न समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए-

(i) $x - \frac{1}{x} = 3, x = 0$

(ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30} x = -4,7$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

(i)

$$x - \frac{1}{x} = 3, x = 0$$

⇒ $x^2 - 1 = 3x$

⇒ $x^2 - 3x - 1 = 0$

⇒ $x^2 - 3x - 1 = 0$

a = 1, b = -3, c = -1

विघाती सूत्र से-

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(\sqrt{3}) \pm \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 4 \times -1 \times 3}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

(ii)

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\Rightarrow \frac{x-7-(x+4)}{(x+4)(x-7)} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{x-7-x+4}{x^2-7x+4x-28} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-11}{x^2-3x-28} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2-3x-28} = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2-3x-28} = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2-3x-28} = \frac{1}{30}$$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 28 = -30$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 28 + 30 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 0$

$\Rightarrow x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0, X - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 2$ और $x = 1$

प्रश्न 4 वर्ष पूर्व रहमान की आयु (वर्षों में) का व्युत्क्रम और अब से 5 वर्ष पश्चात् आयु के व्युत्क्रम का योग है। उसकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

माना रहमान की वर्तमान आय x वर्ष है।

तो प्रश्नानुसार, 3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु = x - 3 वर्ष

आयु का व्युत्क्रम $= \frac{1}{x-3}$ वर्ष

5 वर्ष पश्चात् आयु का व्युत्क्रम $= \frac{1}{x+5}$ वर्ष

अतः $\frac{1}{x-3} + = \frac{1}{x+5} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{x+5x-3}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2+5x-3x-15} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2+2x-15} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 3(2x + 2)$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 6x + 6$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 6x - 15 - 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 3x - 21 = 0$

$\Rightarrow x(x - 7) + 3(x - 7) = 0$

$\Rightarrow (x - 7)(x + 3) = 0$

$\Rightarrow x - 7 = 0, x + 3 = 0$

$\Rightarrow x = 7$ और $x = -3$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

अत: वर्त्तमान आयु धनात्मक संख्या 7 लेंगे। अत: रहमान की वर्त्तमान आयु 7 वर्ष है।

प्रश्न 5 एक क्लास टेस्ट में शेफाली के गणित और अंग्रेजी में प्राप्त किए गए अंकों का योग 30 है। यदि उसको गणित में 2 अंक अधिक और अंग्रेजी में 3 अंक कम मिले होते, तो उनके अंकों का गुणनफल 210 होता। उसके द्वारा दोनों विषयों में प्राप्त किए अंक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना गणित में प्राप्त अंक x है।

