भौतिकी

अध्याय-3: समतल में गति

समतल में गति

सभी भौतिक राशियों को अदिश एवं सदिश राशियों में वर्गीकृत किया जाता है। दोनों में अंतर सिर्फ यह है कि सदिश राशियों में दिशा का संबंध होता है जबकि अदिश राशियां में ऐसा नहीं होता है।

जैसे- दूरी और विस्थापन दोनों राशियां एक समान ही प्रतीत होती हैं दोनों के मात्रक भी एक जैसे ही होते हैं। लेकिन दूरी एक अदिश राशि है जबकि विस्थापन एक सदिश राशि है।

अदिश राशियों को जोड़ना, घटाना, गुणा व भाग करना साधारण गणित के नियमों द्वारा ही किया जाता है। लेकिन सदिश राशि में ऐसा नहीं होता है। सदिश राशियों को जोड़ने, घटाने, गुणा व भाग करने के नियम हैं जिन्हें सदिश बीजगणित कहते हैं।

सदिश और अदिश राशि

अदिश राशि

वह भौतिक राशियां जिनमें केवल परिमाण होता है इनकी कोई दिशा नहीं होती है इस प्रकार की राशियों को अदिश राशि (scalar quantity) कहते हैं।

अदिश राशि के उदाहरण

अदिश राशि के अनेकों उदाहरण हैं जैसे - द्रव्यमान, दूरी, समय, ताप, आयतन, घनत्व, कार्य, शक्ति, ऊर्जा, आवेश, चाल, विभव, आवृत्ति, विशिष्ट ऊष्मा आदि।

अदिश राशि को जोड़ना, घटाना, गुणा व भाग करना साधारणतः गणित के नियमों की सहायता से ही होता है।

सदिश राशि

वह भौतिक राशियां जिनमें परिमाण के साथ-साथ दिशा भी ज्ञात होती है इस प्रकार की राशियों को सदिश राशि (vector quantity) कहते हैं।

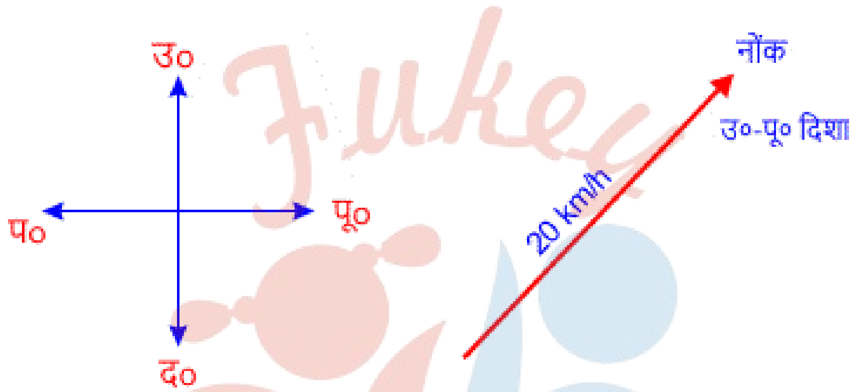
सदिश राशि के उदाहरण

सदिश राशि के अनेकों उदाहरण हैं जैसे - वेग, संवेग, आवेग, विस्थापन, बल , त्वरण, भार, विद्युत क्षेत्र, धारा घनत्व आदि।

विद्युत धारा और विद्युत क्षेत्र दोनों अलग राशियां हैं। विद्युत धारा एक अदिश राशि है जबकि विद्युत क्षेत्र एक सदिश राशि है।

सदिश राशियों को जोड़ने, घटाने, गुणा व भाग करने के लिए कोई बीजगणितीय नियम लागू नहीं होता है। इसके अपने नियम हैं वही लागू होते हैं। जिन्हें सदिश बीजगणित कहते हैं।

सदिश राशियों को → तीर द्वारा व्यक्त किया जाता है यह तीर सदिश राशियों के ऊपर लगाया जाता है इस तीर की लंबाई उस राशि के परिमाण को तथा तीर की नोक उस राशि की दिशा को प्रदर्शित करती है जिसके ऊपर यह लगा है।



चित्र में दिखाया गया है कि कोई A व्यक्ति 20 किलोमीटर/घंटे की चाल से उत्तर-पूर्व दिशा में जा रहा है यह दिशा का ज्ञान तीर द्वारा हुआ है। यहां वेग पर तीर लगाया लगेगा $\vec{v}$ । चूंकि वेग सदिश राशि है।

सदिश राशियों को लिखना

1. v = u + at

   सदिश रूप में $\rightarrow \vec{v} = \vec{u} + \vec{a}t$

   जो सदिश राशि होती है उनके ऊपर → लगा देते हैं यह वेग, त्वरण a सदिश राशि हैं। जबकि समय t अदिश राशि है इसलिए इस पर तीर नहीं लगाया गया है।

2. $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

   सदिश रूप में $\rightarrow \vec{s} = \vec{u}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

एकांक सदिश

वह सदिश जिसका परिमाण 1 होता है एकांक सदिश कहलाता है।

माना $\vec{A}$ एक सदिश है जिसका परिमाण A है तो $\vec{A}/A$ को एकांक सदिश कहते हैं

से $\widehat{A}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

एकांक सदिश का सूत्र

$\boxed{\widehat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}}$ एकांक सदिश के सदिश गुणनफल के दो नियम होते हैं।

(1) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

(2) $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

शून्य सदिश

वह सदिश जिसका परिमाण शून्य होता है शून्य सदिश कहलाता है।

$\boxed{\{\vec{\$}\{A\} = 0\$\}}$

विपरीत सदिश

वह सदिश जिसका परिमाप बराबर होता है परंतु दिशाएं विपरीत होते हैं विपरीत सदीश कहलाते हैं।

$\boxed{\vec{A} = -\vec{B}}$ $\boxed{\vec{B} = -\vec{C}}$

एकांक सदिश

वह सदिश जिसका परिमाण एक होता है एकांक सदिश कहलाता है। इसे $\widehat{A}$ द्वारा दर्शाया जाता है।

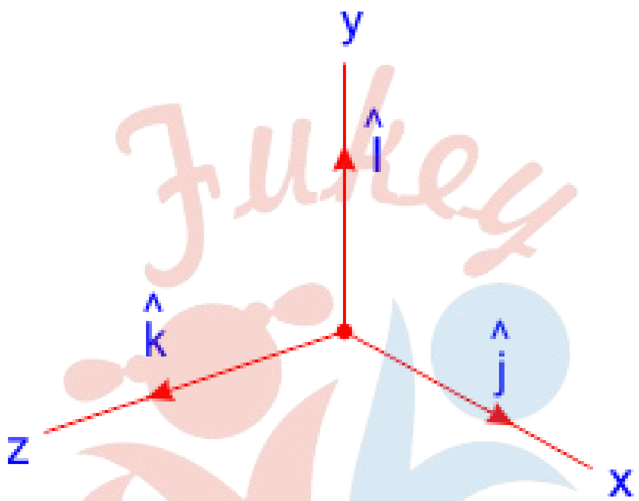
एकांक सदिश = $\frac{\text{सदिश}}{\text{सदिश का परिमाण}}$

$$\boxed{\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}}$$

लंबकोणीय एकांक सदिश

लंबकोणीय अक्षों x, y तथा z के अनुदिश एकांक सदिश को लंबकोणीय एकांक सदिश(वेक्टर) कहते हैं। इन्हें क्रमशः $\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ से प्रदर्शित करते हैं।

$$\boxed{\hat{i} = \hat{j} = \hat{k}}$$



किसी भौतिक राशि के सदिश होने के लिए उसमें परिमाण के साथ दिशा भी होनी चाहिए। एवं वह राशि सदिश नियमों का पालन भी करती हो। इसके कुछ बिंदु-

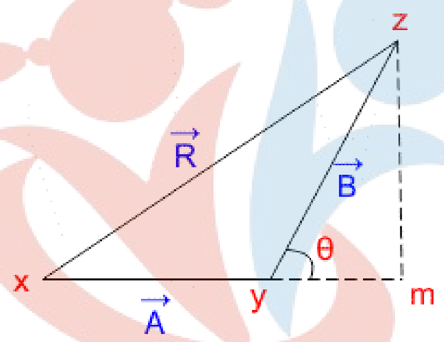
- किसी सदिश के समकोणिक घटक का परिमाण सदिश के परिमाण से अधिक नहीं हो सकता है।
- यदि $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ = 0 तब $\vec{A}, \vec{B}$ तथा $\vec{C}$ समतलीय वेक्टर हैं।
  यदि $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ तब भी $\vec{A}, \vec{B}$ तथा $\vec{C}$ समतलीय वेक्टर होते हैं।
- भिन्न परिमाण वाले दो वेक्टरो का योग शून्य वेक्टर नहीं हो सकता है।
- जब कोई खिलाड़ी गेंद को क्षैतिज से अगर 45° के झुकाव पर फेंकता है तो गेंद अधिकतम दूरी पर जाती है।
- जब दो सदिश परस्पर लंबवत होते हैं तो उस दशा में दो अशून्य सदिशों का अदिश गुणनफल शून्य होता है।
- जब दो सदिश परस्पर समांतर होते हैं अर्थात् उनके बीच कोण 0 या 180° होता है तो उस दशा में दो सदिशों का अदिश गुणन अधिकतम होता है।

सदिशों के योग का त्रिभुज नियम

इस नियम के अनुसार, यदि दो सदिशों को परिमाण व दिशा में किसी त्रिभुज की दो क्रमागत भुजाओं से निरूपित किया जाता हो, तब इन सदिशों का परिणामी, परिमाण व दिशा में विपरीत क्रम में ली गई त्रिभुज की तीसरी भुजा के द्वारा निरूपित होगा। इसे सदिशों के योग का त्रिभुज नियम कहते हैं।

माना दो सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ हैं जिनका परिमाण व दिशा में Δxyz की दो क्रमागत भुजाओं $\overrightarrow{xy}$ व $\overrightarrow{yz}$ द्वारा निरूपित है।

तब इन सदिशों का परिणामी $\vec{R}$ त्रिभुज की तीसरी भुजा xz द्वारा प्रदर्शित किया जाएगा चित्र में स्पष्ट किया गया है।



सदिशों के योग का त्रिभुज नियम

अब तीसरी भुजा का परिणामी $\vec{R}$ का परिमाण R ज्ञात करेंगे।

इसके लिए भुजा xy को आगे बढ़ाकर m तक ले जाते हैं जो कि Δ के बिंदु z से डाला गया लंब का कार्य करती है।

माना $\angle zym = \theta$ हो तब Δxzm में

(कर्ण)^2 = (लंब)^2 + (आधार)^2

$(xz)^2 = (zm)^2 + (xm)^2$

$(xz)^2 = (zm)^2 + (xy + ym)^2$ (चूंकि $xm=xy+ym$)

$(xz)^2 = (zm)^2 + (xy)^2 + (ym)^2 + 2(xy)(ym)$

चूंकि Δyzm में $(zm)^2 + (ym)^2 = (yz)^2$ है तब

$(xz)^2 = yz^2 + xy^2 + 2(xy)(ym)$ समी.①

समकोण Δyzm में

$\cos\theta$ = आधार/कर्ण = ym/yz

तथा $ym = yz \cos\theta$

ym का मान समी.① में रखने पर

$xz^2 = yz^2 + xy^2 + 2(xy)(yz \cos\theta)$

चूंकि शुरू में ही पढ़ा था कि xz = R, xy = A तथा yz = B है तब उपरोक्त समीकरण

$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

दोनों ओर वर्गमूल करने पर

$$\boxed{R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}}$$

अतः इस समीकरण द्वारा दो क्रमागत भुजाओं के मान से उनका परिणाम का परिमाण ज्ञात किया जा सकता है।

अब परिणामी $\vec{R}$ की दिशा ज्ञात करने के लिए सदिश $\vec{A}$ पर एक कोण बनाते हैं।

तो Δxmz में

$\tan\alpha$ = लंब/आधार = zm/xm = zm/(xy + ym)

अब चूंकि ऊपर xy = A, $ym = yz \cos\theta$ तथा $zm = yz\sin\theta$ होगा। तो

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}}$$

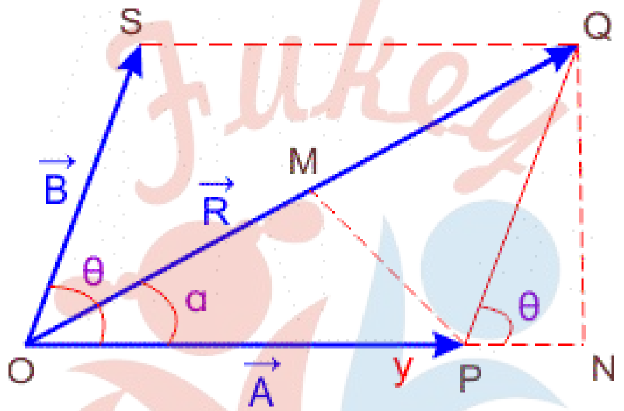
यही सदिश योग के त्रिभुज नियम का सूत्र है।

सदिशों के योग का समांतर चतुर्भुज नियम

इस नियम के अनुसार यदि दो सदिशों को परिमाण व दिशा में किसी समांतर चतुर्भुज की दो संगलन भुजाओं से निरूपित किया जाता हो, तब इन सदिशों का परिणामी, परिमाण व दिशा में समांतर चतुर्भुज के विकर्ण द्वारा निरूपित होगा। लेकिन विकर्ण उसी बिंदु पर खींचा गया

हो जिस पर दो संगलन भुजाएं खींची गई हैं। इसे सदिशों के योग का समांतर चतुर्भुज नियम कहते हैं।

