गणित

अध्याय-3: त्रिकोणमितीय फलन

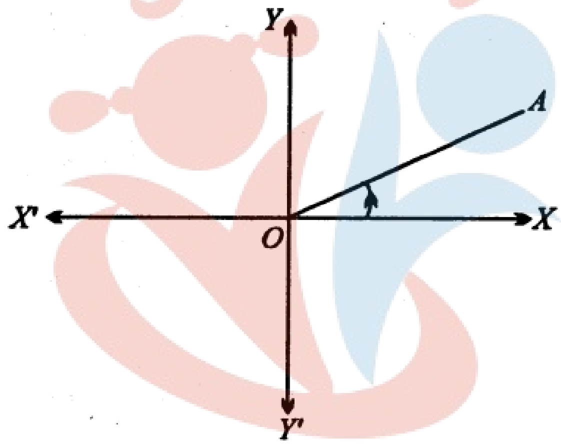
Fukey Education

त्रिकोणमिती (Trigonometry)

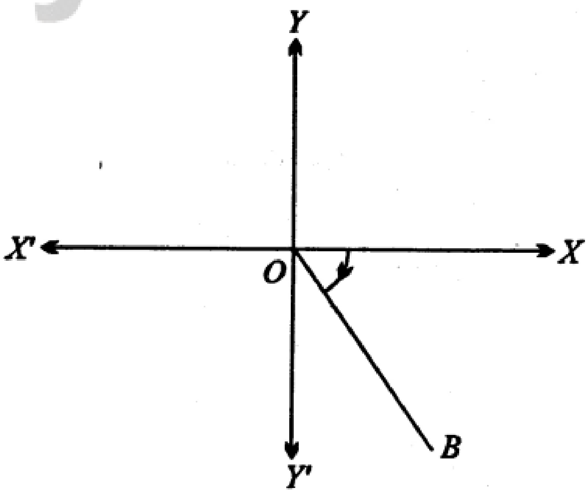
यह शब्द ग्रीक भाषा के शब्द 'trigonon' जिसका अर्थ है त्रिभुज (triangle) तथा 'metron' जिसका अर्थ है माप (measure) से मिलकर बना है। इस प्रकार त्रिकोणमिति शब्द का अर्थ त्रिभुजों का मापन है। शाब्दिक अर्थ के अनुसार, त्रिकोणमिति गणितशास्त्र की वह शाखा है जो त्रिभुजों की माप का वर्णन करती है। त्रिकोणमिति का मुख्य उपयोग त्रिभुजों का हल ज्ञात करने में किया जाता है।

कोण (Angle)

एक ही समतल में किसी परिक्रामी रेखा के उसकी प्रारम्भिक स्थिति से अन्तिम स्थिति तक के घूर्णन को कोण कहते हैं। ये धनात्मक या ऋणात्मक होते हैं।



यदि परिक्रामी रेखा OA आदि रेखा OX से वामावर्त (anticlockwise) घूमकर कोण XOA का निर्माण करती है, तो इसे धनात्मक कोण कहते हैं और यदि परिक्रामी रेखा OB आदि रेखा OX से दक्षिणावर्त (clockwise) घूमकर कोण XOB का निर्माण करती है, तो इसे ऋणात्मक कोण कहते हैं।



कोणो की माप (Measurement of Angles)

कोण मापन की निम्न तीन पद्धतियाँ हैं

(i) षष्टिक पद्धति (Sexagesimal System)

(ii)शतिक पद्धति (Centesimal System)

(iii) वृत्तीय पद्धति (Circular System)

(i) षष्टिक पद्धति (Sexagesimal System)- इस पद्धति में एक समकोण को 90 बराबर भागों में विभाजित किया जाता है तथा इस प्रकार प्राप्त एक भाग को एक अंश या डिग्री कहा जाता है। एक अंश के 60 बराबर भाग किये जाते हैं जो कला (minutes) कहलाते हैं। कला के पुनः 60 बराबर भाग किये जाते हैं जो विकला (seconds) कहलाते हैं। इस प्रकार,

60 विकला (60") = 1 कला (1)

60 कला (60) = 1 अंश (1°)

90° अंश (90°) = 1 समकोण।

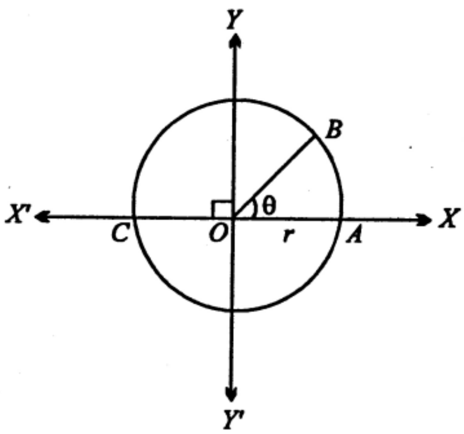
(ii)शतिक पद्धति (Centesimal System)- कोण मापने की शतिक पद्धति में एक समकोण को 100 बराबर भागों में बाँटा जाता है तथा इस प्रकार प्राप्त एक भाग को एक ग्रेड (grade) कहा जाता है। एक ग्रेड को 100 भागों में विभाजित किया जाता है तथा प्रत्येक भाग को कला या मिनट कहते हैं। मिनट के 100 वें भाग को विकला या सेकण्ड कहा जाता है। इस प्रकार,

100 विकला (100") = 1 कला (1')

100 कला (100') = 1 ग्रेड (1^g)

100 ग्रेड (100^g) = 1 समकोण।

(iii) वृत्तीय पद्धति (Circular System)- वृत्तीय पद्धति में कोण मापने का मात्रक रेडियन है।



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

कार्तीय समतल में मूलबिन्दु O को केन्द्र मानकर r त्रिज्या का एक वृत्त खींचा। वृत्त की परिधि के किसी बिन्दु A से त्रिज्या r के तुल्य लम्बाई का चाप AB काटकर OB को मिलाया। इस प्रकार केन्द्र O पर बने कोण AOB को एक रेडियन कहते हैं। दूसरे शब्दों में, किसी वृत्त के केन्द्र पर उसकी त्रिज्या के बराबर लम्बाई के चाप द्वारा अन्तरित कोण का परिमाण एक रेडियन है। एक रेडियन को 1^c द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

यदि चाप की लम्बाई AB = s हो, तो उसके द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण का परिमाण $\theta = \frac{s}{r}$ रेडियन होता है।

अतः वृत्त के केन्द्र पर बना कोण $= \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$

वृत्त की परिधि की लम्बाई $2\pi r$ होती है। यदि वृत्त की परिधि को वृत्त की त्रिज्या के बराबर भागों में विभाजित किया जाये तो,

कुल भागों की संख्या $= \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

अत: वृत्त की परिधि द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बने कोण का मान 2π रेडियन होता है।

हम जानते हैं कि वृत्त की परिधि वत्त के केन्द्र पर 4 समकोण का कोण बनाती है।

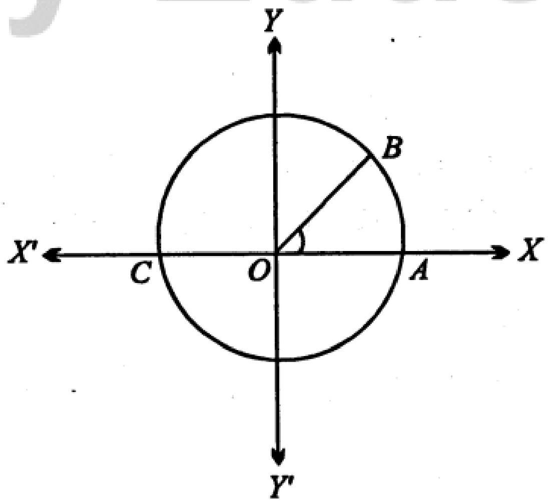
$\therefore$ **2π रेडियन = 4 समकोण या 360°**

$\Rightarrow$ **1 रेडियन $= \frac{4}{2\pi}$ समकोण या $\frac{360^\circ}{2\pi}$**

$= \frac{2}{\pi}$ समकोण या $57^\circ 17' 40''$ (लगभग)

अथवा π रेडियन = 2 समकोण = 180°.

रेडियन एक अचर कोण है (Radian is a Constant Angle)



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

कार्तीय समतल में मूलबिन्दु 0 को केन्द्र मानकर त्रिज्या का एक वृत्त खींचा तथा इस वृत्त की परिधि पर तीन बिन्दु A, B,C इस प्रकार लिया कि

$\angle AOB$ = 1 रेडियन

और $\angle AOC$ = 2 समकोण

हम जानते हैं कि किसी वृत्त में उसके केन्द्र पर बना कोण, कोण के सम्मुख चाप की लम्बाई के समानुपाती होता है।

$$\therefore \quad \frac{\angle AOB}{\text{चाप } AB} = \frac{\angle AOC}{\text{चाप } ABC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 \text{ रेडियन}}{r} = \frac{2 \text{ समकोण}}{\pi r}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \text{ रेडियन} = \frac{2 \text{ समकोण} \times r}{\pi r}$$

$$= \frac{2 \text{ समकोण}}{\pi} = \text{अचर राशि।}$$

अतः रेडियन एक अचर कोण है।

उदाहरण

उदाहरण: एक वृत्त का व्यास 50 सेमी है। उसकी 11 सेमी लम्बाई के चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण का परिमाण डिग्री में ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है, वृत्त का व्यास $2r = 50$ सेमी

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या $r = 25$ सेमी

11 सेमी लम्बाई के चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण (रेडियन में) $= \frac{s}{r} = \frac{11}{25}$.

$\because \quad \pi$ रेडियन $= 180^\circ$

$$\Rightarrow \quad 1 \text{ रेडियन} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\therefore \quad \frac{11}{25} \text{ रेडियन} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{11}{25}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \frac{180^o}{22} \times 7 \times \frac{11}{25}$$

$$= 25^o 12'.$$

उदाहरण: किसी वृत्त की त्रिज्या 48 सेमी है। इसकी परिधि पर 3 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त का तार रखा जाता है। तार द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण का मान अंशों में ज्ञात कीजिए।

हल:

हल : 3 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि $= 2\pi \times 3$ सेमी

तार की लम्बाई $= 2\pi \times 3$ सेमी

बड़े वृत्त की त्रिज्या $= 48$ सेमी

$\therefore$ तार द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बना कोण $= \frac{2\pi}{48} \times 3$

$= \frac{\pi}{8}$ रेडियन $= \frac{180^o}{8}$

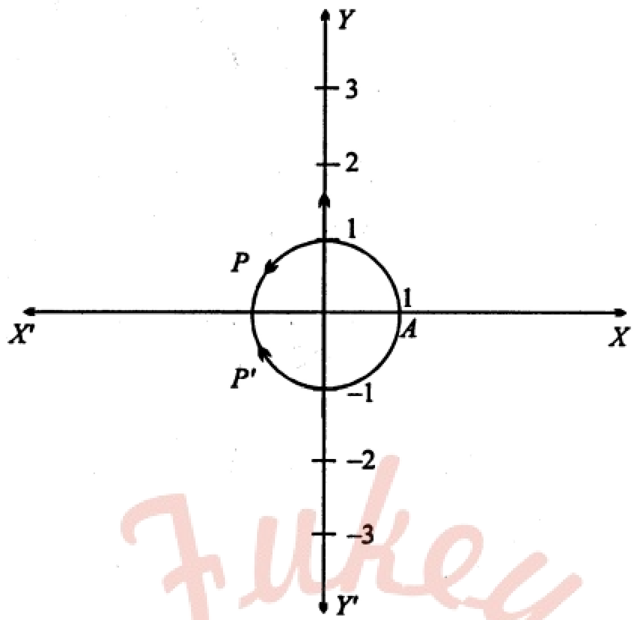
$= 22{\cdot}5^o = 22^o 30'.$

इकाई वृत्त की सहायता से त्रिकोणमितीय फलनों की परिभाषा

निर्देशांक समतल में एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र मूलबिन्दु 0 है तथा वृत्त की त्रिज्या को इकाई मानकर एक संख्या रेखा (Number line) खींचिए जैसा कि चित्र में प्रदर्शित किया गया है।

माना कि X-अक्ष और इकाई वृत्त का प्रतिच्छेद बिन्दु A है। तब A को स्थिर मानकर संख्या रेखा YAY' पर किसी संख्या x के लिए वृत्त पर बिन्दु A से P की दूरी को x माना जा सकता है। यदि धन है तो दूरी को इकाई वृत्त के साथ वामावर्त दिशा (Anticlockwise direction) में तथा x ऋण है, तो इसे दक्षिणावर्त दिशा (Clockwise direction) में नापा जाता है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



स्पष्ट है कि प्रत्येक वास्तविक संख्या x के संगत वृत्त पर एक बिन्दु P(x) सम्बन्धित किया जा सकता है। इस प्रकार, हम एक फलन P:x→P(x) प्राप्त करते हैं जिसका डोमेन वास्तविक संख्याओं का और परिसर इकाई त्रिज्या के वृत्त पर स्थित बिन्दुओं का समुच्चय है।

माना कि वास्तविक संख्या x के संगत इकाई वृत्त पर बिन्दु P(x,y) है। तब, त्रिकोणमिति फलनों को हम निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं :

(i) ज्या फलन (Sine Function): क्रमित युग्मों (x, Y) का समुच्चय है जो प्रत्येक वास्तविक संख्या x को बिन्दु P की कोटि Y से सम्बन्धित करता है। इस प्रकार,

$\sin x = Y, \ \forall x \in R$

जहाँ R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

ज्या फलन का डोमेन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा परिसर -1 से 1 तक की सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

(ii) कोज्या फलन (Cosine Function): यह क्रमित युग्मों (x, X) का समुच्चय है जो प्रत्येक संख्या x को बिन्दु P के भुजा X से सम्बन्धित करता है, अर्थात्

$\cos x = X, \ \forall x \in R$

कोज्या फलनों के डोमेन और परिसर वही हैं जो क्रमशः ज्या फलनों के डोमेन और परिसर हैं।

(iii) स्पर्शज्या फलन (Tangent Function) : यह क्रमित युग्मों $\left(x \frac{Y}{X}\right)$ का समुच्चय है जो प्रत्येक $x \in R$ को संख्या $\frac{Y}{X}$ से सम्बन्धित करता है। इस प्रकार, यदि $X \neq 0$ तो,