इसलिए, अंग्रेजी में प्राप्त अंक = $30 - x$

प्रश्नानुसार, $(x + 2)(30 - x - 3) = 210$

या $(x + 2)(27 - x) = 210$

या $27x - x^2 + 54 - 2x = 210$

या $25x - x^2 + 54 = 210$

या $x^2 - 25x + 210 - 54 = 0$

या $x^2 - 25x + 156 = 0$

या $x^2 - 12x - 13x + 156 = 0$

या $x(x - 12) - 13(x - 12) = 0$

या $(x - 12)(x - 13) = 0$

या $x - 12 = 0, x - 13 = 0$

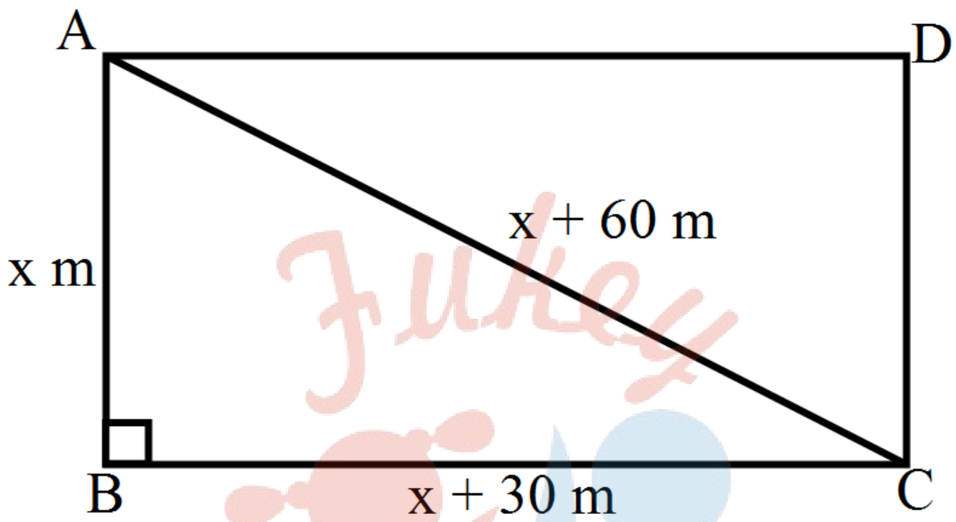
या $x = 12$ अथवा $x = 13$

अब यदि $x = 12$ तो गणित में प्राप्त अंक = 12 और अंग्रेजी में प्राप्त अंक = $30 - 12 = 18$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

और यदि x = 13 तो गणित में प्राप्त अंक = 13 और अंग्रेजी में प्राप्त अंक = 30 - 13 = 17

प्रश्न 6 एक आयताकार खेत का विकर्ण उसकी छोटी भुजा से 60 मीटर अधिक लंबा है। यदि बड़ी भुजा छोटी भुँजा से 30 मीटर अधिक हो, तो खेत की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।



उत्तर- माना सबसे छोटी भुजा = x मीटर

तो बड़ी भुजा = x + 30 मीटर और

विकर्ण = x + 60 मीटर

प्रश्नानुसार,

चूँकि ABCD एक आयत है जिसका प्रत्येक कोण समकोण है इसलिए ABC में, पैथागोरस प्रमेय के प्रयोग से-

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow (x + 60)^2 = (x)^2 + (x + 30)^2$

$\Rightarrow x^2 + 120x + 3600 = x^2 + x^2 + 60x + 900$

$\Rightarrow x^2 + 120x + 3600 = 2x^2 + 60x + 900$

$\Rightarrow 2x^2 - x^2 + 60x - 120x + 900 - 3600 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 60x - 2700 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 90x + 30x - 2700 = 0$

$\Rightarrow x(x - 90) + 30(x - 90) = 0$

$\Rightarrow (x - 90)(x + 30) = 0$

$\Rightarrow x - 90 = 0, x + 30 = 0$

$\Rightarrow x = 90$ और $x = -30$

चूँकि आयता की लंबाई धनात्मक होती है इसलिए $x = 90$ ऋणात्मक नहीं होती

अत: छोटी भुजा = 90 मीटर

तो बड़ी भुजा = 90 + 30 = 120 मीटर

और विकर्ण = 90 + 60 = 150 मीटर

प्रश्न 7 दो संख्याओं के वर्गों का अन्तर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का आठ गुणा है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना बड़ी संख्या = x

तो छोटी संख्या का वर्ग = 8x

प्रश्नानुसार,

बड़ी संख्या का वर्ग - छोटी संख्या का वर्ग = 180

$x^2 - 8x = 180$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

या $x^2 - 8x - 180 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 18x + 10x - 180 = 0$

$\Rightarrow x(x - 18) + 10(x - 18) = 0$

$\Rightarrow (x - 18)(x + 10) = 0$

$\Rightarrow x - 18 = 0, x + 10 = 0$

$\Rightarrow x = 18$ और $x = -10$

अत: बड़ी संख्या 18 है, $x = -10$ नहीं लिया जा सकता।

अब $(\text{छोटी संख्या})^2 = 8 \times 18 = 144$

छोटी संख्या $= \sqrt{144} = 12$

प्रश्न 8 एक रेलगाड़ी एक समान चाल से 360 किमी. की दुरी तय करती है। यदि यह चाल 5 किमी/घण्टा अधिक होती, तो वह उसी यात्रा में 1 घंटा कम समय लेती। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना रेलगाड़ी की समान्य चाल = x किमी/घण्टा

तय दुरी = 360 किमी.

$$\text{लिया गया समय} = \frac{\text{दुरी}}{\text{चाल}}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