माना दो सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ हैं इनका परिमाण व दिशा, समांतर चतुर्भुज की दो संगलन भुजाओं OP व OS से निरूपित किया गया है। यह दोनों सदिश परस्पर θ कोण पर झुके हैं। तब इन सदिशों का परिणामी $\vec{R}$ परिमाण व दिशा में त्रिभुज के विकर्ण द्वारा निरूपित होगा। चित्र से स्पष्ट है



सदिशों के योग का समांतर चतुर्भुज नियम

अब परिणामी $\vec{R}$ का परिमाण ज्ञात करने के लिए भुजा OP को आगे बढ़ाकर उस पर बिंदु Q से लंब खींचा जाता है। तो

OP = QS = A

OS = PQ = B

OQ = R

अब ΔONQ में

(कर्ण)^2 = (लंब)^2 + (आधार)^2

$(OQ)^2 = (ON)^2 + (QN)^2$

$(OQ)^2 = (OP + PN)^2 + (QN)^2$

$(OQ)^2 = (OP)^2 + (PN)^2 + 2(OP)(PN) + (QN)^2$

चूंकि ΔPNQ में $(PN)^2 + (QN)^2 = (PQ)^2$ है तब उपरोक्त समीकरण से

$(OQ)^2 = (OP)^2 + (PQ)^2 + 2(OP)(PN)$ समी.①

अब समकोण ΔPNQ में

$\cos\theta$ = आधार/कर्ण = PN/PQ

तथा PN = PN $\cos\theta$

PN का मान समी.① में रखने पर

$(OQ)^2 = (OP)^2 + (PQ)^2 + 2(OP)(PN\cos\theta)$

चूंकि शुरू में ही ज्ञात था कि OP = A, PQ = B तथा OQ = R है तो समीकरण

$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

दोनों ओर वर्गमूल करने पर

$$\boxed{R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}}$$

अतः इस समीकरण द्वारा चतुर्भुज की दो संगलन भुजाओं के मान से उनका परिणाम $\vec{R}$ का परिमाण ज्ञात किया जा सकता है।

अब परिणामी $\vec{R}$ की दिशा ज्ञात करने के लिए सदिश $\vec{A}$ की दिशा में α कोण बनाते हैं। तब

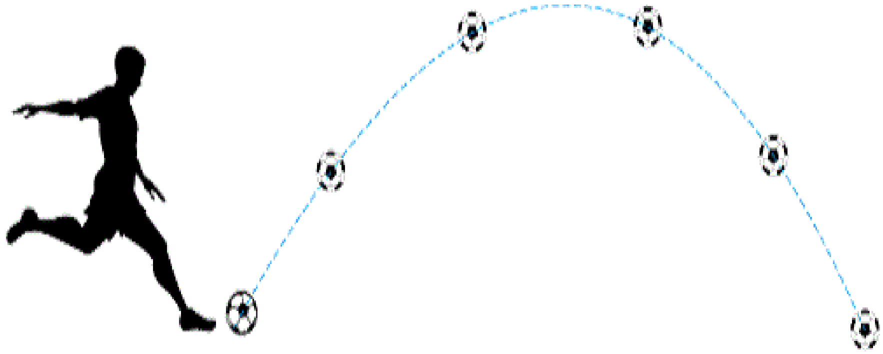
$\tan\alpha$ = लंब/आधार = QN/ON = QN/(OP + PN)

अब OP = A तथा PN = B$\cos\theta$ एवं QN = B$\sin\theta$ होगा। तो

$\boxed{\tan\alpha = \dfrac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}}$ यही सदिशों के योग का समांतर चतुर्भुज नियम का सूत्र है।

प्रक्षेप्य गति

जब किसी वस्तु को पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र में एक प्रारंभिक वेग से किसी कोण पर फेंका जाता है तो वस्तु ऊर्ध्वाधर दिशा में लगते हुए गुरुत्वीय त्वरण के अंतर्गत एक वक्र पथ पर गति करती है। वस्तु की इस गति को प्रक्षेप्य गति (motion of a projectile) कहते हैं। एवं वस्तु जिस पथ पर गति करती है उसे प्रक्षेप पथ कहते हैं।



प्रक्षेप्य गति के उदाहरण

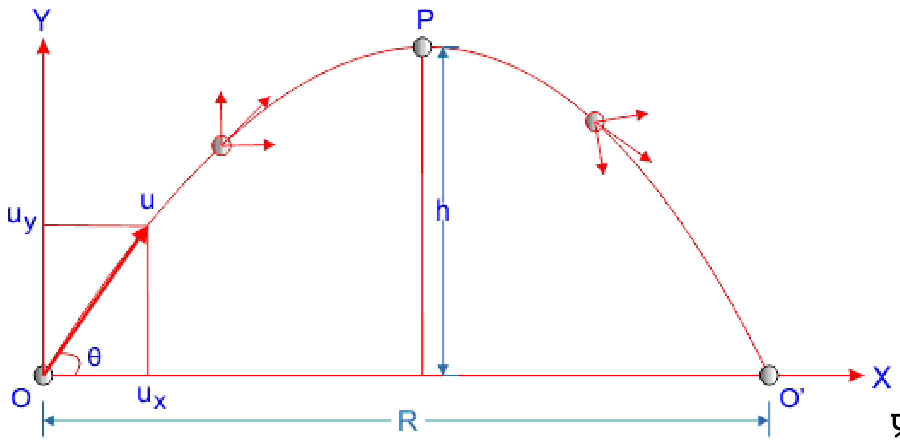
1. तोप से छूटे गोले की गति
2. भाला फेंक खेल में भोले की गति
3. छत से फेंकी गई गेंद की गति
4. बल्लेबाज द्वारा मारी गई गेंद की गति
5. फुटबॉल खेल में गेंद की गति

प्रक्षेप्य का पथ

सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होता है।

माना बिंदु O किसी पिंड को क्षैतिज से θ कोण पर प्रारंभिक वेग u से फेंका जाता है। चित्र में OX क्षैतिज रेखा है एवं OY ऊर्ध्वाधर रेखा है। प्रारंभिक वेग u को क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर घटकों में विभाजित करने पर

क्षैतिज घटक $u_x = u\cos\theta$, गुरुत्वीय त्वरण $a_x = 0$
ऊर्ध्वाधर घटक $u_y = u\sin\theta$, गुरुत्वीय त्वरण $a_y = -g$



प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार

जैसे पीछे पढ़ा है कि पिंड की गति गुरुत्वीय त्वरण g के अंतर्गत है इसलिए यह त्वरण नीचे की ओर लगता है।

t समय पश्चात पिंड का क्षैतिज दिशा में विस्थापन

(गति के द्वितीय समीकरण $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ से)

$x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$

$u_x = u\cos\theta$, $a_x = 0$ रखने पर

$x = u\cos\theta t + \frac{1}{2} 0 \times t^2$

$x = u\cos\theta t$

या $t = \frac{x}{u\cos\theta}$ समी.①

अब ऊर्ध्वाधर दिशा में विस्थापन

(गति के द्वितीय समीकरण $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ से)

$y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$

$u_y = u\sin\theta$, $a_y = -g$ रखने पर

$y = u\sin\theta t + \frac{1}{2} \times -g \times t^2$

$y = u\sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2$ समी.②

अब समी.① से t का मान समी.② में रखने पर

$$y = u\sin\theta \times \frac{x}{u\cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right)^2$$

$$y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times x - \frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{u^2\cos^2\theta}\right)$$

$$\boxed{y = \tan\theta x - \left(\frac{g}{2u^2\cos^2\theta}\right)x^2}$$

यह समीकरण $y = bx - cx^2$ द्विघात समीकरण के समरूप है। जो परवलय को प्रदर्शित करता है अतः प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होता है।

प्रक्षेप्य पर उड्डयन काल

जब किसी पिंड को वायु में फेंका जाता है तो फेंकने के बाद यह एवं जमीन पर गिरने से पहले अर्थात जितने समय तक पिंड वायु में रहता है उस समय को प्रक्षेप्य पर उड्डयन काल (flight time of projectile) कहते हैं। इसे T द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

गति के समीकरण $v_y = u_y + a_y t$

चूंकि पिंड वायु में है इसलिए अंतिम वेग $v_y = 0$ एवं $v_y = u\sin\theta$, $a_y = -g$ होगा अतः

$0 = u\sin\theta - gt$

$t = \frac{u\sin\theta}{g}$

यह समय पिंड के बिंदु O से बिंदु P तक पहुंचने का है अतः पूरे पिंड का उड्डयन काल इस समय का दोगुना होगा तब

$$\boxed{T = 2t = \frac{2u\sin\theta}{g}}$$

प्रक्षेप्य की परास

पिंड को फेंकने से पिंड के गिरने तक की दूरी अर्थात् बिंदु O से बिंदु O' तक की दूरी को प्रक्षेप्य की परास (range of projectile) कहते हैं। इसे R द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

क्षैतिज परास R = क्षैतिज वेग × उड्डयन काल

R = ucosθ × $\frac{2usin\theta}{g}$

R = $\frac{u^2 2sin\theta.cos\theta}{g}$

चूंकि 2sinθ.cosθ = sin2θ होता है इसलिए

$$\boxed{R = \frac{u^2 sin2\theta}{g}}$$

प्रक्षेप्य की ऊंचाई

प्रक्षेप्य गति में पिंड जितनी अधिकतम ऊंचाई प्राप्त करता है उसे प्रक्षेप्य की ऊंचाई (height of projectile) कहते हैं। इसे h द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

गति के तृतीय समीकरण $v^2 = u^2 + 2as$ से

v = o , u = usinθ

0 = $u^2 sin^2\theta$ + 2gh

$$\boxed{h = \frac{u^2 sin^2\theta}{2g}}$$

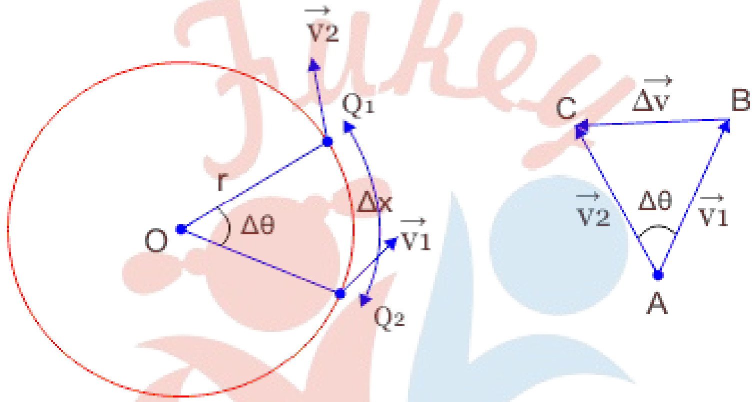
अभिकेंद्र त्वरण

जब कोई पिंड एकसमान चाल से वृत्तीय पथ पर गति करता है तो पिंड की चाल अचर होते हुए भी उसकी दिशा लगातार बदलती रहती है। अतः पिंड का वेग भी लगातार बदलता रहता

है इस प्रकार पिंड पर उसके केंद्र की ओर एक दिष्ट त्वरण लगता है इस त्वरण को अभिकेंद्र त्वरण (centripetal acceleration) कहते हैं। अभिकेंद्र त्वरण की दिशा सदैव वृत्त के केंद्र की ओर होती है। इसे a से प्रदर्शित करते हैं।

एकसमान वृत्तीय गति में अभिकेंद्र त्वरण का व्यंजक

माना कोई पिंड एकसमान चाल v से वृत्तीय पथ पर गति करता है चित्र में वृत्त का O केंद्र तथा r त्रिज्या है।



अभिकेंद्र त्वरण

माना एक सूक्ष्म समय अंतराल Δt में पिंड वृत्तीय पथ पर बिंदु Q_1 से Q_2 विस्थापित होता है। तथा इस दौरान वह Δx दूरी तय करता है एवं पिंड को केंद्र से मिलाने वाली रेखा भी Δθ कोण घूम जाती है।

यदि बिंदु Q_1 व Q_2 पर वेग v_1 व v_2 हैं। तो

ΔOQ_1Q_2 तथा वेक्टर त्रिभुज ABC समरूप हैं। अतः

$$\frac{Q_1Q_2}{Q_1O} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{\Delta x}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

चूंकि Δt समय बहुत छोटा है तब Δθ भी छोटा होगा। इस स्थिति में चाप Q_1 Q_2 को भी लगभग Δx के बराबर मान लेते हैं अतः

$$\frac{\Delta x}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

दोनों ओर Δt द्वारा भाग करने पर

$$\frac{\Delta x}{r} \times \frac{1}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{v} \times \frac{1}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \left(\frac{v}{r}\right) \times \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

यदि Δt समयांतराल बहुत छोटा हो तो ($\Delta t \to 0$) तब

$$\lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \left(\frac{v}{r}\right) \times \lim \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

परिभाषा से $\lim \frac{\Delta v}{\Delta t}$ तात्कालिक त्वरण a एवं $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ तात्कालिक रेखीय वेग v है। तब उपरोक्त समीकरण

$$a = \frac{v}{r} \times v$$

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}}$$

अभिकेंद्र त्वरण का मान कोणीय वेग के पदों में

चूंकि $v = r\omega$ से

$$a = \frac{r^2\omega^2}{r} \times v$$

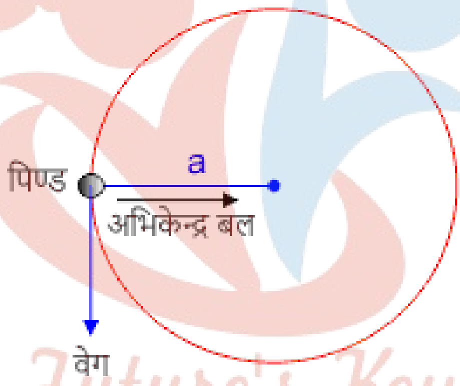
$$\boxed{a = r\omega^2}$$

यही एकसमान वृत्तीय गति में अभिकेंद्र त्वरण का व्यंजक है।

अभिकेंद्र बल

अभिकेंद्र त्वरण क्या है यह हम पढ़ चुके हैं। इस अध्याय के अंतर्गत हमने पढ़ा था कि जब कोई पिंड एकसमान चाल से r त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर गति करता है तो उसकी गति में अभिकेंद्र त्वरण होता है जिसका वेग लगातार बदलता रहता है। एवं इसका मान नियत रहता है इसकी दिशा सदैव वृत्त के केंद्र की ओर रहती है।