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\tan x = \frac{Y}{X}$$

$$\text{स्पष्टतः } \tan x = \frac{Y}{X} = \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ यदि } \cos x \neq 0.$$

सर्वसमिका (Identity)

हम जानते हैं कि $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ एक समीकरण है, इसे बीजीय समीकरण कहते हैं। यह समीकरण a और b (जो बीजीय राशियाँ हैं) के प्रत्येक मान के लिए सत्य है, ऐसा समीकरण सर्वसमिका कहलाता है।

"जब कोई समीकरण उसमें आने वाली अज्ञात राशि अथवा राशियों के सभी मानों के लिए सत्य होता है, तो उसे सर्वसमिका कहते हैं।"

इसी प्रकार, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ भी एक सर्वसमिका है क्योंकि यह θ के प्रत्येक मान के लिए सत्य है। यह त्रिकोणमितीय सर्वसमिका कहलाती है। अन्य त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं के उदाहरण नीचे दिये गये हैं:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta},$$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ आदि।

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को सिद्ध करने के लिए हम उसके किसी एक पक्ष को, विशेषतः वह पक्ष जो अधिक कठिने प्रतीत हो, सूत्रों की सहायता से दूसरे पक्ष में रूपान्तरित कर देते है।

कभी-कभी दोनों पक्षों को अलग-अलग लेकर चलना पड़ता है तथा दोनों में से प्रत्येक को एक ही सुविधाजनक रूप से रूपान्तरित किया जाता है।

अब हम कुछ सर्वसमिकाओं पर विचार करेंगे।

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2$

(iii) $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2$

यहाँ हम इन सूत्रों को सिद्ध करेंगे।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

माना कि ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle CAB = \theta$,
तब पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2 = (\text{कर्ण})^2$$

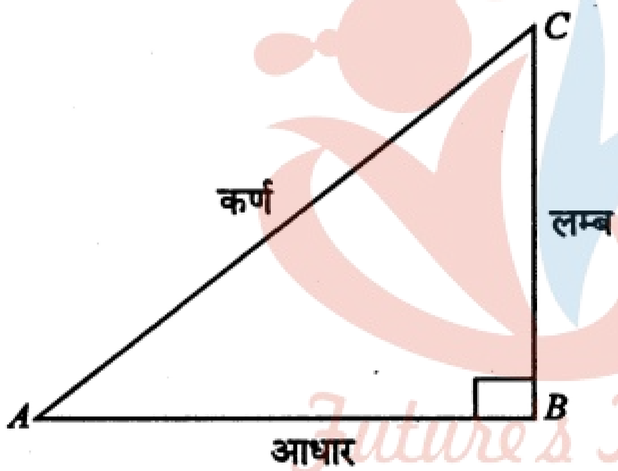
$$\Rightarrow \quad (BC)^2 + (AB)^2 = (AC)^2 \quad \ldots(1)$$

(i) समी. (1) के दोनों पक्षों में $(AC)^2$ से भाग देने पर,

$$\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}.$$

(ii) समी. (1) के दोनों पक्षों में $(AB)^2$ से भाग देने पर,



$$\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AB}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1}.$$

(iii) समी. (1) के दोनों पक्षों में $(BC)^2$ से भाग देने पर,

$$\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta}.$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

टिप्पणी : $\sin^2\theta$ का अर्थ है $(\sin\theta)^2$.

इसी प्रकार, $\sin^3\theta$ का अर्थ है $(\sin\theta)^3$ आदि।

उदाहरण-

उदाहरण: सिद्ध कीजिए कि $2\sin^2A + \cos^4A = 1 + \sin^4A$

हल:

बायाँ पक्ष $= 2\sin^2 A + \cos^4 A$

$$= 2\sin^2 A + (1 - \sin^2 A)^2$$

$$= 2\sin^2 A + 1 + \sin^4 A - 2\sin^2 A$$

$$= 1 + \sin^4 A$$

= दायाँ पक्ष। यही सिद्ध करना था।

उदाहरण: सिद्ध कीजिए कि $(\sin A + \cos A)(\tan A + \cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A$.

हल:

बायाँ पक्ष

$$= (\sin A + \cos A)(\tan A + \cot A)$$

$$= (\sin A + \cos A)\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}\right)$$

$$= \frac{(\sin A + \cos A)(\sin^2 A + \cos^2 A)}{\cos A \sin A}$$

$$= \frac{\sin A + \cos A(1)}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{\sin A}{\sin A \cos A} + \frac{\cos A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\sin A}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$= \sec A + \operatorname{cosec} A =$ दायाँ पक्ष।

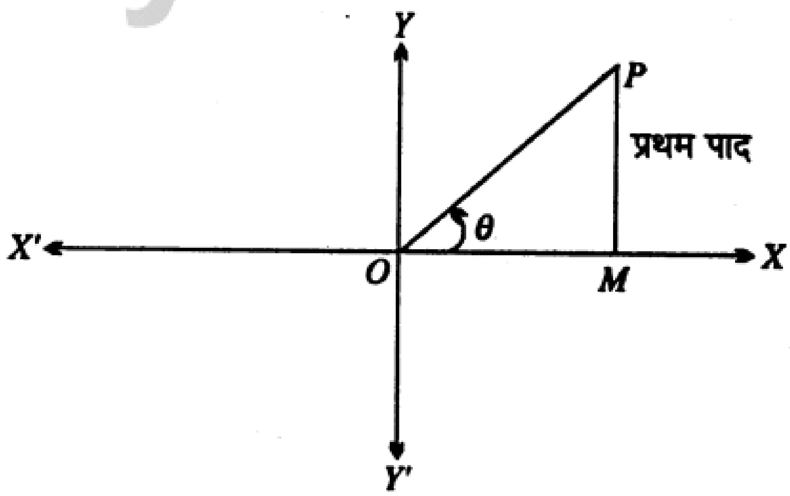
यही सिद्ध करना था।

एक महत्वपूर्ण सारणी

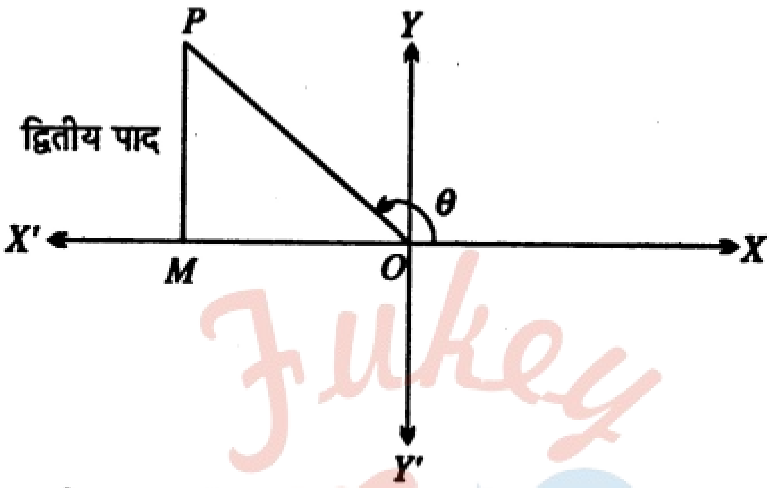
कोण→ त्रिकोणमितीय θ↓ अनुपात	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sine	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cosine	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tangent	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cotangent	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
secant	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1
cosecant	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞

त्रिकोणमितीय अनुपातो के चिन्ह

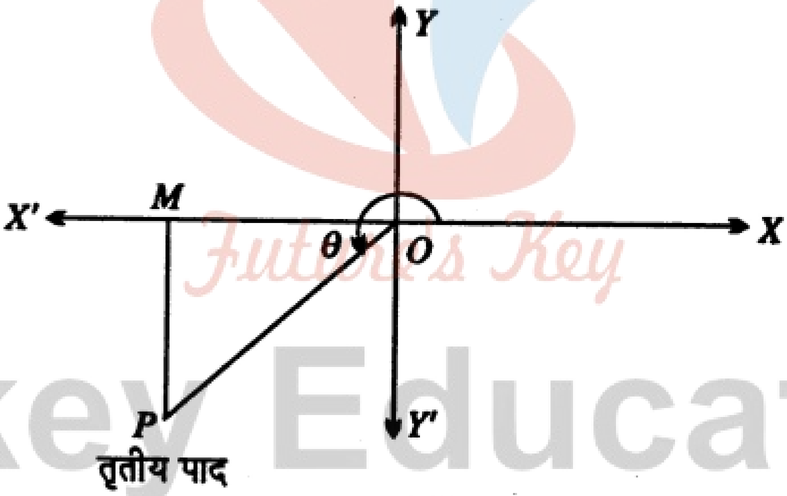
चिन्हों की परिपाटी से स्पष्ट है कि जब θ प्रथम पाद में स्थित है, तब लम्ब PM और आधार OM दोनों धन है। चूंकि कोण बनाने वाली रेखा OP को सदैव धन ही लिया जाता है अतः प्रथम पाद में प्रत्येक कोण जो 0° और 90° के बीच में होता है, के त्रिकोणमितीय अनुपात धन होते हैं।

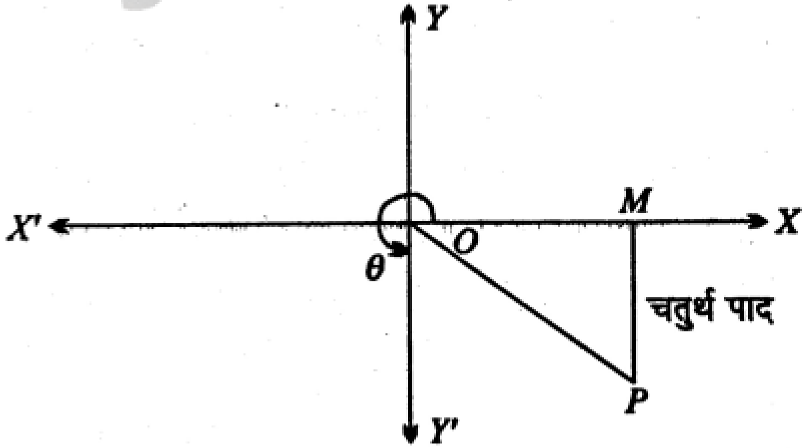


जब कोण θ दूसरे पाद में स्थित है अर्थात θ का मान 90° और 180°के बीच में है, तब तो लम्ब PM धन और आधार OM ऋण होगा। चूँकि OP धन है, अतएव sine θ और cosec θ धन होंगे तथा शेष अनुपात cos θ, tan θ, sec θ और cot θ ऋण होंगे।



जब कोण θ तृतीय पाद में स्थित है अर्थात् जब 8 का मान 180° और 270° के बीच में है, तब लम्ब PM और आधार OM दोनों ऋण हैं। फलस्वरूप tan θ और cot θ दोनों धन होंगे और शेष अनुपात sin θ,cos θ,cosec θ और sec θ ऋण होंगे।





Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

यदि कोण θ चतुर्थ पाद में स्थित है अर्थात् θ का मान 270° और 360° के बीच में है, तब OM धन और लम्ब PM ऋण होगा। अतएव cos θ और sec θ धन तथा शेष अनुपात sinθ, tanθ,cosecθ और cotθ ऋण होंगे।

अतः त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिन्ह चारों पादों में निम्न प्रकार हैं:

कोण (-θ) के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त करना

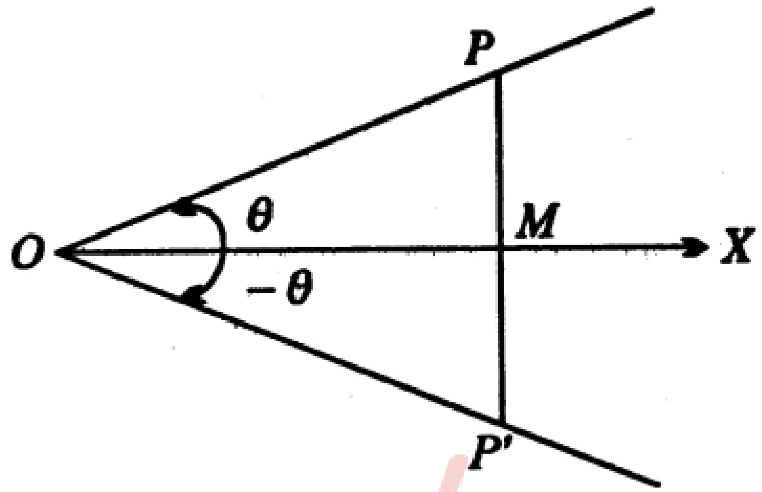
माना कि परिक्रामी रेखा OP प्रारम्भिक रेखा Ox से धन दिशा में कोण θ बनाती है और ऋण दिशा में (OP स्थिति में) कोण (-θ) बनाती है। तब,

∠XOP = θ और ∠XOP' = - θ

अब PP' को मिलाया जो OX को बिन्दु M पर काटती है। स्पष्ट है कि MP और MP' परिमाण में बराबर किन्तु चिन्ह में विपरीत होंगे तथा ज्यामितीय से, समकोण त्रिभुज OMP और OMP' सर्वांगसम होंगे।

अतः त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषा से,

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



$$\sin(-\theta)=\frac{MP'}{OP'}=\frac{-MP}{OP}=-\left(\frac{MP}{OP}\right)=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos\theta$$

$$\tan(-\theta)=\frac{MP'}{OM}=\frac{-MP}{OM}=-\left(\frac{MP}{OM}\right)=-\tan\theta$$

$$\cot(-\theta)=\frac{OM}{MP'}=\frac{OM}{-MP}=-\left(\frac{OM}{MP}\right)=-\cot\theta$$

$$\sec(-\theta)=\frac{OP'}{OM}=\frac{OP}{OM}=\sec\theta$$

और $\operatorname{cosec}(-\theta)=\frac{OP'}{MP'}=\frac{OP}{-MP}$

$$=-\left(\frac{OP}{MP}\right)=-\operatorname{cosec}\theta.$$

टिप्पणी: ऊपर दिये हुए चित्र में सुविधा के लिये θ को न्यूनकोण मान लिया गया है। किन्तु उपर्युक्त फल θ के सभी मानों के लिए सत्य हैं।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