अतः सामान्य लिया गया $= \frac{360}{x}$ घंटे

चाल बढ़ाने पर नई चाल $= x + 5km/h$

अतः नया लिया गया समय $= \frac{360}{x+5}$ घंटे

चाल बढ़ने से समय घट जाता है चाल घटा देने से लिया गया समय बढ़ जाता है।

$\frac{360}{x} > \frac{360}{x+5}$ प्रश्नानुसार $\frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = 1$

$$\Rightarrow 360\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 360\left(\frac{x+5-x}{x(x+5)}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 360\left(\frac{5}{x^2+5x}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1800}{x^2+5x}\right) = 1$$

$x^2 + 5x = 1800$

$= x^2 + 5x - 1800 = 0$

$= x^2 + 5x - 1800 = 0$

$= x + 45x - 40x - 1800 = 0$

$= x(x + 45) - 40(x + 45) = 0$

$= (x + 45)(x - 40) = 0 =$

=x + 45 = 0, x -40 = 0

= x = -45 और x = 40

चूँकि गाड़ी की चाल ऋणात्मक नहीं हो सकती है इसलिए चाल = 40 किमी/घण्टा

प्रश्न 9 दो पानी के नल एक - साथ एक हौज को घंटों में भर सकते हैं। बड़े व्यास वाला नल हौज को भरने में, कम व्यास वाले नल से 10 घंटे कम समय लेता है। प्रत्येक द्वारा अलग से हौज को भरने के समय ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना छोड़ा जाल टंस से अकेले x घंटे में भता हूँ।

तो बड़ा व्यास बाल नल टंकी भरेगा = x - 10 घंटे में

अब छोटा व्यास बाला नाम 1 घंटे में टंकी का $\frac{1}{x}$ भाग भरेगा

और बड़ा ब्यास बाला नल टंकी का $\frac{1}{x-10}$ भाग भरेगा

दोनों मिलकर भरते है $9\frac{3}{8}$ घंटों में $= \frac{75}{8}$ घंटे में

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{8}{75}$$

$$\Rightarrow \frac{x-10+x}{x(x-10)} = \frac{8}{75}$$

$$\Rightarrow \frac{2x-10}{x(x-10)} = \frac{8}{75}$$

$\Rightarrow 8(x^2 - 10x) = 75(2x - 10)$

$\Rightarrow 8x^2 - 80x = 150x - 750$

$\Rightarrow 8x^2 - 80x - 150x + 750 = 0$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\Rightarrow 8x^2 - 230x + 750 = 0$

$\Rightarrow 8x^2 - 200x - 30x + 750 = 0$

$\Rightarrow 8x(x - 25) - 30(x - 25) = 0$

$\Rightarrow (x - 25)(8x - 30) = 0$

$\Rightarrow x - 25 = 0,\ 8x - 30 = 0$

$\Rightarrow x = 25$ और $8x = 30$

$\Rightarrow x = 25$ और $x = \frac{30}{8}$

$x = \frac{30}{8}$ संभव नहीं है क्योंकि यह 10 घंटा से भी कम है)

अत: छोटा ब्यास वाला नल अकेला भरेगा - 25 घंटे में

तो बड़ा व्यास वाला नल भरेगा 25 - 10 = 15 घंटे में

प्रश्न 10 मैसूर और बैंगलोर के बीच के 132 किमी यात्रा करने में एक एक्सप्रेस रेलगाड़ी, सवारी गाड़ी से 1 घंटा समय कम लेती है (मध्य के स्टेशनों पर ठहरने का समय ध्यान में न लिया जाए)यदि एक्सप्रेस रेलगाड़ी की औसत चाल, सवारी गाड़ी की चाल से 11 किमी/घण्टा अधिक हो, तो दोनों रेलगाड़ी की औसत चाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना सवारी गाड़ी की समान्य चाल = x किमी/घंटा

तो एक्सप्रेस गाड़ी की समान्य चाल = x + 11 किमी/घंटा

मैसूर और बैंगलोर की बीच की दुरी = 132 किमी/घंटा]

$$\text{सवारी गाड़ी द्वारा लिया गया समय} = \frac{\text{दुरी}}{\text{चाल}} = \frac{132}{x}\ \text{घंटा}$$

जबकि एक्सप्रेस गाड़ी द्वारा लिया गया समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{132}{x+11}$ घंटा

चूंकि सवारी गाड़ी द्वारा लिया गया समय एक्सप्रेस गाड़ी से 1 घंटा अधिक है।

इसलिए, $\frac{132}{x} - \frac{132}{x+11} = 11$

$\Rightarrow 132\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+11}\right) = 1$