चूंकि हम जानते हैं कि न्यूटन के नियम के अनुसार, त्वरण किसी बल से ही उत्पन्न होता है। एवं इसकी दिशा भी वही होती है जो त्वरण की दिशा होती है। अतः स्पष्ट होता है कि वृत्तीय गति करते हुए पिंड पर एक बल आरोपित होता है जिसकी दिशा वृत्त के केंद्र की ओर होती है इस बल को ही **अभिकेंद्र बल** (centripetal force) कहते हैं।



अभिकेंद्र बल

अभिकेंद्र बल का सूत्र

अभिकेंद्र बल वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर करता है।
माना m द्रव्यमान का कोई पिंड r त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर v वेग से गति करता है। तो उस पर लगने वाला अभिकेंद्र बल निम्न होगा।
अभिकेंद्र बल = द्रव्यमान × अभिकेंद्र त्वरण
अतः किसी वस्तु के द्रव्यमान एवं उसके अभिकेंद्र त्वरण के गुणनफल के उस वस्तु का अभिकेंद्र बल कहते हैं।

F = m × v^2/r

$$\boxed{F = \frac{mv^2}{r}}$$

या अभिकेंद्र त्वरण को कोणीय वेग के पदों में प्रयुक्त करने पर

$$\boxed{F = mr\omega}$$

अभिकेंद्र बल के उदाहरण

हम अपने दैनिक जीवन में अभिकेंद्र बल के अनेकों उदाहरण देखते हैं। जो निम्न प्रकार से हैं-

1. जब हम किसी रास्सी से कोई पत्थर बांधकर रस्सी के एक सिरे को पकड़कर उसे वृत्तीय गति में घूम आते हैं। तो रस्सी में तनाव के कारण हमारा हाथ अभिकेंद्र बल लगाता है। जबकि रस्सी से बंधा पत्थर पर प्रतिक्रिया बल लगता है।
2. मोड़ पर मुड़ने के लिए किसी कार या मोटरसाइकिल के पहियों और सड़क के बीच घर्षण बल लगता है जो कि कार को मुड़ने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करता है।
3. इलेक्ट्रॉन का नाभिक के चारों ओर घूमना भी अभिकेंद्र बल का उदाहरण है।
4. गोल घूमते हुए झूले पर बैठे व्यक्तियों का बाहर गिर जाना, अभिकेंद्र बल के कारण ही होता है।

NCERT SOLUTIONS

अभ्यास (पृष्ठ संख्या 86-89)

प्रश्न 1 निम्नलिखित भौतिक राशियों में से बताइए कि कौन-सी सदिश हैं और कौन-सी अदिश- आयतन, द्रव्यमान, चाल, त्वरण, घनत्व, मोल संख्या, वेग, कोणीय आवृत्ति, विस्थापन, कोणीय वेग।

उत्तर- सदिश राशियाँ- त्वरण, वेग, विस्थापन तथा कोणीय वेग।

अदिश राशियाँ- आयतन, द्रव्यमान, चाल, घनत्व, मोल-संख्या तथा कोणीय आवृत्ति।

प्रश्न 2 निम्नांकित सूची में से दो अदिश राशियों को छाँटिए बल, कोणीय संवेग, कार्य, धारा, रैखिक संवेग, विद्युत क्षेत्र, औसत वेग, चुम्बकीय आघूर्ण, आपेक्षिक वेग।

उत्तर- दो अदिश राशियाँ कार्य तथा धारा हैं।

प्रश्न 3 निम्नलिखित सूची में से एकमात्र सदिश राशि को छाँटिए- ताप, दाब, आवेग, समय, शक्ति, पूरी पथ-लम्बाई, ऊर्जा, गुरुत्वीय विभव, घर्षण गुणांक, आवेश।

उत्तर- दी गई राशियों में एकमात्र सदिश राशि आवेग है।

प्रश्न 4 कारण सहित बताइए कि अदिश तथा सदिश राशियों के साथ क्या निम्नलिखित बीजगणितीय संक्रियाएँ अर्थपूर्ण हैं-

a. दो अदिशों को जोड़ना।
b. एक ही विमाओं के एक सदिश व एक अदिश को जोड़ना।
c. एक सदिश को एक अदिश से गुणा करना।
d. दो अदिशों का गुणन।
e. दो सदिशों को जोड़ना।
f. एक सदिश के घटक को उसी सदिश से जोड़ना?

उत्तर-

a. नहीं, दो अदिशों को जोड़ना केवल तभी अर्थपूर्ण हो सकता है, जबकि दोनों एक ही भौतिक राशि को प्रदर्शित करते हों।
b. नहीं, सदिश को केवल सदिश के साथ तैथा अदिश को केवल अदिश के साथ ही जोड़ा जा सकता है।
c. अर्थपूर्ण है, एक सदिश को एक अदिश से गुणा करने पर एक नया सदिश प्राप्त होता है, जिसका परिमाण सदिश व अदिश के परिमाण के गुणन के बराबर होता है तथा दिशा अपरिवर्तित रहती है।
d. अर्थपूर्ण है, दो अदिशों के गुणन से प्राप्त नए अदिश का परिमाण दिए गए अदिशों के परिमाण के गुणन के बराबर होता है।
e. नहीं, केवल तभी अर्थपूर्ण होगा जबकि दोनों एक ही भौतिक राशि को प्रदर्शित करते हों।
f. चूँकि किसी सदिश का घटक एक सदिश होता है जो मूल सदिश के समान भौतिक राशि को निरूपित करता है (जैसे-बल का घटक भी एक बल ही होता है) अत: दोनों को जोड़ना अर्थपूर्ण है।

प्रश्न 5 निम्नलिखित कथन को ध्यानपूर्वक पढिए और कारण सहित बताइए कि यह सत्य है या असत्य-

a. किसी सदिश का परिमाण सदैव एक अदिश होता है।
b. किसी सदिश का प्रत्येक घटक सदैव अदिश होता है।
c. किसी कण द्वारा चली गई पथ की कुल लम्बाई सदैव विस्थापन सदिश के परिमाण के बराबर होती है।
d. किसी कण की औसत चाल (पथ तय करने में लगे समय द्वारा विभाजित कुल पथ-लम्बाई) समय के समान-अन्तराल में कण के औसत वेग के परिमाण से अधिक या उसके बराबर होती है।
e. उन तीन सदिशों का योग जो एक समतल में नहीं हैं, कभी भी शून्य सदिश नहीं होता।

उत्तर-

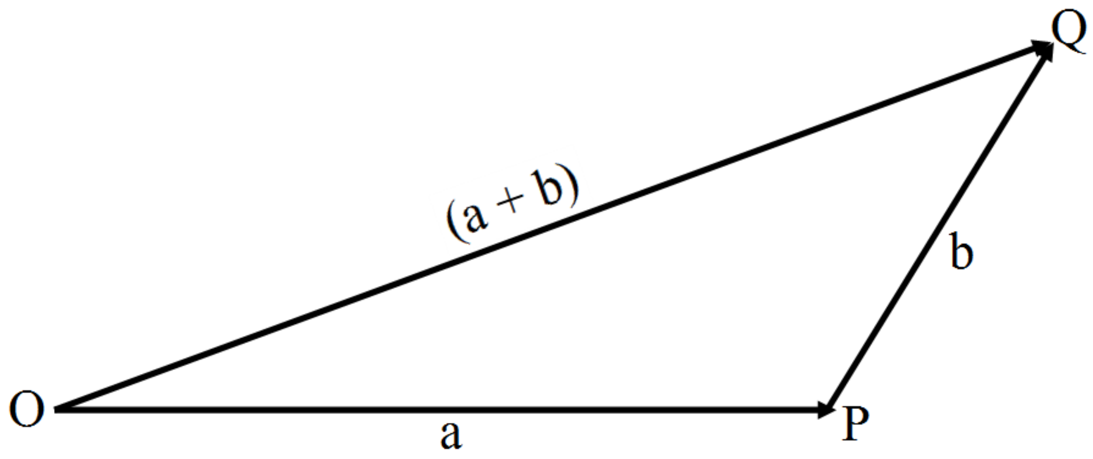
a. सत्य, किसी भी भौतिक राशि का परिमाण एक धनात्मक संख्या है, जिसमें दिशा नहीं होती अतः यह एक अदिश राशि है।
b. असत्य, किसी सदिश का प्रत्येक घटक एक सदिश राशि होता है।
c. असत्य, उदाहरण के लिए यदि कोई व्यक्ति R त्रिज्या के वृत्त की परिधि पर चलते हुए एक चक्कर पूर्ण करता है तो उसके द्वारा तय किए गए पथ की लम्बाई $2\pi r$ होगी जबकि विस्थापन का परिमाण शून्य होगा।
d. सत्य, क्योंकि औसत चाल पूर्ण पथ की लम्बाई पर तथा औसत वेग कुल विस्थापन पर निर्भर करता है। जबकि पूर्ण पथ की लम्बाई सदैव ही विस्थापन के परिमाण से अधिक अथवा बराबर होती है।
e. सत्य, शून्य सदिश प्राप्त करने के लिए तीसरा सदिश पहले दो सदिशों के परिणामी के विपरीत दिशा में तथा परिमाण में उसके बराबर होना चाहिए। यह इस दशा में सम्भव नहीं है, चूँकि तीनों सदिश एक समतल में नहीं हैं।

प्रश्न 6 निम्नलिखित असमिकाओं की ज्यामिति या किसी अन्य विधि द्वारा स्थापना कीजिए-

a. $|a + b| \le |a| + |b|$ इसमें समीका (समता) का चिन्ह कब लागू होता है।
b. $|a + b| \ge ||a| + |b||$ इसमें समीका (समता) का चिन्ह कब लागू होता है।
c. $|a - b| \le |a| + |b|$ इसमें समीका (समता) का चिन्ह कब लागू होता है।
d. $|a - b| \ge ||a| - |b||$ इसमें समीका (समता) का चिन्ह कब लागू होता है।

उत्तर-

a. माना दो सदिशों a तथा b को त्रिभुज OPQ की एक क्रम भुजाओं OP तथा PQ द्वारा प्रदर्शित किया गया है तथा किया गया है तथा उसका परिणामों OQ द्वारा प्रदर्शित किया गया है।



त्रिभुज के गुणों से, किसी त्रिभुज की एक भुजा, उसकी शेष दो भुजाओ के योग से सदैव कम होती है।

$\therefore$ $\triangle OPQ$ में, $OQ < OP + PQ$

अथवा $|a + b| < |a| + |b| \ldots (i)$

यदि सदिश a व b एक ही रेखा में समान दिशा में कार्यरत् है तब इनके परिणामी सदिश का परिणाम,

$$|a + b| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

$$|a + b| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}\ (\because \theta = 0^\circ)$$

$$|a + b| = \sqrt{(a + b)^2}$$

$$|a + b| = (a + b)$$

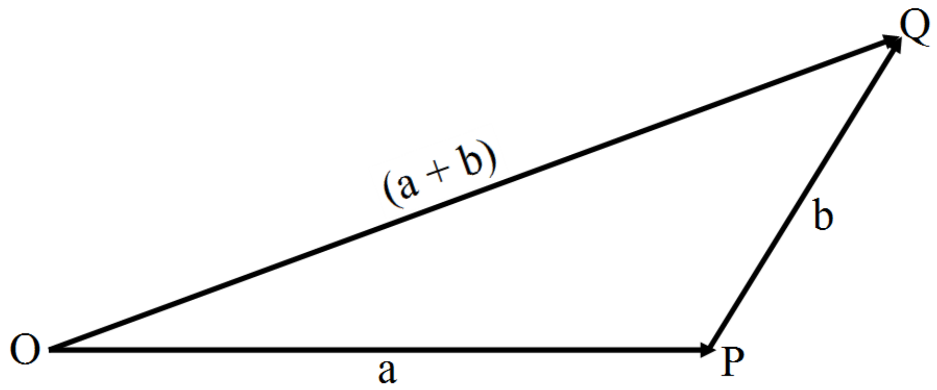
$$|a + b| = |a + b| \ldots (ii)$$

समी. (i) व (ii) से,

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

दोनों पक्ष समान होंगे जब दोनों सदिश a तथा b समान दिशा में एक ही रेखा के अनुदिश हो।

b. माना दो सदिशों a तथा b को त्रिभुज OPQ की एक क्रम भुजाओं OP तथा PQ द्वारा प्रदर्शित किया गया है तथा किया गया है तथा उसका परिणामों OQ द्वारा प्रदर्शित किया गया है।