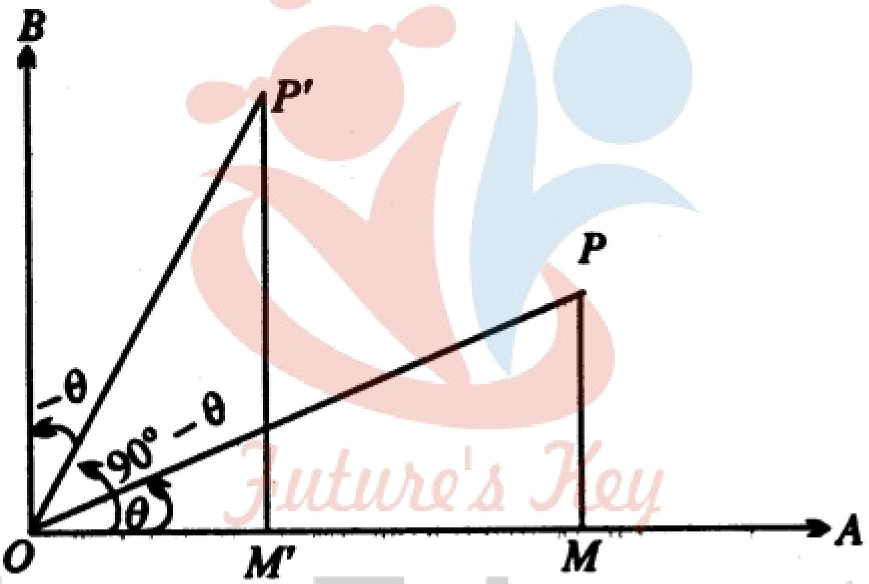
कोण (90°-θ) के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त करना

माना कि परिक्रामी रेखा OP, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OA से धन दिशा (वामावर्त) में घूमकर $\angle POA = \theta$ बनाकर OP पर रुक जाती है।

पुनः माना कि परिक्रामी रेखा OP, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OA से पहले धन दिशा में घूमकर $\angle BOA = 90°$ बनाती है और फिर ऋण दिशा में घूमकर परिमाण में θ के बराबर $\angle BOP'$ बनाकर अपनी नयी स्थिति OP' पर आकर रुक जाती है। तब,

$\angle AOP' = 90° - \theta$

माना कि $OP=OP'$



बिन्दु P और P' से OA पर क्रमशः PM और $P'M'$ लम्ब डाले।

अब ΔPOM और $\Delta P'OM'$ में,

$$OP = OP'$$

$$\angle PMO = \angle P'M'O, \quad \text{(प्रत्येक कोण} = 90°)$$

तथा $$\angle POM = \angle OP'M', \quad \text{(प्रत्येक कोण} = \theta)$$

$\therefore$ $$\Delta POM \cong \Delta OP'M'$$

$\therefore$ $$OM = P'M' \text{ तथा } PM = OM'$$

अतः त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषा से,

Fukey Education

अतः त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषा से,

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{OM}{PM} = \cot\theta$$

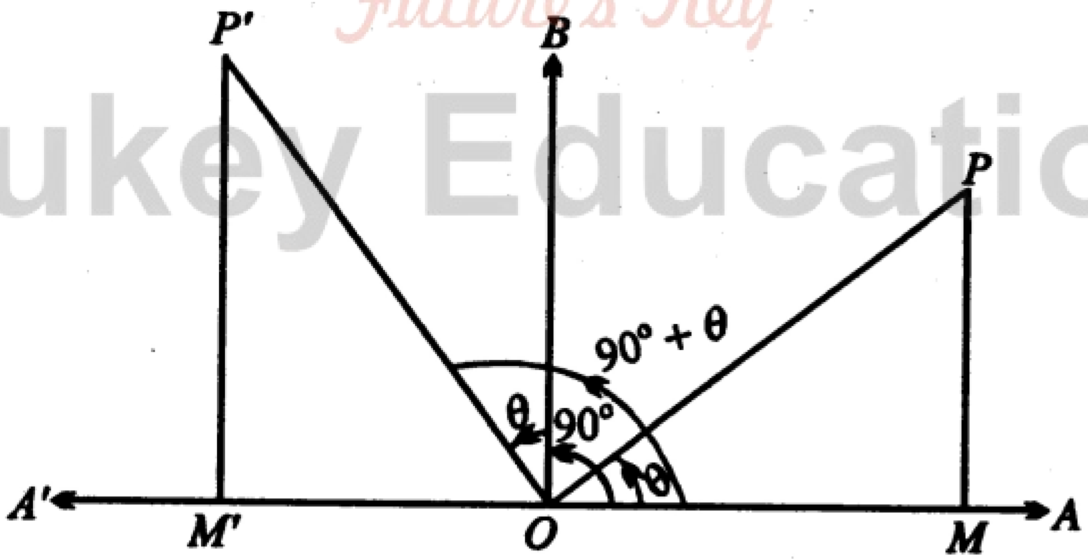
$$\cot(90^\circ - \theta) = \frac{OM'}{M'P'} = \frac{MP}{OM} = \tan\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \frac{OP'}{M'P'} = \frac{OP}{OM} = \sec\theta$$

और $\sec(90^\circ - \theta) = \frac{OP'}{OM'} = \frac{OP}{OM} = \operatorname{cosec}\theta.$

त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त करना

माना कि कोई परिक्रामी रेखा OA. अपनी प्रारम्भिक स्थिति OA से धन दिशा (वामावर्त) में घूमकर ∠POA=θ कोण बनाकर OP पर स्थिर हो जाती है।



Fukey Education

पुनः माना कि परिक्रामी रेखा OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OA से धन दिशा (वामावर्त) में पहले ∠BOA = 90° से घूमकर OB स्थिति पर आती है तथा फिर धन दिशा में ∠P'OB = θ से पुनः घूमकर अन्त में OP' स्थिति पर आती है। तब,

∠P'OA = 90° + θ

माना कि $OP = OP'$

बिन्दु P व P' से OA (अथवा बढ़ायी गयी OA) पर क्रमशः लम्ब PM और $P'M'$ डाले।

अब ΔPOM और $\Delta P'OM'$ में,

$$OP = OP'$$

$$\angle PMO = \angle P'M'O, \quad (\because \text{प्रत्येक कोण} = 90^\circ)$$

$$\angle POM = \angle OP'M', \quad (\because \text{प्रत्येक कोण} = \theta)$$

$\therefore$ $$\Delta POM \cong \Delta OP'M'$$

$\therefore$ $$PM = -OM' \text{ तथा } OM = P'M'$$

अतः त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषा से,

$$\sin(90^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-MP}{OP} = -\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{OM}{-MP} = -\cot\theta$$

$$\cot(90^\circ + \theta) = \frac{OM'}{M'P'} = \frac{-MP}{OM} = -\tan\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \frac{OP'}{M'P'} = \frac{OP}{OM} = \sec\theta$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

और $\sec(90^\circ+\theta)=\dfrac{OP'}{OM'}=\dfrac{OP}{-MP}=-\text{cosec}\theta.$

कोण (n.360°±θ) के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण θ के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त करना

हम जानते हैं कि यदि कोई परिक्रामी रेखा अपनी प्रारम्भिक स्थिति से +θ या -θ कोण से घूमकर, पुनः एक पूरा चक्कर (1.360°), दो पूरे चक्कर (2.360°), तीन पूरे चक्कर (3.360°), ...धन/ऋण दिशा में लगाये, तो उसकी अपनी पूर्व स्थिति में कोई परिवर्तन नहीं होता है। फलस्वरूप, कोण (n.360°±θ) के त्रिकोणमितीय अनुपात वही होंगे जो ±θ के हैं, जहाँ n एक पूर्णांक संख्या (धन/ऋण) है।

अतः

$$\sin(n.360^\circ+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(n.360^\circ+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(n.360^\circ+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(n.360^\circ+\theta)=\cot\theta$$
$$\text{cosec}(n.360^\circ+\theta)=\text{cosec}\theta$$
$$\sec(n.360^\circ+\theta)=\sec\theta$$

तथा

$$\sin(n.360^\circ-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(n.360^\circ-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(n.360^\circ-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(n.360^\circ-\theta)=\cot(-\theta)=-\cot\theta$$
$$\text{cosec}(n.360^\circ-\theta)=\text{cosec}(-\theta)=-\text{cosec}\theta$$
$$\sec(n.360^\circ-\theta)=\sec(-\theta)=\sec\theta.$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उदाहरण-

उदाहरण: निम्न के मान ज्ञात कीजिए:

(i) sin (-1485°)

(ii) cos (390°)

(iii) tan (330°)

हल:

(i) $\sin(-1485^\circ) = -\sin(1485^\circ)$,

$[\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$

$= -\sin(4.360^\circ + 45^\circ)$

$= -\sin 45^\circ$,

$[\because \sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta]$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$. उत्तर

(ii) $\cos(390^\circ) = \cos(360^\circ + 30^\circ)$

$= \cos 30^\circ, [\because \cos(2\pi + \theta) = \cos\theta]$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$. उत्तर

(iii) $\tan(330^\circ) = \tan(360^\circ - 30^\circ)$

$= \tan(-30^\circ)$,

$[\because \tan(2\pi - \theta) = \tan(-\theta)]$

$= -\tan 30^\circ$,

$[\because \tan(-\theta) = -\tan\theta]$.

$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$. उत्तर

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

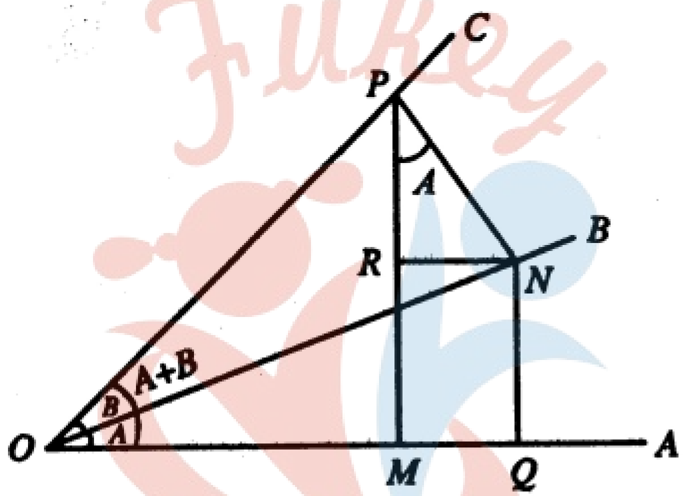
योग सूत्र (Addition Formulae)

(i) sin (A+B) = sinAcosB + cosAsinB

(ii)cos (A+B) = cosAcosB - sinAsinB

(iii) tan(A+B) = $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

सत्यापन: माना कि परिक्रामी रेखा OP, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OA से धन दिशा में घूमकर ∠AOB = A बनाती है। तत्पश्चात् धन दिशा में पुनः घूमकर ∠BOC = B बनाती है और OC की स्थिति में स्थिर हो जाती है। स्पष्ट है कि



∠AOC = A+B. अब OC पर कोई बिन्दु P लिया और P से OA तथा OB पर क्रमशः लम्ब PM तथा PN डाला।

अब चित्र के अनुसार,

पुनः N से PM पर NR तथा OA पर NQ लम्ब डाले। तब,

$$\angle NPR = 90^\circ - \angle PNR$$
$$= \angle RNO = \angle NOA = A.$$

(i) $\sin(A+B) = \sin AOC$

$$= \frac{PM}{OP}$$

$$= \frac{PR+RM}{OP}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \frac{PR}{OP} + \frac{RM}{OP}$$

$$= \frac{PR}{OP} + \frac{NQ}{OP}$$

$$= \frac{PR}{NP} \cdot \frac{NP}{OP} + \frac{NQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP}$$

$$= \cos A \sin B + \sin A \cos B$$

अत: $\boxed{\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B}$

(ii) $\cos(A+B) = \cos AOC$

$$= \frac{OM}{OP}$$

$$= \frac{OQ - MQ}{OP}$$

$$= \frac{OQ - RN}{OP}$$

$$= \frac{OQ}{OP} - \frac{RN}{OP}$$

$$= \frac{OQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{RN}{NP} \cdot \frac{NP}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

अत: $\boxed{\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B}$

(iii) $\tan(A+B) = \tan AOC$

$$= \frac{PM}{OM}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \frac{RM + PR}{OQ - MQ}$$

$$= \frac{NQ + PN\cos A}{OQ - PN\sin A},$$

$$[\because MQ = RN]$$

$$= \frac{\dfrac{NQ}{OQ} + \dfrac{PN}{OQ}\cos A}{1 - \dfrac{PN}{OQ}\sin A},$$

[अंश तथा हर में OQ से भाग देने पर]

$$= \frac{\dfrac{NQ}{OQ} + \dfrac{PN}{OQ} \cdot \dfrac{OQ}{ON}}{1 - \dfrac{PN}{OQ} \cdot \dfrac{NQ}{ON}}$$

$$= \frac{\dfrac{NQ}{OQ} + \dfrac{PN}{OQ}}{1 - \dfrac{NQ}{OQ} \cdot \dfrac{PN}{ON}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

अतः: $\boxed{\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}}$,

विकल्पत : $\tan(A+B) = \dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

$$= \frac{\frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}},$$

[अंश व हर में $\cos A \cos B$ से भाग देने पर]

$$\therefore \quad \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

टिप्पणी : ये सूत्र A और B के सभी मानों के लिए सत्य है।

व्यवकलन सूत्र (Subtraction Formulae)