$\Rightarrow 132\left(\frac{x+11-x}{x(x+11)}\right) = 1$

$\Rightarrow 132\left(\frac{11}{x^2(x+11)}\right) = 1$

$\Rightarrow x^2 + 11x = 132 \times 11$

$\Rightarrow x^2 + 11x = 1452$

$\Rightarrow x^2 + 11x - 1452 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 44x - 33x - 1452 = 0$

$\Rightarrow x(x+44) - 33(x+44) = 0$

$\Rightarrow x(x+44)(x-33) = 0$

$\Rightarrow x(x+44) = 0(x-33) = 0$

$\Rightarrow x = -44$ और $x = 33$

-44 एक रेलगाड़ी की चाल नहीं हो सकता इसलिए x = 33 लेंगे

अत: सवारी गाड़ी की चाल = 33 किमी/घंटा और

एक्सप्रेस गाड़ी की चाल = 33 + 11 = 44 किमी/घंटा

प्रश्न 11 दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग 468 मीटर^2 है। यदि उनके परिमापों का अन्तर 24 मीटर हो, तो दोनों की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना एक वर्ग की एक भुजा = x मीटर और दुसरे वर्ग की भुजा = y मीटर

पहला का परिमाप = 4x मीटर और दुसरे का परिमाप = 4y मीटर

प्रश्नानुसार,

स्थित- (I)

$$4x - 4y = 24$$

$$\Rightarrow x - y = \frac{24}{4} = 6$$

$$\Rightarrow x - y = 6$$

$$\Rightarrow x - y = 6 \ldots (1)$$

स्थित- (II)

Fukey Education

$\Rightarrow x^2 + (x - 6)^2 = 468$ समीकरण (1) से

$\Rightarrow x^2 + x - 12x + 36 = 468$

$\Rightarrow 2x^2 - 12x + 36 - 468 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 12x - 432 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x - 216 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 18x + 12x - 216 = 0$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\Rightarrow x(x - 18) + 12(x - 18) = 0$

$\Rightarrow (x - 18)(x + 12) = 0$

$\Rightarrow x - 18 = 0, x + 12 = 0$

$x = 18, x = -12$ (वर्ग की भुजा ऋणात्मक नहीं हो सकती इसलिए $x = -12$ नहीं ले सकते हैं)

पहले वर्ग की भुजा = 18 मीटर तो दुसरे की भुजा = 18 - 6 = 12 मीटर

प्रश्नावली 4.4 (पृष्ठ संख्या 100)

प्रश्न 1 निम्न द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

(ii) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 + 6x + 3 = 0$

उत्तर-

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$a = 2, b = -3$ और $c = 5$

$D = b^2 - 4ac$

$= (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5$

$= 9 - 40$

$= -31$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

चूँकि D का ऋणात्मक मान यह बताता है कि D < 0 से अत: द्विघात समीकरण का कोई मूल नहीं है।

(ii)

$$3x2 - 4\sqrt{3x} + 4 = 0$$

$$a = 3, b = -4\sqrt{3} \text{ और } c = 4$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-4\sqrt{3})2 - 4 \times 3 \times 4$$

$$= 48 - 48 = 0$$

चूँकि D = 0 है अत: इसके दो वास्तविक एवं समान मूल होंगे

द्विघाती सूत्र से-

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-\sqrt{(-4\sqrt{3})} \pm \sqrt{0}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{6}$$

$$x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{6}$$

$$x = \frac{4\sqrt{3}+0}{6}, x = \frac{4\sqrt{3}+0}{6}$$

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{6} \text{ और } x = \frac{4\sqrt{3}}{6}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ और } x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

(iii) $2x^2 + 6x + 3 = 0$

$a = 2, b = 6$ और $c = 3$

$D = b^2 - 4ac$

$= (6)^2 - 4 \times 2 \times 3$

$= 36 - 24 = 12$

चूँकि D > 0 से अत: इस समीकरण के दो वास्तविक एवं असमान मूल होंगे

द्विघाती सूत्र से-

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(6) \pm \sqrt{12}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{4}$$

$$x = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{4}$$

$$x = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{4} \text{ और } x = \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{4}$$

$$x = \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{4} \text{ और } x = \frac{2(\sqrt{3} - 3)}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{3} + 3}{2} \text{ और } x = \frac{\sqrt{3} - 3}{2}$$