त्रिभुज के गुणों से त्रिभुज की एक भुजा शेष दो भुजाओं के अन्तर से अधिक होती है।

अतः $\triangle OPQ$ में,

$$OQ > |OP - PQ|$$

दाएँ पक्ष में (OP - PQ) का परिणाम लिया गया है क्योंकि OQ धनात्मक है तथा (OP - PQ) ऋणात्मक हो सकता है, यदि PQ > OP

$$\therefore |a + b| > |a| - |b| \ldots (i)$$

यदि दिए गए दोनों सदिश एक ही रेखा में परस्पर विपरीत दिशा में कार्यरत् हो, तब

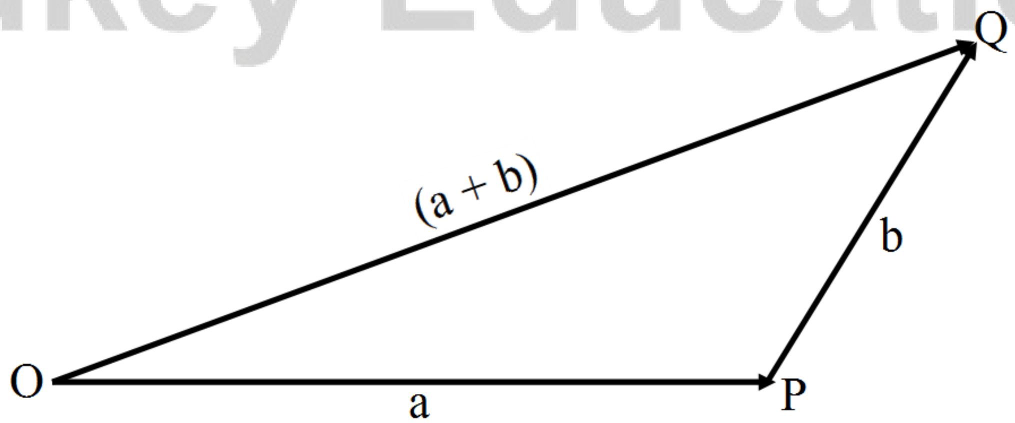
$$|a + b| = |a| - |b| \ldots (ii)$$

समी. (iii) व (iv) से,

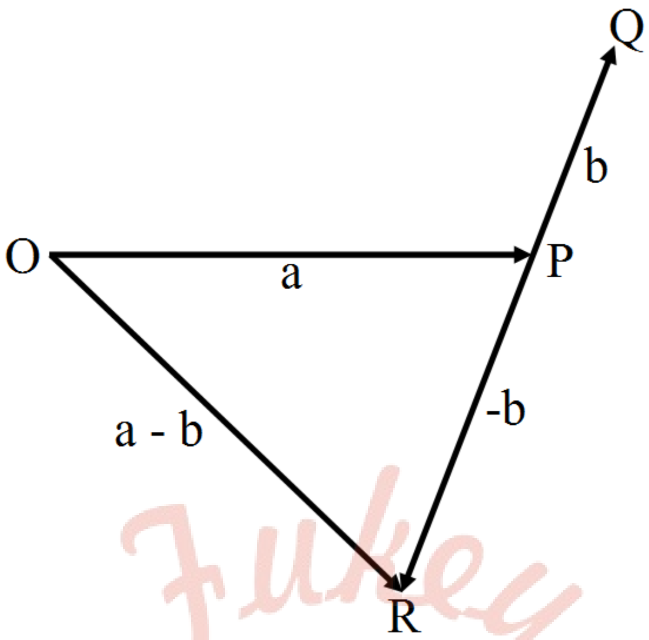
$$|a + b| \geq |a| - |b|$$

यदि सदिश a व b एक ही सरल रेखा में परस्पर विपरीत दिशा में कार्यरत् है तो समानता चिन्ह मान्य होगा।

c. माना दो सदिशों a तथा b को त्रिभुज OPQ की एक क्रम भुजाओं OP तथा PQ द्वारा प्रदर्शित किया गया है तथा किया गया है तथा उसका परिणामों OQ द्वारा प्रदर्शित किया गया है।



यदि PR सदिश -b को तथा सदिश a व -b का परिणामी OR के द्वारा प्रदर्शित हो तब,



त्रिभुज के गुणों से, किसी त्रिभुज की एक भुजा उसकी शेष दो भुजाओं की लंबाइयों के योग सें कम होती है। अतः $\triangle \mathrm{OPR}$ में,

$$\therefore \ \mathrm{OR} < \mathrm{OP} + \mathrm{PR}$$

$$|\mathrm{a}-\mathrm{b}| < |\mathrm{a}| + |-\mathrm{b}|$$

परन्तु |-b| = |b|, क्योकि किसी सदिश का परिणाम सदैव धनात्मक होता है।

अथवा $|\mathrm{a}-\mathrm{b}| < |\mathrm{a}| + |\mathrm{b}| \ldots (\mathrm{i})$

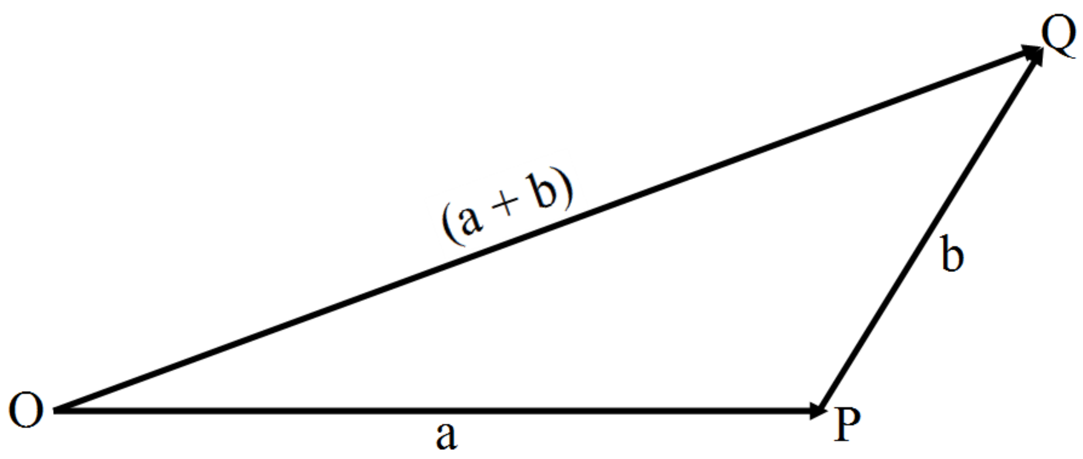
यदि सदिश a तथा b एक सरल रेखा में परस्पर विपरीत दिशा में कार्यरत् है तब

$$|\mathrm{a}-\mathrm{b}| = |\mathrm{a}| + |\mathrm{b}| \ldots (\mathrm{ii})$$

समी. (v) व (vi) से,

$$|\mathrm{a}-\mathrm{b}| \leq |\mathrm{a}| + |\mathrm{b}|$$

d. माना दो सदिशों a तथा b को त्रिभुज OPQ की एक क्रम भुजाओं OP तथा PQ द्वारा प्रदर्शित किया गया है तथा किया गया है तथा उसका परिणामों OQ द्वारा प्रदर्शित किया गया है।



त्रिभुज के गुणों से, त्रिभुज की एक भुजा इसकी शेष दो भुजाओं के अंतर से अधिक होती है।

$\therefore \triangle OPR$ में,

$OR > |OP - PR|$

दाँए पक्ष में (OP - PR) का परिणाम लिया गया है, क्योकि बाएँ पक्ष में OR धनात्मक है, परन्तु दाएँ पक्ष में (OP - PR) ऋणात्मक हो सकता है। यदि PR > OP

$\therefore \ |a - b| > |a| - |-b|$

$|a - b| > |a| - |b| \ldots (i)$

यदि सदिश a तथा b एक ही सरल रेखा में समान दिशा में है, तब

$|a - b| = |a| - |b| \ldots (ii)$

समी. (i) तथा (ii) से,

$|a - b| \geq |a| - |b|$

दोनों पक्ष बराबर होंगे यदि सदिश a तथा b एक ही रेखा में समान दिशा में हो।

प्रश्न 7 दिया है a + b + c + d = 0, नीचे दिए गए कथनों में से कौन-सा सही है-

a. a, b, c तथा d में से प्रत्येक शून्य सदिश है।

b. (a + c) का परिमाण (b + d) के परिमाण के बराबर है।

c. a का परिमाण b, c तथा d के परिमाणों के योग से कभी भी अधिक नहीं हो सकता।

d. यदि a तथा d सरेखीय नहीं हैं तो b + c अवश्य ही a तथा d के समतल में होगा, और यह a तथा d के अनुदिश होगा यदि वे संरेखीय हैं।

उत्तर-

a. सही नहीं हैं, क्योंकि (a + b + c + d) केवल a, b, c, a, d के शून्य सदिश होने के अतिरिक्त कई अनेक प्रकार से शून्य हो सकता है, जैसे-यदि सदिश भिन्न दिशाओं में कार्यरत् हैं तब भी उनका परिणामी शून्य हो सकता है।

b. सही है, क्योंकि a + b + c + d = 0

$\therefore$ a + c = -(b + d)

अथवा |a + c| = |b + d|

c. सत्य, क्योंकि a + b + c + d = 0

$\therefore$ a = −(b + c + d)

अथवा |a|=|b+c+d|

अतः सदिश a का परिमाण (b + c + d) के परिमाण के बराबर होगा। सदिश (b + c + d) का परिमाण सदिशों तथा d के परिमाणों के योग के बराबर या उससे कम होगा परन्तु कभी उससे अधिक नहीं हो सकता है। अतः सदिश a का परिमाण कभी भी सदिश b, c व d के परिमाणों के योग से अधिक नहीं हो सकता है।

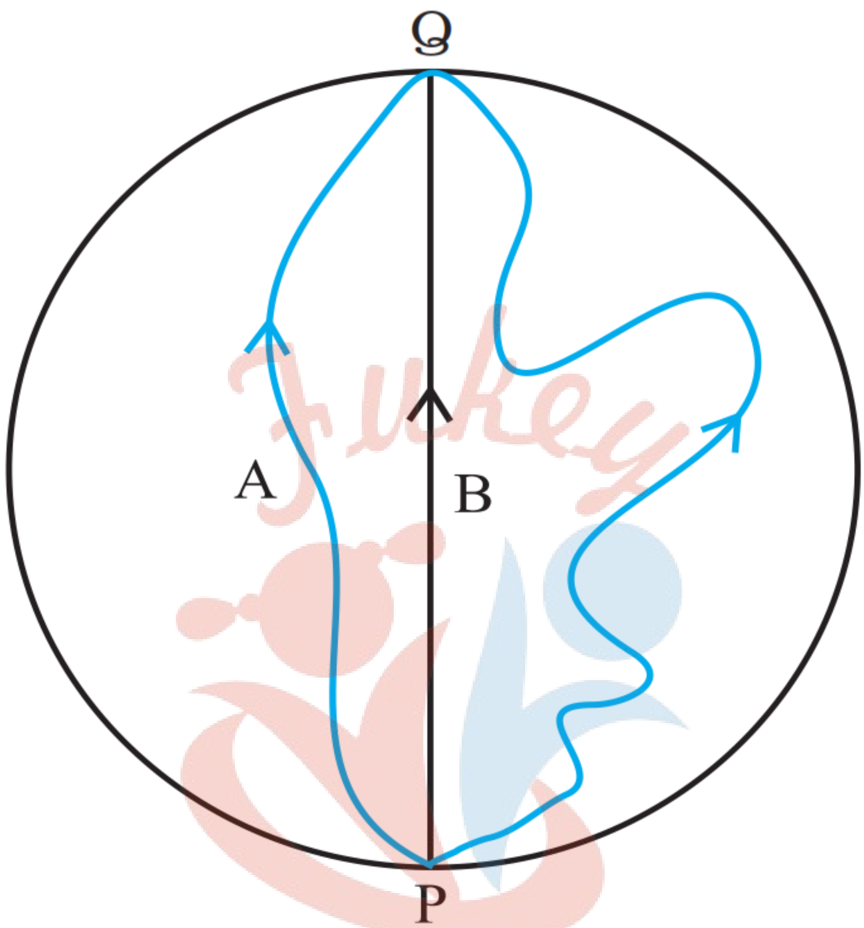
d. सही है क्योंकि a + b + c + d = 0

अथवा a + (b + c) + d = 0

तीन सदिशों a, (b + c) तथा d का परिणामी केवल तभी शून्य हो सकता है जब वे एक तल में स्थित हों तथा किसी त्रिभुज की एक क्रम में ली गई तीनों भुजाओं को प्रदर्शित करते हों। यदि सदिश a तथा b एक ही रेखा के अनुदिश या समतापीय हैं, तब सदिश (b + c) भी उसे रेखा में होगा केवल तभी इन सदिशों का योग शून्य हो सकता है।

प्रश्न 8 तीन लड़कियाँ 200m त्रिज्या वाली वृत्तीय बर्फीली सतह पर स्केटिंग कर रही हैं। वे सतह के किनारे के बिन्दु P से स्केटिंग शुरू करती हैं तथा P के व्यासीय विपरीत बिन्दु Q पर विभिन्न पथों से होकर पहुँचती हैं, जैसा कि संलग्न चित्र में दिखाया गया है। प्रत्येक लड़की के विस्थापन

सदिश का परिमाण कितना है? किस लड़की के लिए यह वास्तव में स्केट किए गए पथ की लम्बाई के बराबर है?