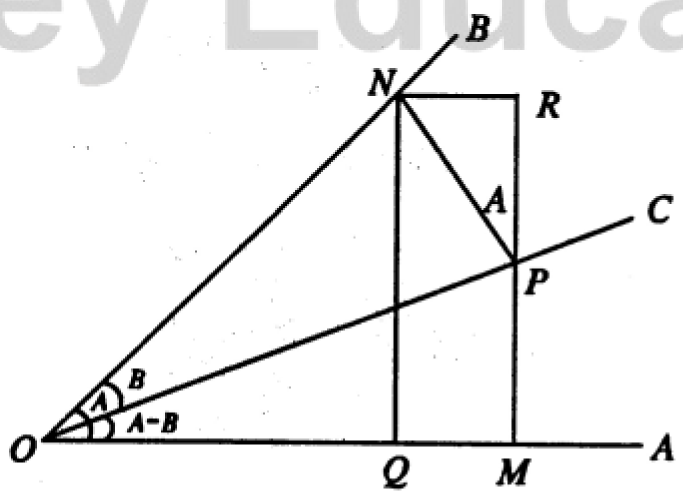
(i) sin(A-B) = sinAcosB - cosAsinB

(ii)cos(A-B) = cosAcosB + sinAsinB

(iii) tan(A-B) = $\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

सत्यापन: माना कि परिक्रामी रेखा OP अपनी प्रारम्भिक स्थिति OA से धन दिशा में घूमकर ∠AOB = A बनाती है। तत्पश्चात् ऋण दिशा में ∠BOC = B बनाती है और OC की स्थिति में स्थिर हो जाती है। स्पष्ट है कि

$$\angle AOC = A - B.$$



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

OC पर कोई बिन्दु P लिया। P से OA तथा OB पर क्रमशः लम्ब PM तथा PN डाले। पुनः N से OA पर NQ तथा बढ़ाई गई रेखा MP पर NR लम्ब डाले। स्पष्टतः

$\angle RPN = 90^\circ - \angle PNR = \angle RNB = \angle QON = A$

अब चित्र के अनुसार,

(i) $\sin(A-B) = \sin AOC$

$$= \frac{PM}{OP} = \frac{RM - RP}{OP}$$

$$= \frac{NQ - RP}{OP}$$

$$= \frac{NQ}{OP} - \frac{RP}{OP}$$

$$= \frac{NQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{RP}{PN} \cdot \frac{PN}{OP}$$

$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

अतः $\boxed{\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B}$

(ii) $\cos(A-B) = \cos AOC$

$$= \frac{OM}{OP}$$

$$= \frac{OQ + QM}{OP}$$

$$= \frac{OQ}{OP} + \frac{QM}{OP} = \frac{OQ}{OP} + \frac{NR}{OP}$$

$$= \frac{OQ}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \frac{NR}{NP} \cdot \frac{NP}{OP}$$

$$= \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

अतः $\boxed{\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

(iii) $$\tan(A-B)=\frac{PM}{OM}$$

$$=\frac{RM-PR}{OQ+MQ}$$

$$=\frac{NQ-PR}{OQ+NR}$$

$$=\frac{NQ-PN\cos A}{OQ+PN\sin A}$$

$$=\frac{\frac{NQ}{OQ}-\frac{PN}{OQ}\cos A}{1+\frac{PN}{OQ}\sin A},$$

[अंश और हर में OQ से भाग देने पर]

$$=\frac{\frac{NQ}{OQ}-\frac{PN}{OQ}\cdot\frac{OQ}{ON}}{1+\frac{PN}{OQ}\cdot\frac{NQ}{ON}}$$

$$=\frac{\frac{NQ}{OQ}-\frac{PN}{OQ}}{1+\frac{NQ}{OQ}\cdot\frac{PN}{ON}},$$

$$=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

अतः $$\boxed{\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

विकल्पत : $\tan(A-B)=\dfrac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$

$$=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}},$$

[अंश और हर में $\cos A\cos B$ से भाग देने पर]

$$=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

टिप्पणी : ये सूत्र A और B के सभी मानों के लिए सत्य है।

सिद्ध कीजिए (Prove that)

(i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$

(ii) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$

सत्यापन : (i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}$

$$=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}},$$

[अंश व हर में $\sin A$ $\sin B$ से भाग देने पर]

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

अतः $\boxed{\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}}$

(ii) $\cot(A-B) = \frac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}$

$$= \frac{\cos A \cos B + \sin A \sin B}{\sin A \cos B - \cos A \sin B}$$

$$= \frac{\frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} + \frac{\sin A \sin B}{\sin A \sin B}}{\frac{\sin A \cos B}{\sin A \sin B} - \frac{\cos A \sin B}{\sin A \sin B}},$$

[अंश व हर में $\sin A \sin B$ से भाग देने पर]

$$= \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

अतः $\boxed{\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}}$

उदाहरण-

उदाहरण: cos 15° का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$A = 45°, B = 30°$ रखने पर,

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°)$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$ **उत्तर**

उदाहरण: tan 105° का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$A = 60^\circ, B = 45^\circ$ रखने पर,

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}.1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{1-3}$$

$$= \frac{3+1+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$= -(2+\sqrt{3}).$$ **उत्तर**

गुणनफलों और योगफलों का पारस्परिक रूपान्तरणः त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

A. गुणनफलों का योग और अन्तर में रूपान्तरण:

हम जानते हैं कि,

sinAcosB + cosAsinB = sin(A+B) ....(1)

तथा sinAcosB - cosAsinB = sin(A-B) ....(2)

अतः समी. (1) व (2) को जोड़ने पर,

2sinAcosB = sin(A+ B)+sin(A-B) ...(3)

पुनः समी. (1) में से समी. (2) को घटाने पर,

2cosAsinB = sin(A+B) - sin(A-B) ...(4)

समी. (3) व (4) की सहायता से हम sine व cosine के गुणनफल को sines के योग व अन्तर के रूप में प्रकट करते हैं।

पुनः हम जानते हैं कि,

cosAcosB - sinAsinB = cos(A+B) ...(5)

तथा cosAcosB + sinAsinB = cos(A-B) ...(6)

अतः समी. (5) व समी. (6) को जोड़ने पर,

2cosAcosB = cos(A+B) + cos(A-B) ...(7)

समी. (6) में से समी. (5) को घटाने पर,

2sinAsinB = cos(A-B) - cos(A+B) ...(8)

समी. (7) व (8) से हम दो cosines व दो sines के गुणनफल को cosines के योग व अन्तर के रूप में प्रकट करते हैं।

B. योग और अन्तर का गुणनफलों में रूपान्तरण:

समी. (3),(4),(7) व (8) को क्रमशः निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

sin(A+B) + sin(A-B) = 2sinAcosB ...(1)

sin(A+B) - sin(A-B) = 2cosAsinB ...(2)

cos(A+B) + cos(A-B) = 2cosAcosB ...(3)

cos(A-B) - cos(A+B) = 2sinAsinB ...(4)

अब मान लिया जाये कि A+B = C तथा A-B = D

तब $A = \frac{C+D}{2}$ तथा $B = \frac{C-D}{2}$

अत:A और B के इन मानों को समी. (1), (2), (3) व (4) में प्रतिस्थापित करने पर हमें क्रमशः निम्न सूत्र प्राप्त होंगे:

$$\boxed{\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}}$$

$$\boxed{\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}}$$

$$\boxed{\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}}$$

$$\boxed{\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}}$$

टिप्पणी : ध्यान रहे कि अन्तिम सूत्र के दायें पक्ष में

$\frac{D-C}{2}$ **है न कि** $\frac{C-D}{2}$.

उदाहरण-

उदाहरण: सिद्ध कीजिए कि-

$$\frac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}.$$

हल:

$$\text{L.H.S.} =\frac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}$$

$$=\frac{(\sin A+\sin 5A)+2\sin 3A}{(\sin 3A+\sin 7A)+2\sin 5A}$$

$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}$ का प्रयोग

करने पर,

$$=\frac{2\sin\frac{A+5A}{2}.\cos\frac{A-5A}{2}+2\sin 3A}{2\sin\frac{3A+7A}{2}.\cos\frac{3A-7A}{2}+2\sin 5A}$$

$$=\frac{\sin 3A\cos 2A+\sin 3A}{\sin 5A\cos 2A+\sin 5A}$$

$$=\frac{\sin 3A(\cos 2A+1)}{\sin 5A(\cos 2A+1)}$$

$$=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}=\text{R.H.S.}$$ यही सिद्ध करना था।

उदाहरण: सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\sin(x-y)+\sin x+\sin(x+y)}{\cos(x-y)+\cos x+\cos(x+y)}=\tan x$$

हल: L.H.S.

$$=\frac{\sin(x-y)+\sin x+\sin(x+y)}{\cos(x-y)+\cos x+\cos(x+y)}$$

$$=\frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)+\sin x}{\cos(x-y)+\cos(x+y)+\cos x}$$

$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}$ तथा

$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}$ का प्रयोग

करने पर,

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$=\frac{2\sin\frac{x-y+x+y}{2}.\cos\frac{x-y-x-y}{2}+\sin x}{2\cos\frac{x-y+x+y}{2}.\cos\frac{x-y-x-y}{2}+\cos x}$$

$$=\frac{2\sin x\cos(-y)+\sin x}{2\cos x\cos(-y)+\cos x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}\left[\frac{2\cos y+1}{2\cos y+1}\right], \quad [\because \cos(-\theta)=\cos\theta]$$

$= \tan x = $ R.H.S. **यही सिद्ध करना था।**

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometrical Identities)

यदि कोई समीकरण उसमें आने वाली अज्ञात राशि अथवा राशियों के प्रत्येक मान से सन्तुष्ट होता है तो वह सर्वसमिका (Identity) कहलाता है। उदाहरण के लिए बीजीय समीकरण

$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$,

a तथा b के सभी वास्तविक मानों के लिए सदैव सत्य है। इसे हम बीजीय सर्वसमिका (Algebraic identity) की संज्ञा प्रदान करते हैं। इसी प्रकार त्रिकोणमितीय समीकरण,

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

A के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए सदैव सत्य है। अतः यह एक त्रिकोणमितीय सर्वसमिका हुई।

यदि कोई सर्वसमिका कुछ प्रतिबन्धों के साथ सत्य हो तो उसे प्रतिबन्धित सर्वसमिका कहते हैं। उदाहरण के लिए यदि $A+B+C = \pi$ हो, तो

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ एक प्रतिबन्धित सर्वसमिका है। हम इसी प्रकार की सर्वसमिकाओं का अध्ययन करेंगे।

त्रिभुज के कोणों A,B,C से सम्बन्धित कुछ त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

(i) $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C$
$$+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C$$
$$-\sin A\sin B\sin C$$

(ii) $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C$
$$-\sin A\sin B\cos C-\sin A\cos B\sin C$$
$$-\cos A\sin B\sin C$$

(iii) $\tan(A+B+C)$
$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan A\tan C-\tan B\tan C}$$

(iv) $\cot(A+B+C)$
$$=\frac{\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A-1}$$

कुछ महत्वपूर्ण सम्बन्ध (Some Important Relations)

प्रतिबन्धित सर्वसमिकाओं से सम्बन्धित प्रश्नों में प्रतिबन्ध A+B+C = π (अथवा अन्य) के दिये होने पर हम कुछ महत्वपूर्ण उपयोगी सम्बन्ध स्थापित कर लेते हैं जिनकी सहायता से प्रश्नों को हम सरलतापूर्वक हल कर सकते हैं। ये नीचे दिये जा रहे हैं:

1. यदि A + B + C = π हो, तो

$\sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C$

$\sin(B+C) = \sin(\pi-A) = \sin A$

$\sin(C+A) = \sin(\pi-B) = \sin B$

$\cos(A+B) = -\cos C$

$\cos(B+C) = -\cos A$

$\cos(C+A) = -\cos B$

$\tan(A+B) = -\tan C$

$\tan(B+C) = -\tan A$

$\tan(C+A) = -\tan B$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

2. यदि A+B+C = $\frac{\pi}{2}$ हो, तो

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$$

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

$$\sin\left(\frac{C+A}{2}\right) = \cos\frac{B}{2}$$

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$$

$$\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$$

$$\cos\left(\frac{C+A}{2}\right) = \sin\frac{B}{2}$$

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$$

$$\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\left(\frac{C+A}{2}\right) = \cot\frac{B}{2}$$

Fukey Education

उदाहरण-

उदाहरण: यदि A + B + C = π हो, तो सिद्ध कीजिए कि-

sin2A + sin2B - sin2C = 4cosAcosBsinC

हल: बायाँ पक्ष = sin2A + sin2B - sin2C

= 2sin(A+B)cos(A-B) - 2sinCcosC

= 2sin(π-C)cos(A-B) -2sinCcosC,

[∵ A+B+C = π]

$= 2\sin C\cos(A-B) - 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

$= 2\sin C.2\cos A\cos B$

$= 4\cos A\cos B\sin C$

= दायाँ पक्ष। यही सिद्ध करना था।

उदाहरण: यदि $A + B + C = \pi$ हो, तो सिद्ध कीजिए-

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1-4\cos A\cos B\cos C$$

हल: बायाँ पक्ष = $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C$

$= 2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 c-1$

$= 2\cos(\pi-C)\cos(A-B)+2\cos^2 c-1,$

$[\because A+B+C=7]$

$=-2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 c-1$

$=-1-2\cos C[\cos(A-B)+\cos C]$

$=-1-2\cos C[\cos(A-B)-\cos\{\pi-(A+B)\}]$

$=-1-2\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$

$=-1-2\cos C.2\cos A\cos B$

$=-1-4\cos A\cos B\cos C$

= दायाँ पक्ष। यही सिद्ध करना था।

त्रिकोणमितीय फलनों के लेखाचित्र

बीजगणित में हम फलन y=f(x) से परिचित हैं जो स्वतन्त्र चर x तथा आश्रित चर y के बीच सम्बन्ध दर्शाता है। y=f(x) का लेखाचित्र (Graph) खींचने से यह x और y के बीच के सम्बन्ध को दृश्य रूप में प्रदर्शित करता है।

त्रिकोणमिति में हमने चर कोण x तथा इसके त्रिकोणमितीय फलनों को पढ़ा है। इन्हें f-फलन भी कहते हैं। चर कोण x के विभिन्न मानों तथा f-फलन के संगत मानों के बीच सम्बन्ध को लेखाचित्र द्वारा दृश्य रूप में समझा जा सकता है। x को विभिन्न मान देकर तथा f-फलन के

संगत मान प्राप्त करके उन्हें ग्राफ पेपर पर अंकित करने से हमें विभिन्न बिन्दु प्राप्त होते हैं जिनको मुक्त हस्त से मिलाने पर एक वक्र प्राप्त होता है जो y= fox) का लेखाचित्र निरूपित करता है।