प्रश्न 2 निम्न प्रत्येक द्विघात समीकरण में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों।

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

(ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

उत्तर-

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$

$a = 2$, $b = k$ और $c = 3$

चूँकि दिए गए समीकरण के दो बराबर मूल है अर्थात

$D = 0$

अतः $b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow (k)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 24 = 0$

$\Rightarrow k^2 = 24$

$\Rightarrow k = \sqrt{24}$

$\Rightarrow k = \pm 2\sqrt{6}$

(ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

$\Rightarrow kx^2 - 2kx + 6 = 0$

$a = k$, $b = -2k$, $c = 6$

चूँकि दिए गए समीकरण के दो बराबर मूल है अर्थात

$D = 0$

अतः $b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow (-2k)^2 - 4 \times k \times 6 = 0$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\Rightarrow 4k^2 - 24k = 0$

$\Rightarrow 4k^2 = 24k$

$\Rightarrow k = \frac{24k}{4k}$

$\Rightarrow k = 6$

प्रश्न 3 क्या एक ऐसी आम की बगिया बनाना संभव है जिसकी लंबाई, चौड़ाई से दुगुनी हो और उसका क्षेत्रफल 800 मीटर^2 हो? यदि है, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना आम की बगिया की चौड़ाई = x मीटर

तो लंबाई = 2x मीटर

अब, लंबाई × चौड़ाई = क्षेत्रफल

$\Rightarrow 2x \times x = 800$ मीटर^2

$\Rightarrow 2x^2 = 800$ मीटर^2

$\Rightarrow x^2 = 400$ मीटर^2

$\Rightarrow x = \sqrt{400}$ मीटर^2

$\Rightarrow x = 20$ मीटर

अत: चौड़ाई = 20 मीटर और

लंबाई = 2x = 2 × 20 = 40 मीटर

हाँ, ऐसी आम की बगिया संभव है।

प्रश्न 4 क्या निम्न स्थिति संभव है? यदि है तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए। दो मित्रों की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पूर्व उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर- माना एक मित्र की वर्त्तमान आयु = x वर्ष

तो दुसरे मित्र की वर्त्तमान आयु = 20 - x वर्ष

4 वर्ष पूर्व उनकी आयु का गुणनफल =

$\Rightarrow (x - 4)(20 - x - 4) = 48$

$\Rightarrow (x - 4)(16 - x) = 48$

$\Rightarrow 16x - x^2 - 64 + 4x = 48$

$\Rightarrow 20x - x^2 - 64 - 48 = 0$

$\Rightarrow 20x - x^2 - 112 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 20x + 112 = 0$

इस समीकरण के मूल का अस्तित्व है या नहीं यह जाँच करेंगे।

a = 1, b = -20 और c = 112

$D = b^2 - 4ac$

$= (-20)^2 - 4(1)(112)$

$= 400 - 448 = -48$

चूँकि $D < 0$ है इसलिए इस समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है अत: यह संभव नहीं है।

प्रश्न 5 क्या परिमाप 80 मीटर तथा क्षेत्रफल 400 मीटर^2 के एक पार्क को बनाना संभव है? यदि है, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

माना पार्क का लंबाई = x मीटर

और चौड़ाई = y मीटर

तो, 2(लंबाई + चौड़ाई) = परिमाप

$2(x + y) = 80$ मीटर

$x + y = 40$ मीटर

$y = 40 - x$ मीटर

अत: चौड़ाई = $40 - x$ मीटर

अब, लंबाई × चौड़ाई = क्षेत्रफल

$x(40 - x) = 400$

$\Rightarrow 40x - x^2 = 400$

$\Rightarrow x^2 - 40x + 400 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 20x - 20x + 400 = 0$

$\Rightarrow x(x - 20) - 20(x - 20) = 0$

$\Rightarrow (x - 20)(x - 20) = 0$

$\Rightarrow x - 20 = 0, x - 20 = 0$

$\Rightarrow x = 20$ और $x = 20$

अत: पार्क की लंबाई = 20 मीटर तो चौड़ाई = 40 - 20 = 20 मीटर

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com