उत्तर- दिया है, वृत्तीय पथ की त्रिज्या (R) = 200m

∵ प्रत्येक लड़की का विस्थापन सदिश = [latex]\xrightarrow { PQ }[/latex]

∴ विस्थापन सदिश का परिमाण = व्यास PQ की लम्बाई

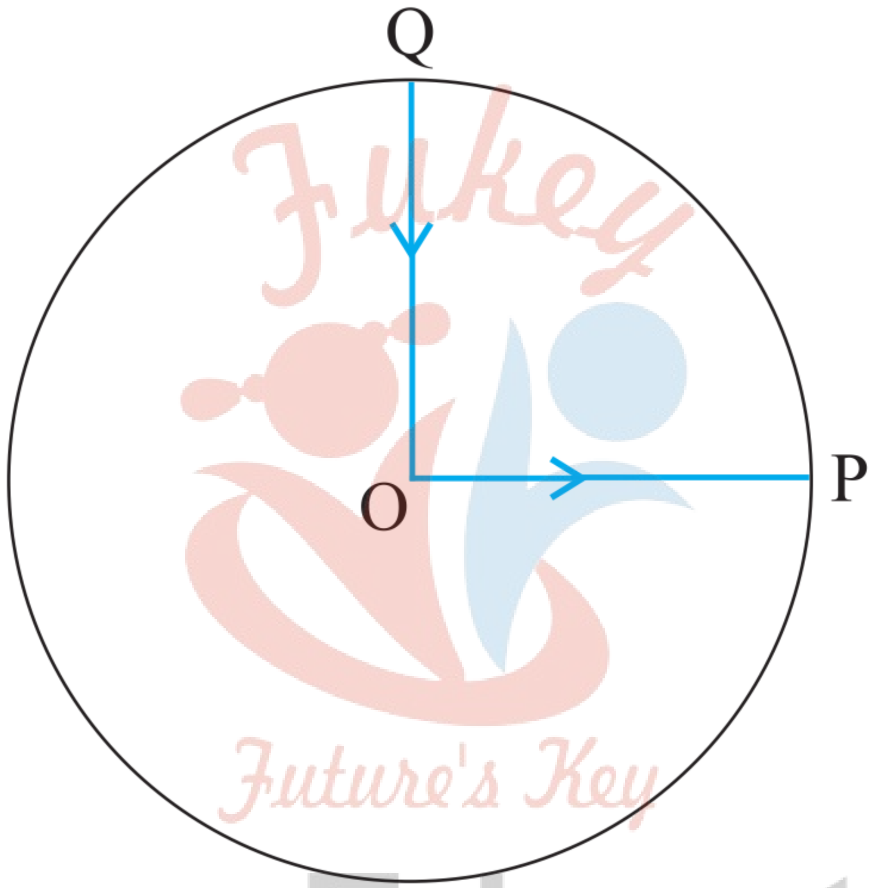
= 2R = 2 x 200m

= 400 m

∵ लड़की B द्वारा तय पथ (PQ) की लम्बाई = 2R = 400m

∴ लड़की B के लिए विस्थापन संदिश का परिमाण वास्तव में स्केट चित्र 4.2 किए गए पथ की लम्बाई के बराबर है।

प्रश्न 9 कोई साइकिल सवार किसी वृत्तीय पार्क के केन्द्र O से चलना शुरू करता है तथा पार्क के किनारे P पर पहुँचता है। पुनः वह पार्क की परिधि के अनुदिश साइकिल चलाता हुआ QO के रास्ते (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है) केन्द्र पर वापस आ जाता है। पार्क की त्रिज्या 1km है। यदि पूरे चक्कर में 10 मिनट लगते हों तो साइकिल सवार का (a) कुल विस्थापन, (b) औसत वेग तथा (c) औसत चाल क्या होगी?



उत्तर-

a. दिया है, वृत्तीय पार्क की त्रिज्या = 1km

चूंकि साइकिल सवार केन्द्र O से चलकर पुनः केन्द्र 0 पर ही पहुँच जाता है, अतः कुल विस्थापन = 0

b.

$$\text{औसत वेग} = \frac{\text{कुल विस्थापन}}{\text{कुल समय}} = \frac{0}{10 \text{ min}} = 0$$

c.

साइकिल सवार द्वारा तय कुल दूरी = त्रिज्या OP + परिधि खण्ड PQ + त्रिज्या QO

$$= 1\text{km} + \frac{1}{4} \times 2\pi R + 1\text{km} \left(\because \text{त्रिज्या R = 1km}\right)$$

$$= 2\text{km} + \frac{1}{2} \times 3.14 \times 1\text{km}$$

$$= 3.57\text{km}$$

जबकि लगा समय t = 10min

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल तय दुरी}}{\text{लगा समय}} = \frac{3.57 \text{ km}}{10 \text{ min}} = 0.357 \text{ km/min.}$$

प्रश्न 10 किसी खुले मैदान में कोई मोटर चालक एक ऐसा रास्ता अपनाता है जो प्रत्येक 500m के बाद उसके बाईं ओर 60° के कोण पर मुड़ जाता है। किसी दिए मोड़ से शुरू होकर मोटर चालक का तीसरे, छठे व आठवें मोड़ पर विस्थापन बताइए। प्रत्येक स्थिति में मोटर चालक द्वारा इन मोड़ों पर तय की गई कुल पथ-लम्बाई के साथ विस्थापन के परिमाण की तुलना कीजिए।

उत्तर- मोटर चालक द्वारा अपनाया गया मार्ग एक समषट्भुज ABCDEF आकार का होगा।

a. माना कि मोटर चालक शीर्ष A से चलना प्रारम्भ करता है।

तो वह शीर्ष D पर तीसरा मोड़ लेगा। प्रश्नानुसार,

AB = BC = CD = DE = EF = FA = 500m

∴ तीसरे मोड़ पर विस्थापन,

= AD = 2 × AB (समषट्भुज के गुण से)

= 2 × 500m = 1000m = 1km

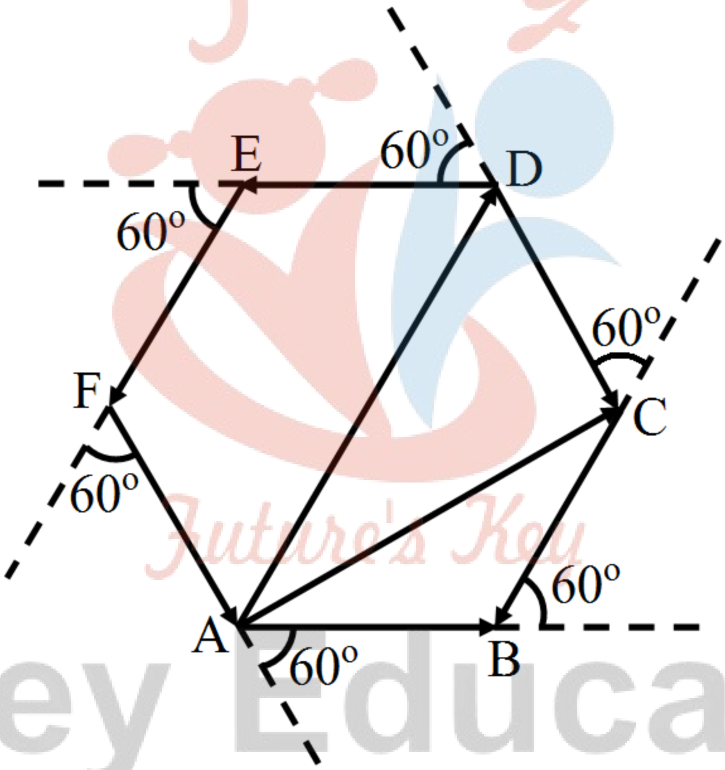
जबकि कुल पथ की लम्बाई

= AB + BC + CD

= (500 + 500 + 500)m

= 1500m = 1.5km

∴ विस्थापन : पथ-लम्बाई = 1km : 1.5km = 2 : 3



b. मोटर चालक छठा मोड़ शीर्ष A पर लेगा अर्थात् इस क्षण मोटर चालक अपने प्रारम्भिक बिन्दु पर पहुँच चुका होगा।

∴ विस्थापन = शून्य।

जबकि कुल पथ-लम्बाई = AB + BC + CD + DE + EF + FA

= 6 × AB = 6 × 500m

= 3000m = 3km

विस्थापन : पथ-लम्बाई = 0 : 3km = 0

c. मोटर चालक आठवाँ मोड़ शीर्ष C पर लेगा।

$$\therefore \text{विस्थापन } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC \cos 60^\circ}$$

$$= \sqrt{(500)^2 + (500)^2 + 2 \times 500 \times 500 \times \frac{1}{2}}$$

$$= 500\sqrt{3}\text{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{m}$$

$$\text{जबकि कुल पथ-लम्बाई} = 8 \times AB = 8 \times 500\text{m} = 4\text{km}$$

$$\therefore \text{विस्थापन : पथ-लम्बाई} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{km} : 4\text{km} = \sqrt{3} : 8$$

प्रश्न 11कोई यात्री किसी नए शहर में आया है और वह स्टेशन से किसी सीधी सड़क पर स्थित किसी होटल तक जो 10km दूर है, जाना चाहता है। कोई बेईमान टैक्सी चालक 23km के चक्करदार रास्ते से उसे ले जाता है और 28min में होटल में पहुँचता है।

a. टैक्सी की औसत चाल।

b. औसत वेग का परिमाण क्या होगा? क्या वे बराबर हैं।

उत्तर- दिया है, टैक्सी द्वारा तय कुल दूरी = 23km,

लगा समय = 28min

टैक्सी का विस्थापन = स्टेशन से होटल तक सरल रेखीय दूरी = 10km

a.

$$\text{टैक्सी की औसत चाल} = \frac{\text{कुल तय दुरी}}{\text{लगा समय}} = \frac{23\text{ km}}{28\text{ min}} = 0.82\text{ km/min}$$

उपयुक्त से स्पष्ट है कि टैक्सी की चाल तथा औसत वेग बराबर नहीं है।

b.

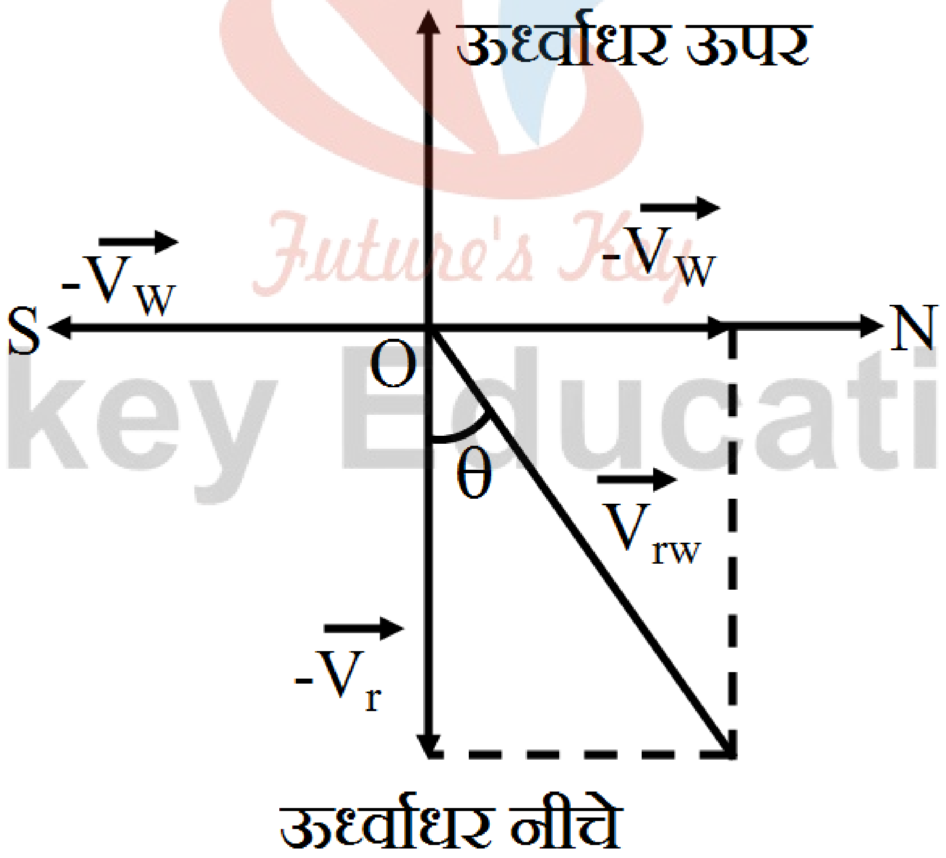
$$\text{टैक्सी का औसत वेग} = \frac{\text{कुल विस्थापन}}{\text{लगा समय}}$$

$$= \frac{10\text{km}}{28\text{min}} = 0.36\text{km}/\ /\text{in}$$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि टैक्सी की चाल तथा औसत वेग बराबर नहीं है।

प्रश्न 12 वर्षा का पानी 30ms-1 की चाल से ऊर्ध्वाधर नीचे गिर रहा है। कोई महिला उत्तर सेदक्षिण की ओर 10ms^{-1} की चाल से साइकिल चला रही है। उसे अपना छाता किस दिशा में रखना चाहिए?

उत्तर-



माना वर्षा का वेग $\vec{v}_r$ तथा महिला का वेग $\vec{v}_w$ है।

तब $u_r = 30\text{m-s}^{-1}$ तथा $u_w = 10\text{m-s}^{-1}$

महिला को, स्वयं को वर्षा के पानी से बचाने के लिए छाता, वर्षा के, महिला के सापेक्ष वेग $\vec{v}_{rw}$ की दिशा में करना होगा।

वर्षा का महिला के सापेक्ष वेग $\vec{v}_{rw} = \vec{v}_r - \vec{v}_w$

$= \vec{v}_r + (-\vec{v}_w)$

अर्थात $\vec{v}_{rw}$ का मान ज्ञात करने के लिए हमे $\vec{v}_w$ की दिशा उलटकर $\vec{v}_r$ में जोड़ना होगा।

माना वेग $\vec{v}_{rw}$ ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनता है तो,

$$\tan\theta = \frac{u_w}{u_r} = \frac{10\text{m-s}^{-1}}{30\text{m-s}^{-1}} = \frac{1}{3} = 0.333$$

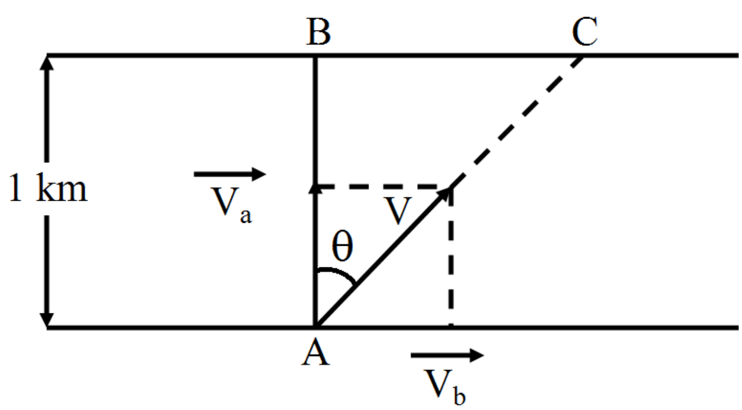
$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}(0.333) = 18^\circ 26'$$

अतः महिला को छाता ऊर्ध्वाधर तल में. ऊर्ध्वाधर से 18°26' के कोण पर दक्षिण की ओर रखना चाहिए।

प्रश्न 13 कोई व्यक्ति स्थिर जल में 4.0km/ h की चाल से तैर सकता है। उसे 1.0km चौड़ी नदी को पार करने में कितना समय लगेगा? यदि नदी 3.0km/ h की स्थिर चाल से बह रही हो और वह नदी के बहाव के लम्ब तैर रहा हो। जब वह नदी के दूसरे किनारे पहुँचता है तो वह नदी के बहाव की ओर कितनी दूर पहुँचेगा?