भौतिक शास्त्र के अन्तर्गत विभिन्न घटनाओं जैसे, रेडियो तरंगों, ध्वनि तरंगों, प्रकाश तरंगों, प्रत्यावर्ती विद्युत् धारा, सरल आवर्त गति आदि का अध्ययन करते समय हमें ऐसे त्रिकोणमितीय फलनों के रेखाचित्र की सहायता लेनी पड़ती है।

लेखाचित्र खींचने की विधि (Method of Drawing a Graph)

त्रिकोणमितीय फलनों के लेखाचित्र खींचने के लिए निम्न विधि अपनाते हैं-

(i) ग्राफ पेपर पर Ox और OY परस्पर समकोणिक निर्देश अक्ष खींचते हैं।

(ii) समान अन्तराल में कोणों का मान लेते हैं तथा प्रत्येक कोण के संगत त्रिकोणमितीय फलन का मान दशमलव के दो स्थानों तक शुद्धतापूर्वक ज्ञात करते हैं।

(iii) अब विभिन्न कोणों एवं उनके फलनों के मान से सम्बन्धित सारणी बनाते हैं।

(iv) निर्देशाक्षों पर उचित पैमाना लेते हैं तथा X-अक्ष पर विभिन्न कोणों को तथा Y-अक्ष पर दिये हुए फलन को निरूपित करते हैं।

(v) सारणी से मानों के प्रत्येक युग्म के संगत ग्राफ पेपर पर एक-एक बिन्दु आलेखित करते हैं।

(vi) इस प्रकार प्राप्त सभी बिन्दुओं से होकर चिकना वक्र खींचते हैं। यही अभीष्ट वक्र होता है।

त्रिकोणमितीय फलनों के आवर्तनांक

यदि किसी फलन f(x) के लिए कोई लघुतम धनात्मक वास्तविक संख्या p ऐसी हो कि f(x+p)=f(x), तो फलन f(x) आवर्ती फलन कहलाता है तथा न्यूनतम धनात्मक वास्तविक संख्या p फलन का आवर्तनांक कहलाता है।

त्रिकोणमितीय फलनों sinx, cosx, cosecx तथा secx का आवर्तनांक 2 π है क्योंकि

$\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\quad \cos(x+2\pi) = \cos x$

$\operatorname{cosec}(x+2\pi) = \operatorname{cosec} x$, $\quad \sec(x+2\pi) = \sec x$

फलनों tanx तथा cotx का आवर्तनांक π है, क्योंकि

$\tan(x+\pi) = \tan x$, $\quad \cot(x+\pi) = \cot x$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

टिप्पणी: $\tan(x+2\pi) = \tan x$ तथा $\cot(x+2\pi) = \cot x$ होता है फिर भी इनका आवर्तनांक 2π न होकर π है क्योंकि π लघुतम है।

फलनों sin bx, cos bx, cosec bx, sec bx का आवर्तनांक $\frac{2\pi}{|b|}$ होता है, क्योंकि

$$\sin bx = \sin(bx + 2\pi) = \sin\left[b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)\right]$$

तथा $$\cos bx = \cos(bx+2\pi) = \cos\left[b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)\right]$$

यहाँ आवर्तनांक में $|b|$ इसलिए लिया गया है ताकि आवर्तनांक धनात्मक वास्तविक संख्या हो।

इसी तरह sin(bx+c), cos(bx+c), cosec(bx+c), sec(bx+c) का आवर्तनांक $\frac{2\pi}{b}$ तथा tan(bx+c), cot(bx+c) का आवर्तनांक $\frac{\pi}{b}$ में होता है।

उदाहरण-

उदाहरण: (i) sin3x, **(ii)** cos2x, **(ii)** $\tan\frac{x}{3}$, तथा (iv) $\sec\frac{2x}{5}$ के आवर्तनांक लिखिए।

हल:

(i) $\sin 3x = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3\left[x + \frac{2\pi}{3}\right]$

यहाँ x के मान में $\frac{2\pi}{3}$ वृद्धि करने पर फलन दुहराया जाता है। अत: $\sin 3x$ का आवर्तनांक $\frac{2\pi}{3}$ है। **उत्तर**

(ii) $\cos 2x$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{2} = \pi$. **उत्तर**

(iii) $\tan\left(\frac{x}{3}\right)$ का आवर्तनांक $= \frac{\pi}{1/3} = 3\pi$. **उत्तर**

(iv) $\sec\left(\frac{2x}{5}\right)$ का आवर्तनांक $= \frac{2\pi}{2/5} = 5\pi$. **उत्तर**

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

फलनों के आयाम (Amplitude of Functions)

यदि फलन f(x) द्वारा ग्रहण किया गया अधिकतम मान M तथा न्यूनतम मान m हो, तो f(x) का आयाम A = $\frac{M-m}{2} = \frac{1}{2}$ [फलन के अधिकतम व न्यूनतम मानों का अन्तर]

उदाहरण: (i) sinx, **(ii)** 3cosx तथा **(iii)** $\frac{2}{3}\sin(4x+7)$ के आयाम ज्ञात कीजिए।

हल: **(i)** sin x का आयाम $=\frac{1-(-1)}{2}$ =1 **उत्तर**

(ii) 3 cos x का आयाम $= \frac{3(-3)}{2} = 3$ **उत्तर**

(iii) $\frac{2}{3}\sin(4x+7)$ का आयाम $\frac{\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{2}{3}$ **उत्तर**

क्योंकि sin(4x +7) का अधिकतम मान 1 तथा न्यूनतम मान -1 होता है।

y = sinx का लेखाचित्र (Graph of y = sin x)

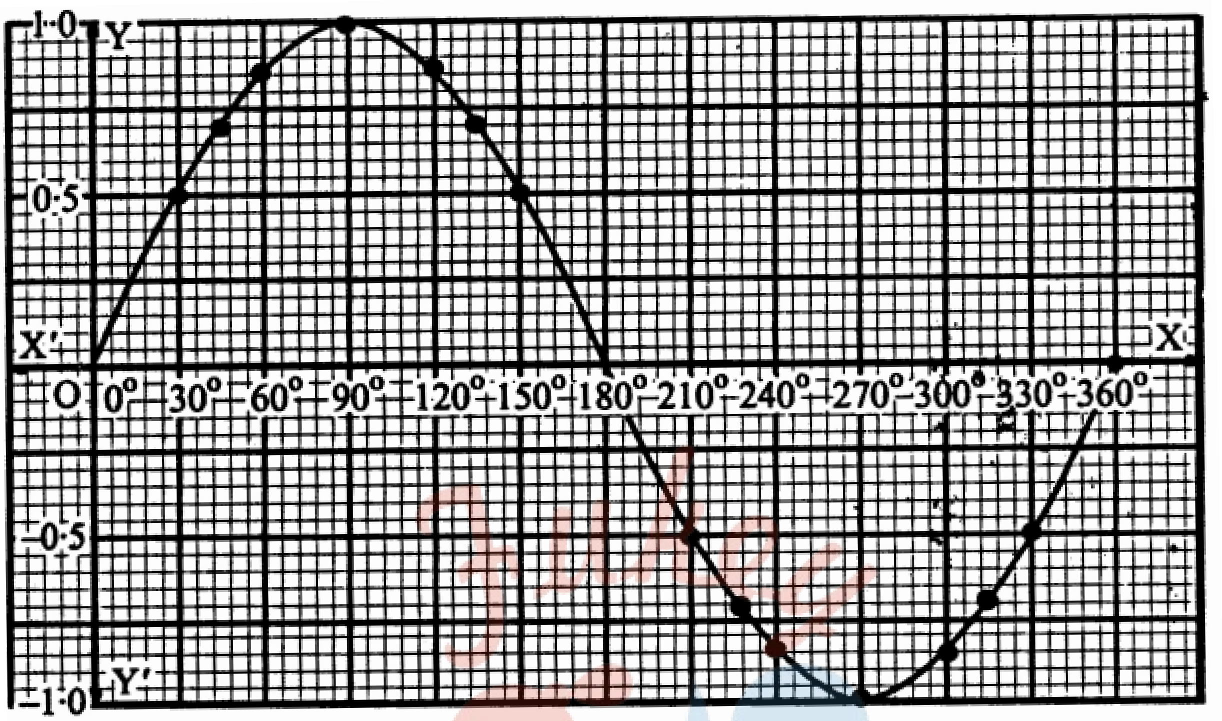
हम जानते हैं कि sinx एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्तनांक 2π है। मानलो अन्तराल [0,2π] में y = sinx का लेखाचित्र खींचना है। अतः हम अन्तराल [0,2π] में x को विभिन्न मान देकर sinx के संगत मान ज्ञात करते हैं।

निम्न सारणी में x के विभिन्न मानों के संगत sin x के मान दशमलव के दो स्थानों तक शुद्धतापूर्वक दिये गये हैं:

x	0°	$\pi/6=30°$	$\pi/3=60°$	$\pi/2=90°$	$2\pi/3=120°$	$5\pi/6=150°$	$\pi=180°$
$\sin x$	0	0·5	0·87	1·0	0·87	0·5	0
x		$7\pi/6=210°$	$4\pi/3=240°$	$3\pi/2=270°$	$5\pi/3=300°$	$11\pi/6=330°$	$2\pi=360°$
$\sin x$		–0·5	–0·87	–1·0	–0·87	–0·5	0

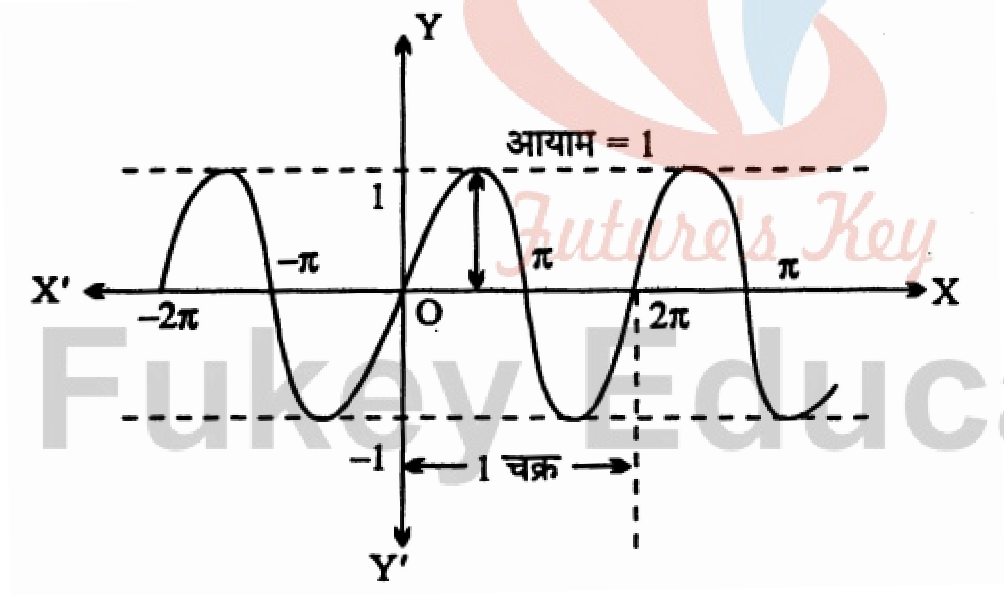
अब ग्राफ पेपर पर X-अक्ष और Y-अक्ष खींचते हैं तथा X-अक्ष पर 1 छोटा खाना $= 10° = \frac{\pi}{18}$ और Y-अक्ष पर 1 छोटा खाना = 0.1 इकाई लेते हैं। तत्पश्चात् सारणी से प्राप्त युग्मों {(0°,0),(30°,0-5),(60°,087),.....} के संगत बिन्दु ग्राफ पेपर पर आलेखित करते हैं। इन बिन्दुओं को चिकने वक्र (Smooth curve) द्वारा मिला देते हैं, जिससे निम्नानुसार लेखाचित्र प्राप्त होता है-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



[0, 2π] में y = sin x का लेखाचित्र

x के सभी वास्तविक मानों के लिए sinx का लेखाचित्र निम्न है-



लेखाचित्र की विशेषताएँ- (i) के सभी मानों के लिए लेखाचित्र सतत् है।

(ii) लेखाचित्र y=-1 से y =1 के मध्य स्थित है।

(iii) अन्तराल [0,2π] में एक चक्र पूर्ण होता है। अतः क्रमिक अन्तरालों [2 π,4 π],[4 π,6π],...... में वक्र दुहराया जा सकता है।

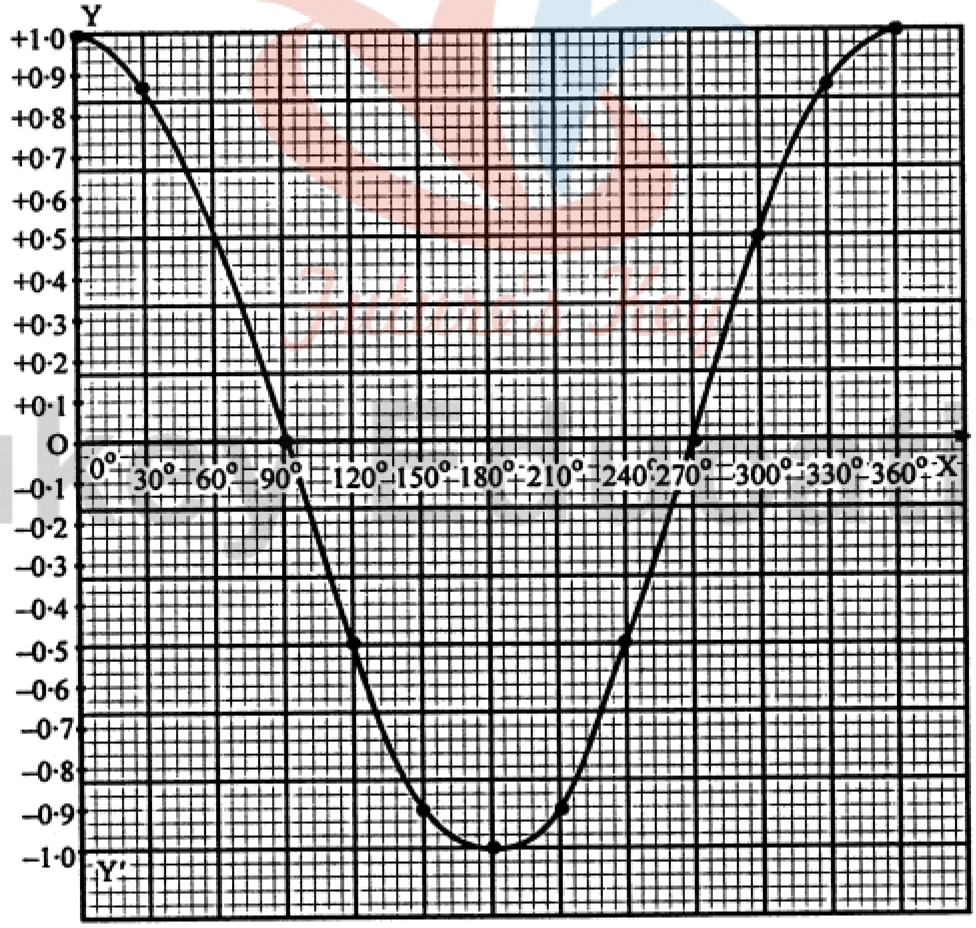
(iv) वक्र के महत्तम व न्यूनतम कोटि के बिन्दुओं को नति परिवर्तन बिन्दु (Turning point) कहते हैं। ये $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ है।

y = cos x का लेखाचित्र

एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्तनांक 2π है। मानलो, अन्तराल [0,2π] में y = cosx का लेखाचित्र खींचना है। अतः अन्तराल [0,2π] में x को विभिन्न मान देकर y = cosx" के संगत मान ज्ञात करते हैं। ये मान निम्न सारणी में दिये गये हैं-

x	0°	$\pi/6 = 30^\circ$	$\pi/3 = 60^\circ$	$\pi/2 = 90^\circ$	$2\pi/3 = 120^\circ$	$5\pi/6 = 150^\circ$	$\pi = 180^\circ$
$\cos x$	1	0·87	0·5	0	–0·5	–0·87	–1
x		$7\pi/6 = 210^\circ$	$4\pi/3 = 240^\circ$	$3\pi/2 = 270^\circ$	$5\pi/3 = 300^\circ$	$11\pi/6 = 330^\circ$	$2\pi = 360^\circ$
$\cos x$		–0·87	–0·5	0	0·5	0·87	1

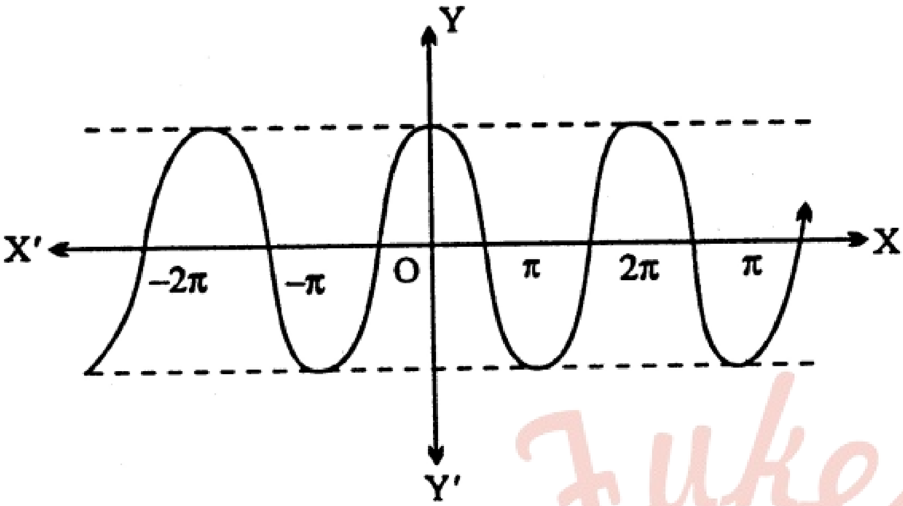
युग्मों {(0°,1), (30°,0-87), (60°,0-5), ...} के लिए ग्राफ पेपर पर बिन्दु आलेखित कर उन्हें मिलाने पर निम्नानुसार लेखाचित्र प्राप्त होता है-



[0, 2π] में $y = \cos x$ का लेखाचित्र

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

x के सभी वास्तविक मानों के लिए लेखाचित्र निम्नानुसार है-



लेखाचित्र की विशेषताएँ- **(i)** मुख्य अन्तराल [0, 2π] में एक चक्र पूर्ण होता है। अन्य अन्तरालों [-2π,0], [2π,4π],..... में वक्र दुहराया जा सकता है।

(ii) लेखाचित्र सतत् है अर्थात x के सभी मानों के लिए cosx का अस्तित्व है।

(iii) कोटियों y=-1 तथा y=+1 के मध्य सम्पूर्ण चक्र स्थित है।

(iv) नति परिवर्तन बिन्दु (0, 1), (π,-1), (2π, 1)........ है।

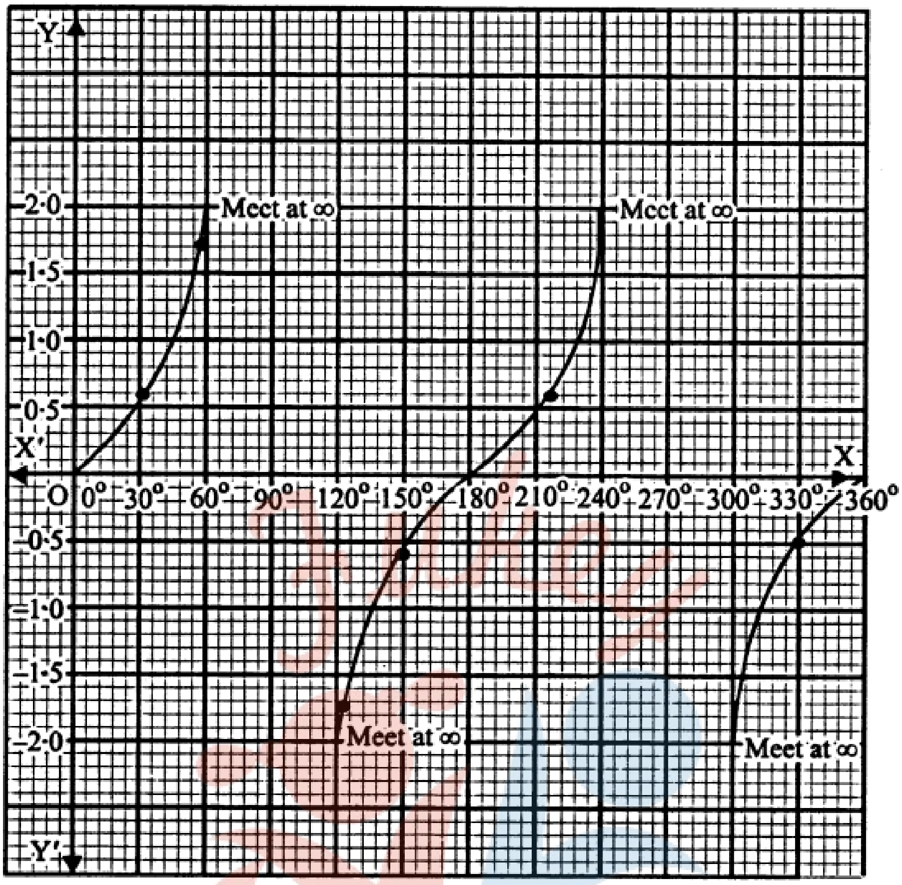
y = tanx का लेखाचित्र

हम जानते हैं कि tan x आवर्ती फलन है। इसका आवर्तनांक π है। मानलो हमें अन्तराल [0,π] में y = tanx का लेखाचित्र खींचना है। अतः हम अन्तराल [0, π] में x को विभिन्न मान देकर y के संगत मान ज्ञात करते हैं। निम्न सारणी में अन्तराल [0, π] में स्थित x के विभिन्न मानों के संगत y के शुद्ध मान दशमलव के दो अंकों तक दिये गये हैं

x	0^c	$\pi/6=30^\circ$	$\pi/3=60^\circ$	$\pi/2-0=$ $90^\circ-0$	$\pi/2+0=$ $90^\circ+0$	$2\pi/3=120^\circ$	$5\pi/6=150^\circ$	$\pi=180^\circ$
$y=\tan x$	0	0·58	1·73	$+\infty$	$-\infty$	−1·73	−0·58	0

X-अक्ष पर 1 छोटा खाना = 10° या π/18 और Y-अक्ष पर 10 छोटे खाने = 1 इकाई लेकर प्राप्त युग्मों {(0°,0), (30°,0.58), (60°,1.73),......} के संगत बिन्दु आलेखित करते हैं। इन बिन्दुओं को मिलाने पर निम्नानुसार वक्र प्राप्त होता है

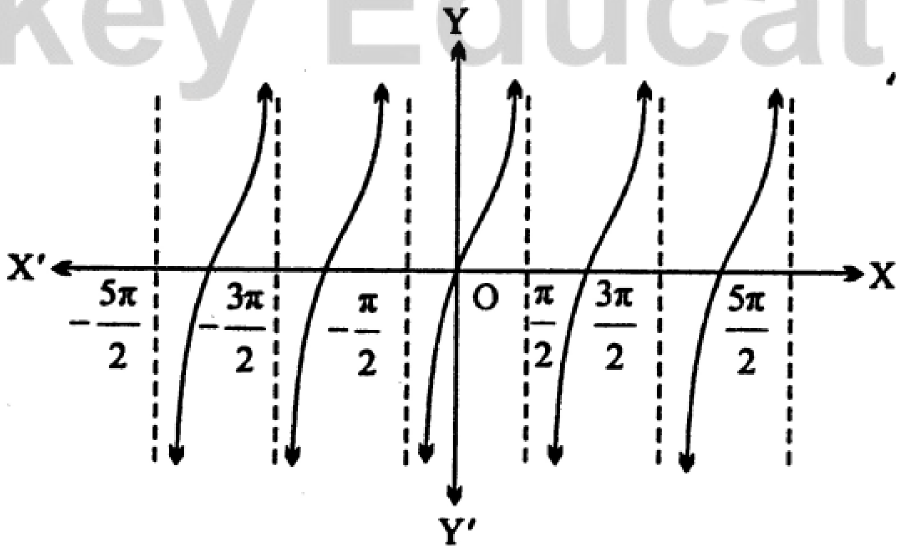
Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



$y = \tan x$ का लेखाचित्र

चूँकि tan(-x)=-tanx होता है, अतएव यदि वक्र पर कोई बिन्दु (x, tan x) है तो उस वक्र पर (-x,-tan x) बिन्दु अवश्य ही होगा। अत: वक्र सम्मुख चतुर्थांशों (Opposite quadrants) में सममित है।

इस प्रकार x के विभिन्न वास्तविक मानों के लिए y= tanx का लेखाचित्र पार्श्वानुसार होगा-



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

लेखाचित्र की विशेषताएं-

(i) $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ ..... के लिए फलन y = tan x परिभाषित नहीं है। अतः इन बिन्दुओं पर tan x असतत (Discontinuous) है।

(ii) tanx कोई वास्तविक संख्यात्मक मानः-∞ से +∞ तक रख सकता है,।

(iii) π लम्बाई के क्रमिक अन्तरालों में ग्राफ दुहराया जाता है।

(iv) खड़ी रेखाएँ, जिनकोः वक्र स्पर्श करने की चेष्टा तो करता है किन्तु स्पर्श नहीं कर पाता है, अनन्त स्पर्शियाँ (Asymptotes) कहलाती हैं।

टिप्पणी: -y= cotx का लेखाचित्र- हम जानते हैं कि

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

इसमें x=0 रखने पर $\tan\frac{\pi}{2}$ = cot0. अतः cotx का लेखाचित्र tanx के लेखाचित्र को XX' के समान्तर $\frac{\pi}{2}$ इकाई बायीं ओर स्थानान्तरित करने पर प्राप्त हो जायेगा।

y = asinx और y = acosx के लेखाचित्र

Y = asinx एक आवर्ती फलन है, जिसका आवर्तनांक 2π तथा आयाम a है। अतः इसका लेखाचित्र y = sinx के अनुरूप होगा। अन्तर केवल इतना है कि y=asinx के किसी बिन्दु की कोटि वक्र y = sin x के संगत बिन्दु की कोटि की a गुनी होगी। इसी प्रकार, y= a cosx का आवर्तनांक 2π तथा आयाम a है। अतः इसका लेखाचित्र y = cosx के अनुरूप ही होगा। अन्तर केवल इतना होगा कि वक्र y=acosx के किसी बिन्दु की कोटि वक्र y= cosx पर संगत बिन्दु की कोटि की a गुनी होगी।