उत्तर- तैराक नदी के लम्ब दिशा में तैर रहा है, अतः तैराक का अपना वेग नदी के लम्ब दिशा में कार्य करेगा जब इस दिशा में नदी के अपने वेग का कोई प्रभाव नहीं होगा।

अतः नदी के लम्ब दिशा में नेट वेग = तैराक का अपना वेग



$= u_a = 4.0\text{km}/\backslash\ \text{h}$

$\therefore$ नदी पार करने में लगा समय = $\dfrac{\text{लम्ब दिशा में तय दुरी}}{\text{लम्ब दिशा में वेग}}$

$= \dfrac{1\text{km}}{4(\text{km}/\ \text{h})} = \dfrac{1}{4}\text{h} = 15\text{min}$

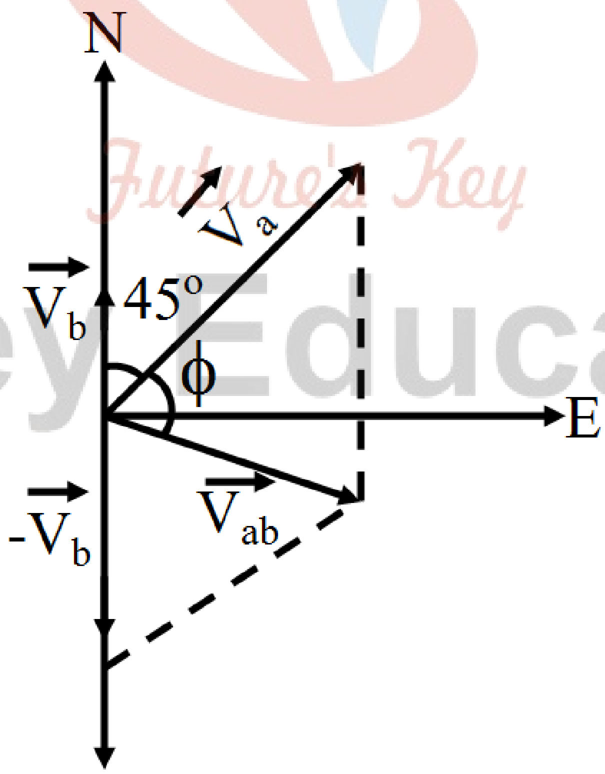
माना इस बीच वयक्ति बहाव की और BC दूरी तय कर चुका है, तब

तय दूरी BC = बहाव का वेग × लगा समय

$= u_b \times \dfrac{1}{4}\text{h} = (3.0\text{km}/\ \text{h}) \times \dfrac{1}{4}\text{h} = 0.75\text{km}$

प्रश्न 14 किसी बन्दरगाह में 72km/ h की चाल से हवा चल रही है और बन्दरगाह में खड़ी किसी नौका के ऊपर लगा झण्डा N-E दिशा में लहरा रहा है। यदि वह नौका उत्तर की ओर 51km/ h की चाल से गति करना प्रारम्भ कर दे तो नौको पर लगा झण्डा किस दिशा में लहराएगा?

उत्तर-



माना वायु का वेग $= \vec{v}_a$ तथा नौका का वेग $= \vec{v}_b$

तब $u_a = 72 \mathrm{km/h}$, N-E दिशा में

$u_b = 51 \mathrm{km/h}$ उत्तर दिशा में

माना वायु का नौका के सापेक्ष वेग $\vec{v}_{ab}$ है तो,

$$\vec{v}_{ab} = \vec{v}_a - \vec{v}_b$$

स्पष्ट है कि $\vec{v}_{ab}$ वायु वेग $\vec{v}_a$ तथा नौका के विपरीत दिशा वेग $-\vec{v}_b$ के परिणामी के बराबर हैं, तथा झण्डा, वेग $\vec{v}_{ab}$ की दिशा में ही लहराएगा।

माना वेग $\vec{v}_{ab}$, वेग $\vec{v}_a$ से ϕ कोण बनाता है, जबकि वेगों $\vec{v}_a$ तथा $-\vec{v}_b$ के बीच का कोण $\theta = 135^\circ$ है।

तब $\tan\phi = \frac{u_b \sin 135^\circ}{u_a + u_b \cos 135^\circ}$

$$= \frac{51 \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{72 + 51 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \frac{51}{72\sqrt{2} - 51} = 1.0035$$

$\therefore \ \phi = \tan^{-1}(1.0035) = 45.1^\circ$ लगभग

अतः वेग $\vec{v}_{ab}$ द्वारा पूर्व दिशा में बनाया गया कोण,

$= \phi - 45^\circ = 0.1^\circ$ (लगभग)

अतः झण्डा लगभग पूर्व दिशा में लहराएगा।

प्रश्न 15 किसी लम्बे हॉल की छत 25m ऊँची है। वह अधिकतम क्षैतिज दूरी कितनी होगी जिसमें $40 \mathrm{m\text{-}s^{-1}}$ की चाल से फेंकी गई कोई गेंद छत से टकराए बिना गुजर जाए?

उत्तर- यहाँ प्रक्षेप्य वेग u = 40 मी/ से, महत्तम ऊँचाई HM = 25 मी

$\therefore \ H_M = \left(\frac{u^2 \cdot \sin^2\theta_0}{2g}\right)$ से

$$25 = \left[\frac{(40)^2 \times \sin^2\theta_0}{2 \times 9.8}\right]$$

$$\therefore \ \sin^2\theta_0 = \left[\frac{25 \times 2 \times 9.8}{(40)^2}\right] = 0.30625$$

अथवा $\sin\theta_0 = \sqrt{0.30625} = 0.5534$

∴ उक्त प्रक्षेप्य वेग तथा प्रक्षेप्य कोण के लिए अधिकतम क्षैतिज दूरी,

= क्षैतिज परास R

$$= \frac{u^2 \cdot \sin 2\theta_0}{g} = \frac{u^2(2\sin\theta_0 \cdot \cos\theta_0)}{g}$$

$$= \frac{u^2 \cdot 2\sin\theta_0 \times \sqrt{1-\sin^2\theta_0}}{g}$$

$$= \left[\frac{(40)^2 \times 2 \times 0.5534\sqrt{1-0.30625}}{9.8}\right] \text{ मी}$$

$$= \left[\frac{40^2 \times 2 \times 0.5534 \times 0.8329}{9.8}\right] \text{ मी}$$

$$= 150.5 \text{ मी}$$

प्रश्न 16 क्रिकेट का कोई खिलाड़ी किसी गेंद को 100m की अधिकतम क्षैतिज दूरी तक फेंक सकता है। वह खिलाड़ी उसी गेंद को जमीन से ऊपर कितनी ऊँचाई तक फेंक सकता है?

उत्तर-

यहाँ अधिकतम क्षैतिज परास R_{max} = 100 मी

$$\therefore \frac{u^2}{g} = 100 \text{ मी}$$

परन्तु किसी प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई, $H_M = \frac{u^2 \cdot \sin^2\theta_0}{2g}$

अतः (H_M) का उच्चतम मान, $H = \frac{u^2}{2g}$ जबकि $\theta_0 = 90^\circ$

$$\therefore H = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{g}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 100 = 50 \text{ मीटर}$$

प्रश्न 17 80cm लम्बे धागे के एक सिरे पर एक पत्थर बाँधा गया है और इसे किसी एकसमान चाल के साथ किसी क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है। यदि पत्थर 25s में 14 चक्कर लगाता है तो पत्थर के त्वरण का परिमाण और उसकी दिशा क्या होगी?

उत्तर-

पत्थर द्वारा अपनाए गए वृत्तीय मार्ग की त्रिज्या R = 80cm = 0.8m

$$\text{पत्थर का आवर्तकाल (T)} = \frac{\text{कुल समय}}{\text{चक्करो की संख्या}} = \frac{25\text{s}}{14}$$

$$\therefore \text{पत्थर की रेखीय चाल } \mathbf{v} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\times\frac{22}{7}\times 0.8\text{m}}{\left(\frac{25}{14}\right)\text{s}}$$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times 0.8\times\frac{14}{25}\text{m-s}^{-1}$$

$$= 2.80\text{m-s}^{-1}$$

$$\therefore \text{पत्थर का त्वरण (अभिकेन्द्र त्वरण) } \mathbf{a_c} = \frac{u^2}{R} = \frac{\left(2.80\text{ms}^{-1}\right)^2}{0.8\text{m}} = 9.80\text{m-s}^{-2}$$

इस त्वरण की दिशा वृत्त के केन्द्र की और होगी।

प्रश्न 18 कोई वायुयान 900kmh-1 की एकसमान चाल से उड़ रहा है और 1.00km त्रिज्या का कोई क्षैतिज लूप बनाता है। इसके अभिकेन्द्र त्वरण की गुरुत्वीय त्वरण के साथ तुलना कीजिए।

उत्तर-

$$\text{वायुयान की चाल } \mathbf{v} = 900\text{km-h}^{-1} = 900\times\frac{5}{18}\text{m-s}^{-1} = 250\text{m-s}^{-1}$$

वृत्तीय मार्ग की त्रिज्या R = 1.00km = 1000m

$$\text{वायुयान का अभिकेन्द्र त्वरण } \mathbf{a_c} = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(250\text{m-s}^{-1}\right)^2}{1000\text{m}} = 62.5\text{m-s}^{-2}$$

अतः $\frac{a_c}{g} = \frac{62.5\text{m-s}^{-2}}{9.8\text{m-s}^{-2}} = 6.38$

$a_c = 6.38 \times$ गुरुत्वीय त्वरण

अर्थात वायुयान का अभिकेन्द्र त्वरण, गुरुत्वीय त्वरण का 6.38 गुना है।

प्रश्न 19 नीचे दिए गए कथनों को ध्यानपूर्वक पढिए और कारण सहित बताइए कि वे सत्य हैं या असत्य-

a. वृत्तीय गति में किसी कण का नेट त्वरण हमेशा वृत्त की त्रिज्या के अनुदिश केन्द्र की ओर होता है।
b. किसी बिन्दु पर किसी कण का वेग सदिश सदैव उस बिन्दु पर कण के पथ की स्पर्श रेखा के अनुदिश होता है।
c. किसी कण को एकसमान वृत्तीय गति में एक चक्र में लिया गया औसत त्वरण सदिश एक शून्य सदिश होता है।

उत्तर-

a. असत्य है, क्योंकि यह कथन केवल एकसमान वृत्तीय गति के लिए सत्य है।
b. सत्य है, क्योंकि यदि कण की गति में त्वरण, वेग के अनुदिश है तो कण सरल रेखीय पथ पर गति करता है और यदि गति में त्वरण किसी अन्य दिशा में है तो कण वक्र पथ पर गति करता है तथा वेग की दिशा पथ के स्पर्श रेखीय रहती है।
c. सत्य है, क्योंकि एक अर्द्धचक्र में त्वरण, दूसरे अर्द्धचक्र में त्वरण के ठीक बराबर व विपरीत होता है।

प्रश्न 20 किसी कण की स्थिति सदिश निम्नलिखित है-

a. $\vec{r} = \left(3.0t\hat{i} - 2.0t^2\hat{j} + \hat{K}4.0\right)\text{m}$

समय t सेकण्ड में है तथा सभी गुणकों के मात्रक इस प्रकार से हैं कि r मीटर में व्यक्त हो जाए।

कण का v तथा a निकालिए।

b. $\vec{r} = (3.0t\hat{i} - 2.0t^2\hat{j} + 4.0\hat{k})m$

समय t सेकण्ड में है तथा सभी गुणकों के मात्रक इस प्रकार से हैं कि r मीटर में व्यक्त हो जाए।

t = 2.0s पर कण के वेग का परिमाण तथा दिशा कितनी होगी?

उत्तर-

a.

$\because$ स्थिति सदिश $\vec{r} = 3.0t\hat{i} - 2.0t^2\hat{j} + 4.0\hat{k}$

$\therefore$ कण का वेग सदिश,

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3.0t\hat{i} - 2.0t^2\hat{j} + 4.0\hat{k})$$

अर्थात $\vec{u} = (3.0\hat{i} - 4.0t\hat{j})$ मी/ से ....(i)

तथा कण का त्वरण सदिश,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(3.0\hat{i} - 4.0t\hat{j})$$

अर्थात $\vec{a} = -4.0\hat{j}$ मी/ से^{2}....(ii)

b.