उदाहरण-

उदाहरण: y=2 sin x का आलेख बनाइए जबकि का मान 0 से 2π तक है।

अथवा

y= 2 sin x का ग्राफ खींचिए तथा विशेषताएं बताइए।

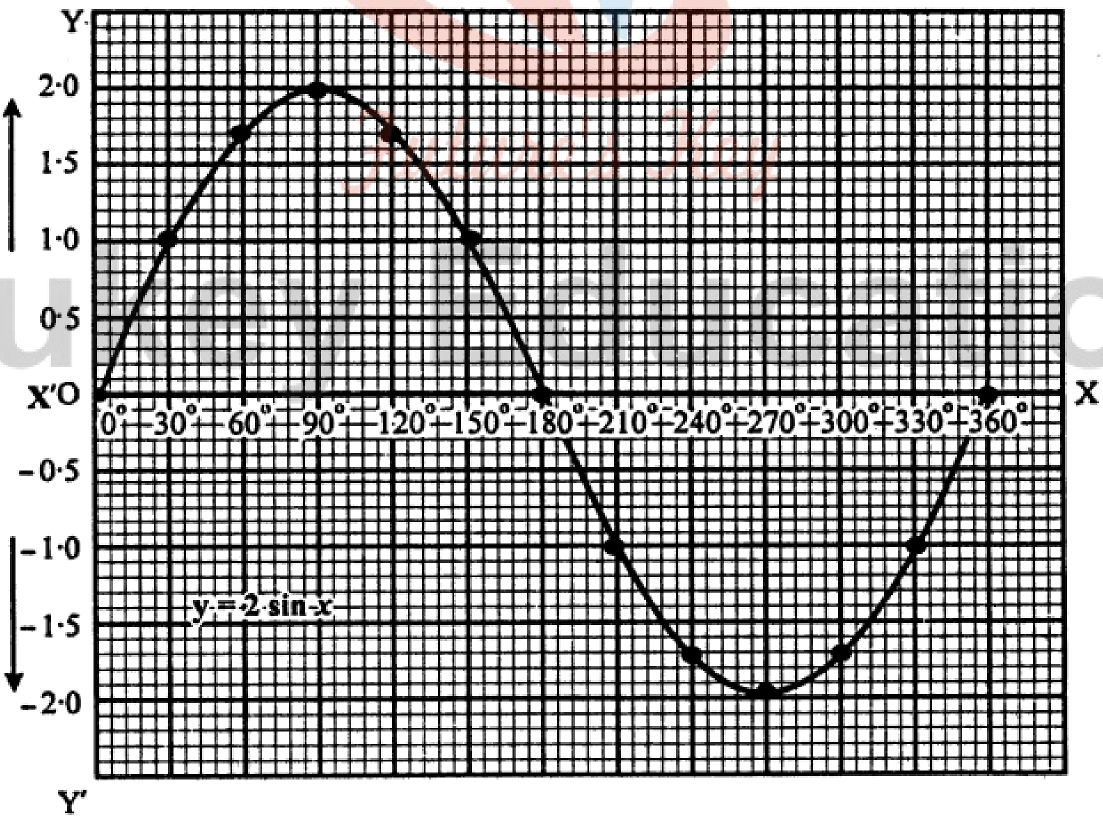
हल: y=2 sinx एक आवर्ती फलन है, जिसका आवर्तनांक 2π तथा आयाम 2 है। निम्नलिखित सारणी में अन्तराल [0,2π] में x के विभिन्न मानों के संगत y=2 sinx के मान दिये गये हैं-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\sin x$	0	0·5	0·87	1	0·87	0·5	0
$y = 2\sin x$	0	1	1·74	2	1·74	1	0

x	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\sin x$	–0·5	–0·87	–1	–0·87	–0·5	0
$y = 2\sin x$	–1	–1·74	–2	–1·74	–1	0

ग्राफ पेपर पर X और Y निर्देशांक बनाते हैं तथा उपर्युक्त मानों के प्रत्येक युग्म (0°,0), (30°,1), (60°,1.74), ... इत्यादि के संगत एक-एक बिन्दु का आलेखन करते हैं। इन बिन्दुओं को मिलाने पर निम्नानुसार अभीष्ट वक्र प्राप्त होता है-



$y = 2 \sin x$ का लेखाचित्र

वक्र की विशेषताएँ- **(i)** फलन का आयाम 2 है जो sinx के आयाम का दुगुना है।

(ii) शेष विशेषताएँ y = sin x के समान हैं।

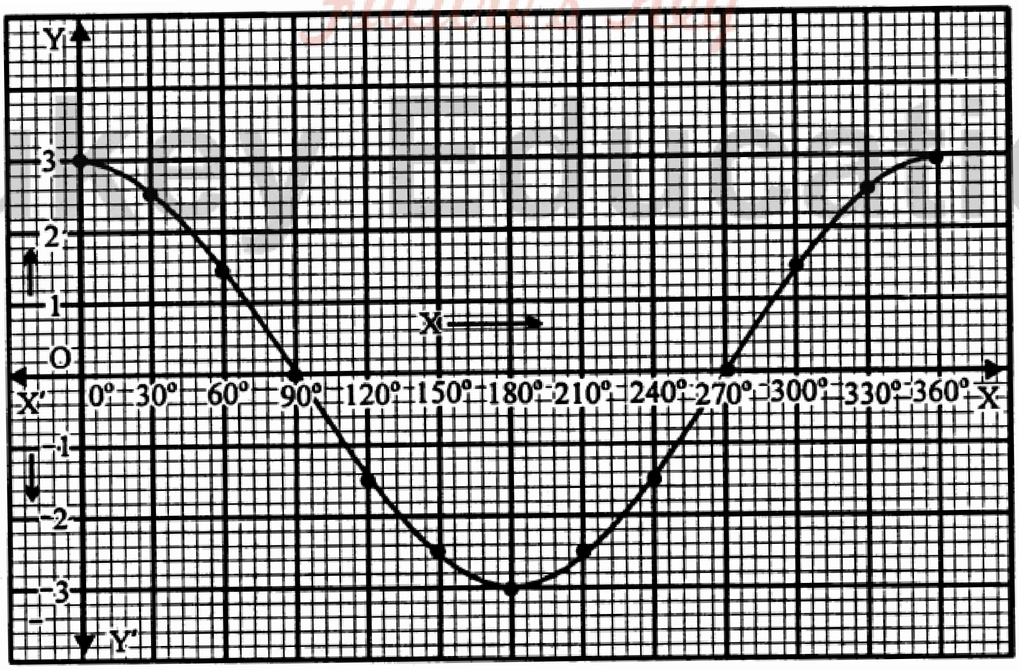
उदाहरण- y = 3 cos x का आलेख बनाइए जबकि x का मान 0 से 2π तक है। इस आलेख की विशेषताएँ बताइए।

हल: y=3 cosx एक आवर्ती फलन है, जिसका आवर्तनांक 2π तथा आयाम 3 है। निम्न सारणी में अन्तराल [0, 2π] में x के विभिन्न मानों के संगत y=3 cosx के मान दिये गये हैं-

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\cos x$	1	0·87	0·5	0	–0·5	–0·87	–1
$y = 3\cos x$	3(1) = 3	3(0·87) = 2·61	3(0·5) = 1·5	3(0) = 0	3(–0·5) = –1·5	3(–0·87) = –2·61	3(–1) = –3

x	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\cos x$	–0·87	–0·5	0	0·5	0·87	1
$y = 3\cos x$	3(–0·87) = –2·61	3(–0·5) = –1·5	3(0) = 0	3(0·5) = 1·5	3(0·87) = 2·61	3(1) = 3

ग्राफ पेपर पर X और Y-निर्देशांक लेते हैं तथा बिन्दुओं (0°.3), (30°,2.61), (60°,1.5),....... इत्यादि का आलेखन कर उन्हें मिलाने पर निम्न वक्र प्राप्त होता है-



$y = 3\cos x$ का लेखाचित्र

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

वक्र की विशेषताएँ- (i) फलन का आयाम 3 है जो फलन y = cos x के आयाम का तिगुना है।

(ii) शेष विशेषताएँ फलन y = cosx के लेखाचित्र की भाँति ही हैं।

y=asin bx तथा y=acos bx के लेखाचित्र

यदि $b \neq 0$ तो y = sin bx तथा y= sinx की तुलना करने पर हम देखते हैं कि $0 \leq \sin br \leq 1$ तथा $0 \leq \sin x \leq 1$. अतः दोनों फलनों का आयाम 1 है।

पुनः $\sin(bx + 2\pi) = \sin bx$

या $\sin b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) = \sin bx$

अत: sin bx का आवर्तनांक $\frac{2\pi}{|b|}$ है। (आवर्तनांक धनात्मक लेने के लिए b का निरपेक्ष मान लिया गया है।)

इस प्रकार y=asin bx का आयाम a तथा आवर्तनांक 161 है। अतः y=asin br का लेखाचित्र y= sinx के अनुरूप ही होगा।

इस प्रकार y=acosbr का आयाम तथा आवर्तनांक $\frac{2\pi}{|b|}$ है। अतः इसका लेखाचित्र y = cosx के अनुरूप होगा।

Y = asin (bx+c) और y = a cos(bx+c) के लेखाचित्र

हम जानते हैं y = asin bx में यदि bx = 0 तब y = 0 अर्थात् लेखाचित्र का प्रारम्भिक बिन्दु y = 0 तभी होगा जब bx = 0 अर्थात् x = $\frac{0}{b}$ या x = 0.

इसी प्रकार y=asin(bx+c) में bx+c=0 रखने पर y= 0 प्राप्त होता है। अतः लेखाचित्र का प्रारम्भिक बिन्दु y = 0 तभी होगा, जबकि bx+c = 0 या x =$\frac{-c}{b}$, अर्थात् अब लेखाचित्र का प्रारम्भिक बिन्दु मूलबिन्दु से बायीं ओर $\frac{c}{b}$ इकाई हट जायेगा। दूसरे शब्दों में, y= asin(bx +c) का लेखाचित्र X-अक्ष पर y = asin bx के लेखाचित्र से $\frac{c}{b}$ इकाई बायीं ओर हट जायेगा।

इसी प्रकार, y=asin(bx-c) का लेखाचित्र X-अक्ष पर y= asin bx के लेखाचित्र से $\frac{c}{b}$ इकाई दाहिनी ओर स्थानान्तरित हो जायेगा।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

पुनः हम देखते हैं कि y= acos bx में यदि bx $=\frac{\pi}{2}$ तब y=0 अर्थात् लेखाचित्र का प्रारम्भिक बिन्दु y=0 तभी होगा जब bx $=\frac{\pi}{2}$ या $x=\frac{\pi}{2b}$.

इसी प्रकार, y = acos(bx+c) में $bx+c=\frac{\pi}{2}$ में रखने पर y= 0 प्राप्त होता है। अतः लेखाचित्र का प्रारम्भिक बिन्दु y= 0 तभी होगा जबकि $bx+c=\frac{\pi}{2}$ या $x=\frac{\pi}{2b}-\frac{c}{b}$ अर्थात् अब लेखाचित्र का प्रारम्भिक बिन्दु $\frac{\pi}{2b}$ से बायीं ओर $\frac{c}{b}$ इकाई हट जायेगा। दूसरे शब्दों में, y=acos(bx+c) का लेखाचित्र X-अक्ष पर y = acosbx के लेखाचित्र से $\frac{c}{b}$ इकाई बायीं ओर हट जायेगा।

इसी प्रकार, y= acos(bx-c) का लेखाचित्र X-अक्ष पर y= acos bx के लेखाचित्र से $\frac{c}{b}$ इकाई दाहिनी ओर हट जायेगा।

उदाहरण: फलन y = $\sin(x+\frac{\pi}{3})$ का लेखाचित्र खींचिए।

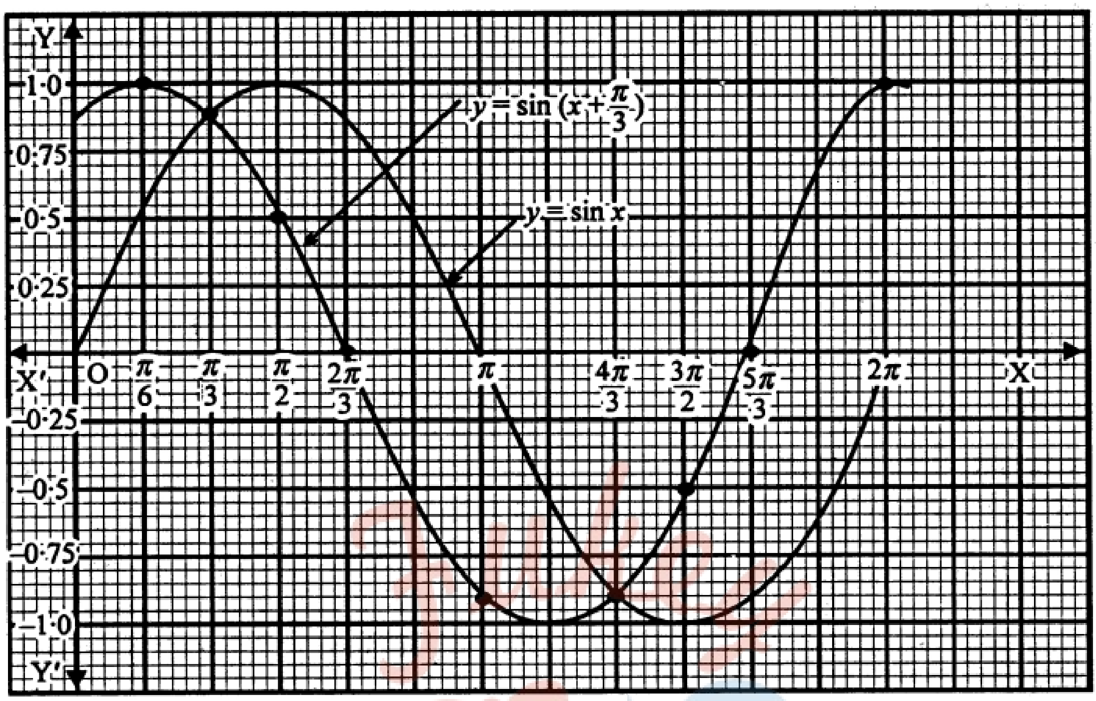
हल: y= $\sin(x+\frac{\pi}{3})$ एक आवर्ती फलन है, जिसका $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{1}=2$ है।

फलन के लिए x,y के संगत मानों की सारणी निम्न है-

x	0^c	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$x+\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$
$y=\sin(x+\pi/3)$	0·87	1	0·87	0·5	0	−0·87	−0·87	−0·5	0	0·87

ग्राफ पेपर पर निर्देशाक्ष खींचकर बिन्दुओं (0°,0.87), $(\frac{\pi}{6},1)$ $(\frac{\pi}{6},0.87)$..... को आलेखित कर उन्हें मिलाने पर निम्नानुसार वक्र प्राप्त होता है-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



टिप्पणी: इस वक्र में अनुच्छेद y=sin x का लेखा चित्र भी दिया गया है।

त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometrical Equations)

वह समीकरण जिसमें एक या अधिक अज्ञात कोणों के त्रिकोणमितीय फलनों का समावेश हों, त्रिकोणमितीय समीकरण कहलाता है।

जैसे- $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin x = \frac{1}{2}; = \cos mx$

$\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$; $\sin^2\theta - \cos\theta = \frac{1}{4}$ इत्यादि।

त्रिकोणमितीय समीकरणों के मूल

अज्ञात कोणों (या चर राशियों) के वे मान जो दिये गये त्रिकोणमितीय समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं, उसके मूल कहलाते हैं।