$\therefore$ कण का वेग सदिश,

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3.0t\hat{i} - 2.0t^2\hat{j} + 4.0\hat{k})$$

अर्थात $\vec{u} = (3.0\hat{i} - 4.0t\hat{j})$ मी/ से ....(i)

समीकरण (i) से t = 2.0 सेकण्ड पर कण का वेग

$\vec{u} = (3.0\hat{i} - 4.0 \times 2\hat{j})$ मी/ से

$= (3.0\hat{i} - 8.0\hat{j})$ मी/ से

$u_x = 3.0$ मी/ से तथा $u_y = -8.0$ मी/ से

वेग का परिणाम $|\vec{u}| = u = \sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2}$

$= \sqrt{(3.0)^2 + (-8.0)^2}$

$= \sqrt{(73)}$ मी/ से = 8.544 मी/ से

$\vec{u}$ की दिशा $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{u_x}{u_y}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-8.0\text{m/ sec}}{3.0\text{m/ sec}}\right)$

$= \tan^{-1}(-2.67) = -70°$

अर्थात X-अक्ष से 70° कोण पर नीचे की ओर अर्थात दक्षिणावर्त।

प्रश्न 21 कोई कण t = 0 क्षण पर मूल बिंदु से $10\hat{j}m - s^{-1}$ के वेग से चलना प्रारम्भ करता है, तथा x-y समतल में एकसमान त्वरण $(8.0\hat{i} + 2.0\hat{j})m - s^{-2}$ से गति करता है।

a. किस क्षण कण का x-निर्देशांक 16m होगा? इसी समय इसका y-निर्देशांक कितना होगा?
b. इसी क्षण किसी कण की चाल कितनी होगी।

उत्तर-

a.

$$x = x_0 + (u_0)_x t + \frac{1}{2}a_x t^2 \ldots (i)$$

$$y = y_0 + (u)_0 t + \frac{1}{2}a_y t^2 \ldots (ii)$$

यहाँ गति मूलबिंदु से प्रारम्भ होती है, अतः $x_0 = 0$ तथा $y_0 = 0$

कण का वेग $\vec{u}_0 = 10\hat{j}$ मी-से$^{-1}$

अतः $\vec{u}_0 = (u_0)_x\hat{i} + (u_0)_y\hat{j}$ से तुलना करने पर,

$(u_0)_x = 0$ तथा $(u_0)_y = 10$ मी-से

कण का त्वरण $\vec{a} = (8.0\hat{i} + 2.0\hat{j})$ मी-से$^{-2}$

अतः $\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j}$ से तुलना करने पर,

a_x = 8.0 मी/ से$^{-2}$ तथा ay = 2.0 मी/ से$^{-2}$ किसी क्षण 't' पर x = 16 मी, अतः समीकरण (i) से

$$16 = 0 + 0 \times t + \frac{1}{2} \times 8 \times t^2 = 4t^2$$

$$\therefore\ t^2 = 4$$

$t = \sqrt{4} = 2$ सेकण्ड

इस क्षण y-निर्देशांक समी. (ii) से,

$$y = \left[0 + (10.0) \times 2 + \frac{1}{2} \times 2.0 \times (2)^2\right] \text{ मी}$$

$y = 24$ मी

b.

क्षण 't' पर स्थिति सदिश $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}_0 \times t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$\therefore$ इस क्षण वेग सदिश,

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_0 + \vec{u}_0 \times t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2\right)$$

अथवा $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{a} \cdot t$

परन्तु $\vec{u}_0 = 10\hat{j}$ तथा $\vec{a} = 8.0\hat{i} + 2.0\hat{j}$ एवं t = 2 सेकण्ड

$$\therefore \vec{u} = (10\hat{j}) + (8.0\hat{i} + 2.0\hat{j}) \times 2$$

अथवा $\vec{u} = 16\hat{i} + 14\hat{j}$

$u_x = 16$ मी/ से तथा $u_y = 14$ मी/ से

$$\therefore\ |\vec{u}| = u = \sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2}$$

$$= \sqrt{(16)^2 + (14)^2}$$

$$= \sqrt{452} = 21.26 \text{ मी/ से}$$

प्रश्न 22 $\hat{i}$ व $\hat{j}$ क्रमशः x-व y-अक्षों के अनुदिश एकांक सदिश हैं। सदिशों $\hat{i} + \hat{j}$ तथा $\hat{i} - \hat{j}$ का परिमाण तथा दिशा क्या होंगी? सदिशों $A = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ के $\hat{i} + \hat{j}$ व $\hat{i} - \hat{j}$ की दिशाओं के अनुदिश घटक निकालिए। [आप ग्राफी विधि का उपयोग कर सकते हैं]।

उत्तर-

$\hat{i}$ तथा $\hat{j}$ परस्पर लम्ब एकांक सदिश हैं, अर्थात् इनके बीच का कोण $\theta = 90^\circ$ है।

सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के परिणामी $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$ के परिणाम के सूत्र

$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$ से,

$\hat{i} + \hat{j}$ का परिणाम

$$|\hat{i} + \hat{j}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + 2 \times 1 \times 1 \times \cos 90^\circ}$$

$$= \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2} \text{ इकाई}$$

जबकि इसकी दिशा द्वारा, x-अक्ष की धन दिशा से बना कोण

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\hat{j} \text{ का गुणांक}}{\hat{i} \text{ का गुणांक}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = +45^\circ$$

इसी प्रकार सदिश $\left(\hat{i}-\hat{j}\right)$ का परिणाम

$$|\hat{i}-\hat{j}|=\sqrt{(1)^2+(1)^2+2\times 1\times 1\times \cos 90^\circ}$$

$$=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2} \text{ इकाई}$$

जबकि इसकी दिशा द्वारा, x-अक्ष की धन दिशा से बना कोण

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right)=\tan^{-1}(-1)$$

$$\theta=-\tan^{-1}(1)=-45^\circ$$

पुनः $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}$ तथा माना $\vec{B}=\hat{i}+\hat{j}$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta=(A\cos\theta)B$ से

$$A\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B}$$

सदिश $\vec{A}$ का सदिश $\left(\hat{i}-\hat{j}\right)$ की दिशा में घटक

$$(A\cos\theta)=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B}=\frac{\left(2\hat{i}+3\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}\right)}{\sqrt{1^2+1^2}}\quad\left[\because B=|\vec{B}|\right]$$

$$=\frac{2\hat{i}\cdot\hat{i}+2\hat{i}\cdot\hat{j}+3\hat{j}\cdot\hat{i}+3\hat{j}\cdot\hat{j}}{\sqrt{2}}\quad\left(\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta\right)$$

$$=\frac{2+3}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}} \text{ इकाई} \left[\because\ \hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=1 \text{ तथा } \hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{i}=0\right]$$

इसी प्रकार सदिश $\vec{A}$ का सदिश $\hat{i}-\hat{j}$ की दिशा में घटक

$$\frac{\left(2\hat{i}+3\hat{j}\right)\cdot\left(\hat{i}-\hat{j}\right)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ इकाई}$$

प्रश्न 23 किसी दिक्स्थान पर एक स्वेच्छ गति के लिए निम्नलिखित सम्बन्धों में से कौन-सा सत्य है?

(a) $\mathbf{v}_{\text{औसत}}=(1/2)\,(\mathbf{v}\,(t_1)+\mathbf{v}\,(t_2))$

(b) $\mathbf{v}_{\text{औसत}}=[\mathbf{r}(t_2)-\mathbf{r}(t_1)]\,/(t_2-t_1)$

(c) $\mathbf{v}\,(t)=\mathbf{v}\,(0)+\mathbf{a}\,t$

(d) $\mathbf{r}\,(t)=\mathbf{r}\,(0)+\mathbf{v}\,(0)\,t+(1/2)\,\mathbf{a}\,t^2$

(e) $\mathbf{a}_{\text{औसत}}=[\mathbf{v}\,(t_2)-\mathbf{v}\,(t_1)]\,/(t_2-t_1)$

यहाँ 'औसत' का आशय समय अंतराल t_2 व t_1 से संबंधित भौतिक राशि के औसत मान से है।

उत्तर-

a. असत्य

b. सत्य

c. असत्य

d. असत्य

e. सत्य

प्रश्न 24 निम्नलिखित कथन को ध्यानपूर्वक पढिए तथा कारण एवं उदाहरण सहित बताइए कि क्या यह सत्य है या असत्य।

a. अदिश वह राशि है जो-

b. कभी ऋणात्मक नहीं होती।

c. विमाहीन होती है।

d. किसी स्थान पर एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु के बीच नहीं बदलती।

e. अदिश वह राशि है जो-

किसी प्रक्रिया में संरक्षित रहती है।

उत्तर-

a. असत्य

स्पष्टीकरण-

क्योंकि किसी अदिश का किसी प्रक्रिया में संरक्षित रहना आवश्यक नहीं है। उदाहरण के लिए, ऊपर की ओर फेंके गए पिण्ड की गतिज ऊर्जा (अदिश राशि) पूरी यात्रा में बदलती रहती है।

b. असत्य

स्पष्टीकरण-

क्योंकि अदिश राशि ऋणात्मक, शून्य या धनात्मक कुछ भी मान ग्रहण कर सकती है, जैसे किसी वस्तु का ताप एक अदिश राशि है, जो धनात्मक, शून्य या ऋणात्मक कुछ भी हो सकता है।

c. असत्य

स्पष्टीकरण-

उदाहरण के लिए, किसी वस्तु का द्रव्यमान अदिश राशि है परन्तु इसकी विमा (M1) है।

d. असत्य

स्पष्टीकरण-

उदाहरण के लिए ताप एक अदिश राशि है, किसी छड़ में ऊष्मा के एकविमीय प्रवाह में, प्रवाह की दिशा में ताप बदलता जाता है।

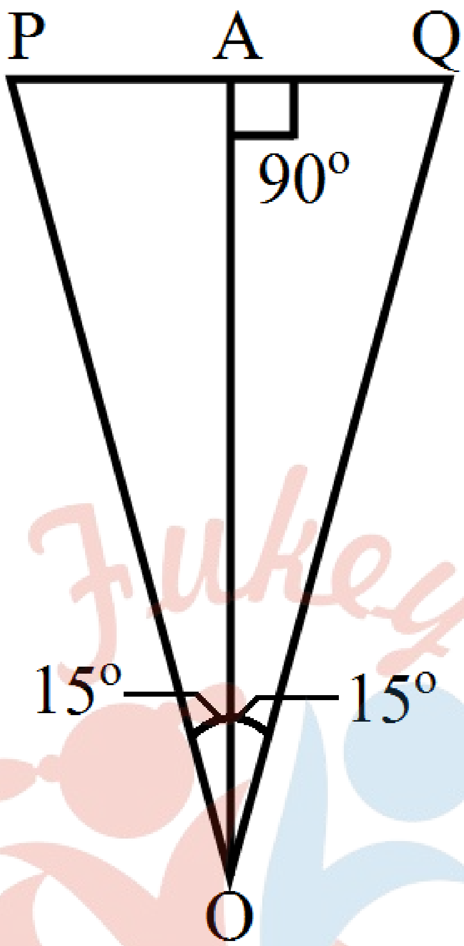
e. सत्य

स्पष्टीकरण-

क्योंकि अदिश राशि में दिशा नहीं होती अतः यह प्रत्येक विन्यास में स्थित दर्शक के लिए समान मान रखती है। उदाहरण के लिए, किसी वस्तु के द्रव्यमान का मान प्रत्येक दर्शक के लिए समान होगा।

प्रश्न 25 कोई वायुयान पृथ्वी से 3400m की ऊँचाई पर उड़ रहा है। यदि पृथ्वी पर किसी अवलोकन बिन्दु पर वायुयान की 10.0s की दूरी की स्थितियाँ 30° का कोण बनाती हैं तो वायुयान की चाल क्या होगी?

उत्तर- माना 10s के अन्तराल पर वायुयान की दो स्थितियाँ क्रमशः P तथा Q हैं, जबकि O प्रेक्षण बिन्दु है।



बिन्दु O से PQ पर लम्ब OA डालते है।

प्रश्नानुसार, वायुयान की पृथ्वी से ऊँचाई OA = 3400m

तथा $\angle POQ = 30^\circ \therefore \ \angle POA = \angle QOA = 15^\circ$

$\therefore \ \tan 15^\circ = \frac{AQ}{OA}$

$AQ = OA \tan 15^\circ$

$\therefore$ 10s में तय दूरी PQ = 2AQ

$= 2AO \tan 15^\circ$

$= 2 \times 3400m \times 0.268$

$= 182.24 ms^{-1}$

$$\text{वायुयान की चाल} = \frac{\text{तय की गई दुरी}}{\text{लगा समय}}$$

$$= \frac{1822.4}{10s} = 182.24ms^{-1}$$

अतिरिक्त अभ्यास (पृष्ठ संख्या 89)

प्रश्न 26 किसी सदिश में परिमाण व दिशा दोनों होते हैं। क्या दिक्स्थान में इसकी कोई स्थिति होती है? क्या यह समय के साथ परिवर्तित हो सकता है? क्या दिक्स्थान में भिन्न स्थानों पर दो बराबर सदिशों a व b का समान भौतिक प्रभाव अवश्य पड़ेगा? अपने उत्तर के समर्थन में उदाहरण दीजिए।

उत्तर- सभी सदिशों की स्थिति नहीं होती। किसी बिन्दु के स्थिति सदिश के समान कुछ सदिशों की स्थिति होती है जबकि वेग सदिश के समान कुछ सदिशों की कोई स्थिति नहीं होती। हाँ, कोई सदिश समय के साथ परिवर्तित हो सकता है, जैसे- गतिमान कण की स्थिति सदिश। आवश्यक नहीं है, उदाहरण के लिए दो अलग-अलग बिन्दुओं पर लगे बराबर बल अलग-अलग आघूर्ण उत्पन्न करेंगे।

प्रश्न 27 किसी सदिश में परिमाण व दिशा दोनों होते हैं। क्या इसका यह अर्थ है कि कोई राशि जिसका परिमाण व दिशा हो, वह अवश्य ही सदिश होगी? किसी वस्तु के घूर्णन की व्याख्या घूर्णन-अक्ष की दिशा और अक्ष के परितः घूर्णन-कोण द्वारा की जा सकती है। क्या इसका यह अर्थ है कि कोई भी घूर्णन एक सदिश है?

उत्तर- किसी राशि में परिमाण तथा दिशी होने पर उसका सदिश होना आवश्यक नहीं है। सदिश होने के लिए किसी राशि में परिमाण तथा दिशा के साथ-साथ उसे सदिश नियमों का पालन भी करना चाहिए। उदाहरण के लिए प्रत्येक घूर्णन कोण एक सदिश राशि नहीं हो सकता। केवल सूक्ष्म घूर्णन को ही सदिश राशि माना जा सकता है।

प्रश्न 28 क्या आप निम्नलिखित्व के साथ कोई संदिश सम्बद्ध कर सकते हैं-

a. किसी लूप में मोड़ी गई तार की लम्बाई।
b. किसी समतल क्षेत्र।
c. किसी गोले के साथ? व्याख्या कीजिए।

उत्तर-

a. नहीं, क्योंकि वृत्तीय लूप में मोड़े गए तार की कोई निश्चित दिशा नहीं होती।

b. हाँ, दिए गए समतल पर एक निश्चित अभिलम्ब खींचा जा सकता है, अत: समतल क्षेत्र के साथ एक सदिश सम्बद्ध किया जा सकता है जिसकी दिशा समतल पर अभिलम्ब के अनुदिश हो सकती।

c. नहीं, क्योंकि किसी गोले का आयतन किसी विशेष दिशा के साथ सम्बद्ध नहीं किया जा सकता।

प्रश्न 29 कोई गोली क्षैतिज से 30° के कोण पर दागी गई है और वह धरातल पर 3.0km दूर गिरती है। इसके प्रक्षेप्य के कोण का समायोजन करके क्या 5.0km दूर स्थित किसी लक्ष्य का भेद किया जा सकता है? गोली की नालमुखी चाल को नियत तथा वायु के प्रतिरोध को नगण्य मानिए।

उत्तर-

यहाँ प्रक्षेप्य कोण $\theta_0 = 30^\circ$

तथा क्षैतिज परास $\mathrm{R} = 3.0$ किमी

$\therefore$ सूत्र $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{u}^2 \cdot \sin 2\theta_0}{\mathrm{g}}$ से,

$$3.0 = \left(\frac{\mathrm{u}^2}{\mathrm{g}}\right) \sin 2 \times 30^\circ$$

$$= \left(\frac{\mathrm{u}^2}{\mathrm{g}}\right) \times \sin 60^\circ$$

$$= \left(\frac{\mathrm{u}^2}{\mathrm{g}}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \frac{\mathrm{u}^2}{\mathrm{g}} = \frac{3 \times 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ किमी

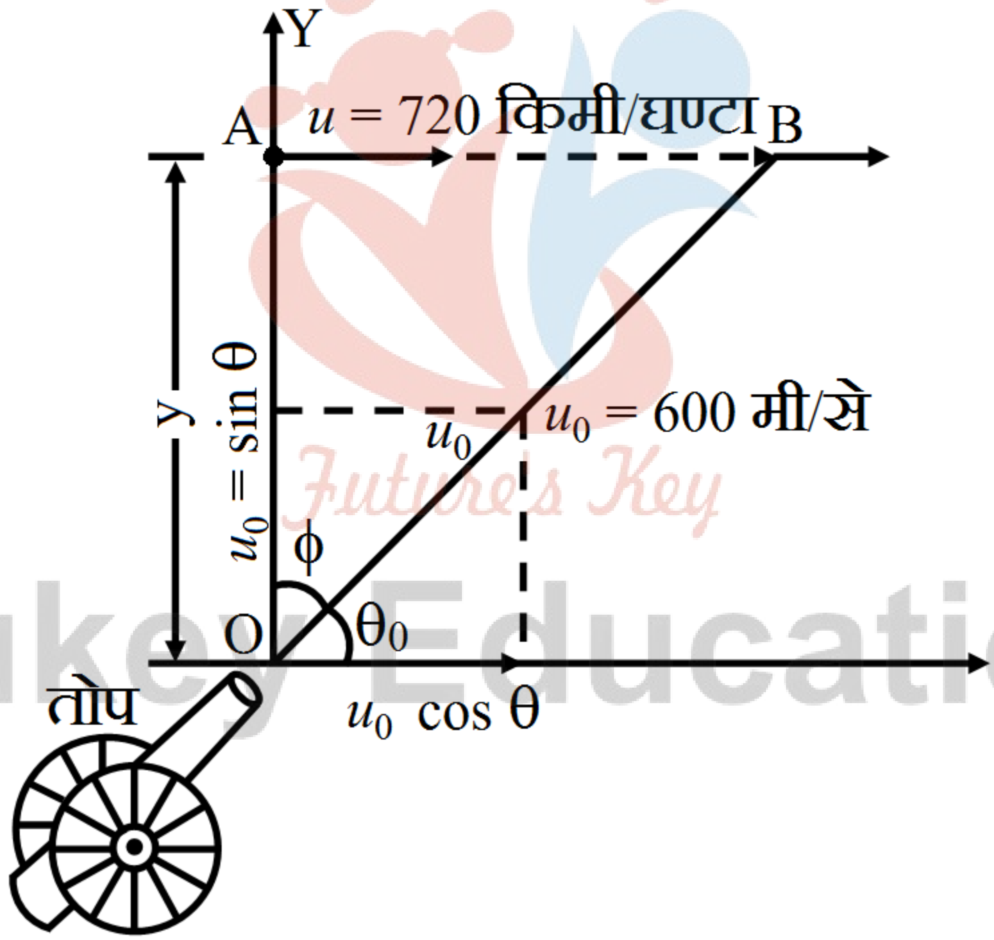
$= 2 \times 1.732$ किमी

$= 3.464$ किमी

परन्तु u के नियत मान के लिए $\frac{u^2}{g}$ महत्तम क्षैतिज परास है। अतः प्रक्षेप्य के कोण को समायोजित करके 5.0 किमी दूर स्थित किसी लक्ष्य को नहीं भेदा जा सकता।

प्रश्न 30 कोई लड़ाकू जहाज 1.5km की ऊँचाई पर 720km/ h की चाल से क्षैतिज दिशा में उड़ रहा है और किसी वायुयान भेदी तोप के ठीक ऊपर से गुजरता है। ऊर्ध्वाधर से तोप की नाल का क्या कोण हो जिससे 600m-s^{-1} की चाल से दागा गया गोला वायुयान पर वार कर सके। वायुयान के चालक को किस न्यूनतम ऊँचाई पर जहाज को उड़ाना चाहिए जिससे गोली लगने से बच सके। (g = 10m-s^{-2})

उत्तर-



लड़ाकू जहाज की ऊँचाई,

Y = 1.5 किमी = 1500 मी

लड़ाकू जहाज की चाल,

U = 720 किमी/ घण्टा

$= \left(720 \times \frac{5}{8}\right)$

= 200 मी/ से

(क्षैतिज दिशा अर्थात X-दिशा में)

तोप से दागे गए गोले की चाल, u_0 = 600 मी-से$^{-1}$ माना गोले के वेग $\vec{u_0}$ की दिशा क्षैतिज से θ_0 कोण पर है। माना O पर तोप से दागा गया गोला इसके ठीक ऊपर लड़ाकू जहाज की स्थिति A से t सेकण्ड में जहाज की स्थिति B में पहुँचने पर वार करता है।

अतः जहाज द्वारा चली क्षैतिज दूरी = गोले का क्षैतिज दिशा में विस्थापन

$$\therefore\ u \times t = v_0 \cos\theta_0 \times t$$

अथवा $\cos\theta_0 = \frac{u}{u_0} = \left(\frac{200 m/sec}{600 m/sec}\right) = \frac{1}{3} = 0.3333$

$$\therefore\ \theta_0 = \cos^{-1}(0.3333) = 70.5^\circ$$

अत: ऊर्ध्वाधर से तोप की नाल का कोण

$$\theta = 90^\circ - \theta_0 = 90^\circ - 70.5^\circ = 19.5^\circ$$

गोले के वार से बचने के लिए वायुयान चालक को वायुयान को गोले द्वारा Y दिशा में प्राप्त अधिकतम ऊँचाई पर उड़ाना चाहिए। यही इसकी न्यूनतम ऊँचाई होगी।

अतः न्यूनतम ऊँचाई,

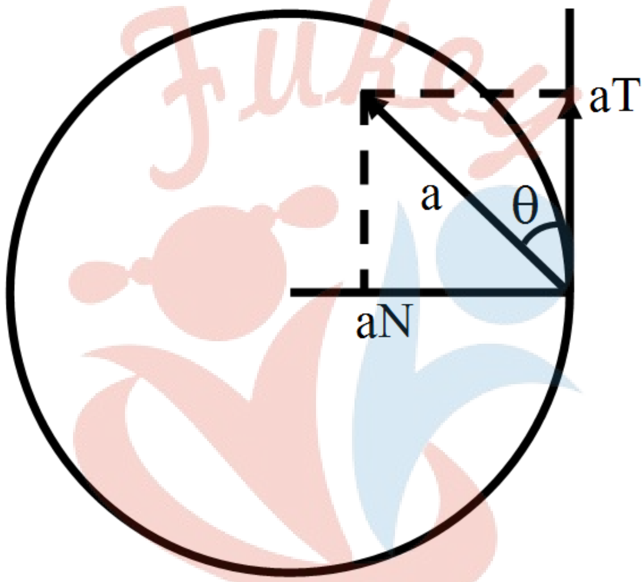
$$H_M = \frac{(u_0)^2 \sin^2\theta_0}{2g} = \frac{(u_0)^2(1 - \cos^2\theta_0)}{2g}$$

$$H_M = \frac{(600)^2 \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]}{2 \times 10}$$

H_M = 16000 मी 16 किमी.

प्रश्न 31 एक साइकिल सवार 27km/ h की चाल से साइकिल चला रहा है। जैसे ही सड़क पर वह 80m त्रिज्या के वृत्तीय मोड़ पर पहुँचता है, वह ब्रेक लगाता है और अपनी चाल को 0.5m/ s की एकसमान दर से कम कर लेता है। वृत्तीय मोड़ पर साइकिल सवार के नेट त्वरण का परिमाण और उसकी दिशा निकालिए।

उत्तर-



दिया है, साइकिल सवार की चाल $v = 27\text{km}/\text{h} = 27 \times \frac{5}{18}\text{m-s}^{-1} = 7.5\text{m-s}^{-1}$

वृत्तीय पथ की त्रिज्या R = 80m

ब्रेक लगाने पर सवार का स्पर्श रेखीय मंदन $a_T = 0.5\text{m-s}^{-2}$

साइकिल सवार का अभिकेन्द्र त्वरण,

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{7.5 \times 7.5}{80} = 0.703\text{m-s}^{-2}$$

$\therefore$ साइकिल सवार का नेट त्वरण $a = \sqrt{(a_N)^2 + (a_T)^2}$

$$= \sqrt{[(0.70)^2 + (0.50)^2]}$$

$$= 0.86\text{m-s}^{-2}$$

माना परिणामी त्वरण की दिशा स्पर्श रेखीय दिशा से θ कोण बनती है, तब

$$\tan\theta = \frac{a_N}{a_T} = \frac{0.70}{0.50} = 1.4$$

$$\therefore \ \theta = \tan^{-1}(1.4) = 54.5^\circ$$

प्रश्न 32

a. सिद्ध कीजिए कि किसी प्रक्षेप्य के x-अक्ष तथा उसके वेग के बीच के कोण को समय के फलन के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं-

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 - gt}{v_{0x}}\right)$$

b. सिद्ध कीजिए कि मूल बिंदु से फेंके गए प्रक्षेप्य कोण का मान $\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{4h_m}{R}\right)$ होगा। यहाँ प्रयुक्त प्रतीकों के अर्थ सामान्य हैं।

उत्तर-

a. माना कोई प्रक्षेप्य मूलबिन्दु से इस प्रकार फेंका जाता है कि उसके वेग के x-अक्ष तथा y-अक्षों की दिशाओं में वियोजित घटक क्रमश: V_0x तथा V_0y हैं।

माना t समय पश्चात् प्रक्षेप्य बिन्दु P पर पहुँचता है, जहाँ उसको स्थिति सदिश $\overset{r}{\rightarrow}(t)$ है।

तब $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$= \left(v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}\right) + \frac{1}{2}(0\hat{i} - g\hat{j})t^2 \left[\because a_x = 0 \text{ तथा } a_y = -g\right]$

$\therefore$ वेग $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}\right) + \frac{1}{2}\left(-g\hat{j}\right) \times 2t$

$= v_{0x}\hat{i} + \left(v_{0y} - gt\right)\hat{j}$

$\therefore$ t समय पर प्रक्षेप्य के अक्षों की दिशाओं में वेग क्रमशः $v_{tx} = v_{0x}$ तथा $v_{ty} = v_{0y} - gt$ है।

समय का वेग की दिशा द्वारा x-अक्ष से बनाया गया कोण

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{v_{0y} - gt}{v_{0x}}\right)$$

b. मूलबिंदु से फेंके गए प्रक्षेप्य का परास,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$ जहाँ θ_0 प्रक्षेप्य कोण है।

जबकि महत्तम ऊँचाई $h_m = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$

$$\therefore \quad \frac{4h_m}{R} = \frac{4v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \times \frac{g}{v_0^2 \sin^2 \theta_0} = \tan\theta_0$$

$\therefore$ प्रक्षेप्य कोण $\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{4h_m}{R}\right)$