जैसे- $\cos\theta = \frac{1}{2}$ के मूल $\theta = 60°$ या $\frac{\pi}{3}$ तथा $\theta = 300°$ या $\frac{5\pi}{3}$ हैं, क्योंकि $0 = 60°$ तथा $360°$ रखने पर $\cos\theta = \frac{1}{2}$ सन्तुष्ट होता है।

त्रिकोणमितीय समीकरण का हल

त्रिकोणमितीय समीकरण के सभी सम्भव मूलों का समुच्चय उसका हल कहलाता है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

मुख्य हल (Principal Solution)- वे मल जो 0 से 2π (0° से 360°) के मध्य स्थित होते हैं, मुख्य हल कहलाते हैं।

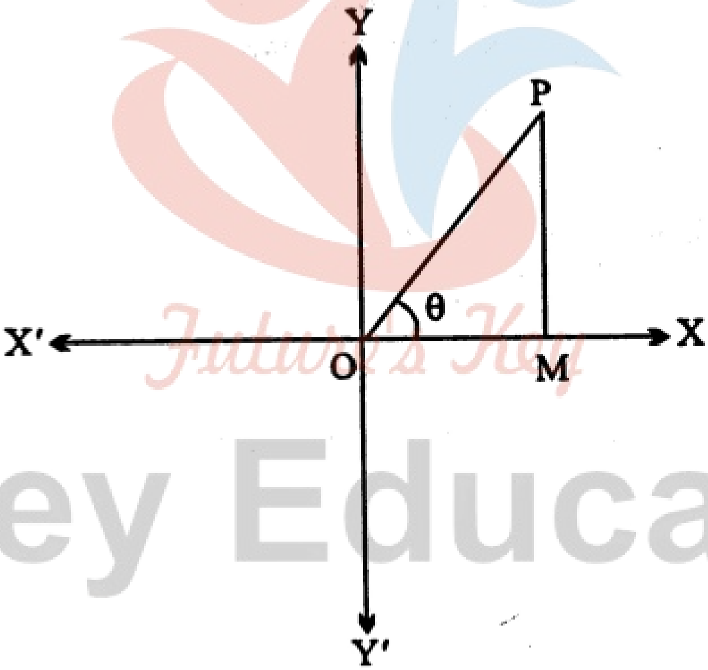
उदाहरणार्थ, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ को सन्तुष्ट करने वाले θ के मान जो 0° से 360° के बीच हैं, 45° व 135° हैं। अतः समीकरण के मुख्य हल $\theta = 45^\circ, 135^\circ$ हुए।

व्यापक हल (General Solution)- त्रिकोणमितीय फलनों के आवर्ती गुणों के कारण त्रिकोणमितीय समीकरण को सन्तुष्ट करने वाले कोणों के मान संख्या में अनन्त होते हैं। θ के वे सभी मान जिस व्यापक व्यंजक से निरूपित होते हैं, समीकरण का व्यापक हल कहलाता है।

समीकरणों के व्यापक हल (General Solution of Equations)

(i) $\sin\theta = 0$ का व्यापक हल- माना कि परिक्रामी रेखा OP अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से घूमकर $\angle POX = \theta$ बनाती है। तब $PM \perp LOX$ खींचने पर समकोण त्रिभुज OMP में,

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP}$$



Fukey Education

स्पष्ट है कि $\sin\theta = 0$ होगा यदि $PM = 0$

इस स्थिति में OP किरण $\overrightarrow{OX}$ या $\overrightarrow{OX'}$ से संपाती होगी।

जब OP, $\overrightarrow{OX}$ पर है, तो

$\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots\ldots$

और जब OP, $\overrightarrow{OX'}$ पर है, तो

$\Theta = \pm\pi,\ 3\pi,\ 5\pi, ...$

$\Theta = 0,\ \pm\pi,\ \pm2\pi,\ \pm3\pi,\ \pm4\pi, ...$

=T का पूर्णांक गुणज।

अतः $\sin\theta=0$ का व्यापक हल है:

$\theta=n\pi$, जहाँ $n\in I$.

(ii) $\cos\theta = 0$ का व्यापक हल-

चूँकि $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = 0$ होगा, यदि OM = 0 अर्थात् OP, OY या OY' स्थिति में हो।

$\therefore \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2},$ .... (धनात्मक दिशा में)

या $\qquad \theta = \frac{-\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}, 0$ .... (ऋणात्मक दिशा में)

अतः $\theta = \pm\left(\frac{\pi}{2} \text{ का विषम गुणज}\right)$

$\therefore$ व्यापक हल, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ $n\in I$ अर्थात् n कोई पूर्णांक है।

(iii) $\tan\theta = 0$ का व्यापक हल-

$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = 0$ तभी होगा जब PM = 0.

अतः **(i)** की तरह व्यापक हल, $\theta=n\pi$. जहाँ $n\in I$.

(iv) $\cos\theta=1$ का व्यापक हल-

$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=1$ तभी होगा जब OM=OP अर्थात OP, OX के संपाती हो, तब

$\theta = 0,\ 2\pi,\ \pm4\pi,\ \pm6\pi, ...$

अतः व्यापक हल, $\theta=2n\pi$, जहाँ $n\in I$.

(v) $\cot\theta = 0$ का व्यापक हल:

$\because \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$ तो $\cos\theta = 0$.

अतः $\cot\theta = 0$ का व्यापक हल,

$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ $n\in I$.

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

टिप्पणी: cosecθ = 0 और secθ = 0 के कोई हल नहीं होते क्योंकि cosecθ,secθ का मान कभी भी शून्य नहीं होता है।

इनका परास cosecθ|≥1 व secθ≥1 होता है।

उन सब कोणों के लिए व्यापक व्यंजक ज्ञात करना जिनकी ज्या एक ही है

मानलो समीकरण sinθ=sinα है, जहाँ α समीकरण को सन्तुष्ट करने वाला न्यूनतम कोण है।

$$\because \quad \sin\theta = \sin\alpha$$

$$\therefore \quad \sin\theta - \sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0 \text{ अथवा } \sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

यदि $\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ तब $\frac{\theta+\alpha}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ $n \in I$

$$\Rightarrow \theta+\alpha = (2n+1)\pi \quad ...(1)$$

यदि $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$, तब $\frac{\theta-\alpha}{2} = p\pi$

$$\Rightarrow \theta-\alpha = 2n\pi \quad ...(2)$$

समी. (1) से, $\theta = (2n+1)\pi - \alpha \quad ...(3)$

समी. (2) से, $\theta = 2n\pi + \alpha \quad ...(4)$

समी. (3) में π का विषम अपवर्त्य तथा समी. (4) में π का सम अपवर्त्य शामिल है। अतः दोनों को मिलाने पर, $\sin\theta = \sin\alpha$ का व्यापक हल निम्न होगा—

$$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha, \quad \text{जहाँ } n \in I \quad ...(5)$$

$$\theta = n\pi + (-1)^n \alpha, \quad \text{जहाँ } n \in I \qquad ...(5)$$

टिप्पणी : (i) यदि $\sin\theta = -\sin\alpha$

तो $\sin\theta = \sin(-\alpha)$

$\therefore$ $\theta = n\pi + (-1)^n(-\alpha)$

$\Rightarrow$ $\theta = n\pi - (-1)^n\alpha$

(ii) यदि $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\alpha$ हो जहाँ α समीकरण को सन्तुष्ट करने वाला न्यूनतम मान हो तो स्पष्ट है कि

$$\sin\theta = \sin\alpha$$

अत: $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\alpha$ का व्यापक हल होगा—

$$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha.$$

उन सब कोणों के लिए व्यापक व्यंजक ज्ञात करना जिनकी कोज्या एक ही है

माना कि समीकरण $\cos\theta = \cos\alpha$ है, जहाँ α समीकरण को सन्तुष्ट करने वाला न्यूनतम कोण है।

Future's Key
Fukey Education

$\because \quad \cos\theta = \cos\alpha$

$\Rightarrow \quad \cos\theta - \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \quad 2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\theta}{2} = 0$

$\Rightarrow \quad \sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ या $\sin\frac{\alpha-\theta}{2} = 0$

यदि $\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$, तब $\frac{\theta+\alpha}{2} = n\pi$, जहाँ $n \in I$.

$\therefore \quad \theta + \alpha = 2n\pi$

$\Rightarrow \quad \theta = 2n\pi - \alpha \quad ...(1)$

यदि $\sin\frac{\alpha-\theta}{2} = 0$, तब $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$.

$\therefore \quad \frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi,$ जहाँ $n \in I$

$\Rightarrow \quad \theta - \alpha = 2n\pi$

$\Rightarrow \quad \theta = 2n\pi + \alpha \quad ...(2)$

समी. (1) और (2) दोनों में π का सम अपवर्त्य शामिल है।

अतः $\cos\theta = \cos\alpha$ का व्यापक हल होगा—

$\theta = 2n\pi \pm \alpha$, जहाँ $n \in I$. ...(3)

टिप्पणी : (i) यदि $\cos\theta = -\cos\alpha$ हो, तो

$\cos\theta = \cos(\pi - \alpha)$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi \pm (\pi - \alpha)$.

(ii) यदि $\sec\theta = \sec\alpha$ हो, तो $\cos\theta = \cos\alpha$

$\therefore \quad \theta = 2n\pi \pm \alpha$.

उन सबकोणों के लिए व्यापक व्यंजक ज्ञात करना जिनकी स्पर्शज्या एक ही है

माना कि समीकरण $\tan\theta = \tan\alpha$ है, जहाँ α समीकरण को सन्तुष्ट करने वाला न्यूनतम कोण है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\because \quad \tan\theta = \tan\alpha$

$\therefore \quad \tan\theta - \tan\alpha = 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$

$\Rightarrow \quad \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \quad \sin(\theta - \alpha) = 0$

$\Rightarrow \quad \theta - \alpha = n\pi,$ जहाँ $n \in I$

अत: $\quad \tan\theta = \tan\alpha$

$\Rightarrow \quad \theta = n\pi + \alpha.$

टिप्पणी : (i) यदि $\tan\theta = -\tan\alpha$ हो, तो

$\tan\theta = \tan(-\alpha)$

$\therefore \quad \theta = n\pi - \alpha,$ जहाँ $n \in I.$

(ii) यदि $\cot\theta = \cot\alpha$ हो, तो

$\tan\theta = \tan\alpha$

$\therefore \quad \theta = n\pi + \alpha,$ जहाँ $n \in I.$

समीकरण $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$ का व्यापक हल

दिया है: $\quad \sin^2\theta = \sin^2\alpha$

$\therefore \quad \sin\theta = \pm\sin\alpha$

यदि $\quad \sin\theta = +\sin\alpha$

तो $\quad \theta = n\pi + (-1)^n\alpha \quad$ .....(1)

तथा यदि $\quad \sin\theta = -\sin\alpha$

तो $\quad \theta = n\pi - (-1)^n\alpha \quad$ .....(2)

समी. (1) और (2) को मिलाकर लिखने पर,

$\Theta = n\pi \pm \alpha$, जहाँ $n \in I \quad$ .....(3)

टिप्पणी: $\operatorname{cosec}^2\theta = \operatorname{cosec}^2\alpha$ का भी व्यापक हल,

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\Theta = n\pi \pm \alpha$ होगा।

समीकरण $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$ का व्यापक हल

दिया है : $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$

$\therefore \quad \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad [\because \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1]$

$\Rightarrow \quad \cos 2\theta = \cos 2\alpha$

$\Rightarrow \quad 2\theta = 2n\pi \pm 2\alpha$

$\therefore \quad \theta = n\pi \pm \alpha,$ जहाँ $n \in I$.

टिप्पणी: $\sec^2\theta = \sec^2\alpha$ का भी व्यापक हल $\theta = n\pi \pm \alpha$ होगा।

समीकरण $\tan 2\theta = \tan^2\alpha$ का व्यापक हल

दिया है: $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \pm\tan\alpha$

यदि $\tan\theta = +\tan\alpha$

तो $\theta = n\pi + \alpha$ ...(1)

तथा यदि $\tan\theta = -\tan\alpha$

तो $\theta = n\pi - \alpha$ ...(2)

समी. (1) और (2) को मिलाने पर,

$\theta = n\pi \pm \alpha.$

टिप्पणी:

(i) $\cot^2\theta = \cot^2\alpha$ का भी व्यापक हल $\theta = n\pi \pm \alpha$ होगा।

(ii) स्पष्ट है कि द्विघात समीकरणों $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$, $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ इत्यादि का व्यापक हल $\theta = n\pi \pm \alpha$ है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

स्मृति-सहायिका (Aid to Memory)

क्र.	त्रिकोणमितीय समीकरण	हल, जहाँ $n \in I$
1.	$\sin\theta = 0$	$\theta = n\pi$
2.	$\cos\theta = 0$	$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$
3.	$\tan\theta = 0$	$\theta = n\pi$
4.	$\sin\theta = \sin\alpha$	$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$
5.	$\cos\theta = \cos\alpha$	$\theta = 2n\pi \pm \alpha$
6.	$\tan\theta = \tan\alpha$	$\theta = n\pi + \alpha$
7.	$\sin^2\theta = \sin^2\alpha$	$\theta = n\pi \pm \alpha$
8.	$\cos^2\theta = \cos^2\alpha$	$\theta = n\pi \pm \alpha$
9.	$\tan^2\theta = \tan^2\alpha$	$\theta = n\pi \pm \alpha$
10.	$\cos\theta = 1$	$\theta = 2n\pi$

विभिन्न प्रकार के त्रिकोणमितीय समीकरण

(A) वे समीकरण जिनमें चर कोण का एक ही त्रिकोणमितीय फलन हो:

इस प्रकार के समीकरणों को ऐसे रूप में प्राप्त कर लेते हैं कि त्रिकोणमितीय फलनों के घात धनात्मक पूर्णांक हों तथा रूपान्तरण द्वारा केवल साधारण फलन $\sin\theta$, $\cos\theta$ या $\tan\theta$ में से एक रह जाये।

उदाहरण-

उदाहरण: निम्न समीकरणों का व्यापक हल ज्ञात कीजिए

(i) $\sin\theta \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\tan\theta = 1$

(iii) $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

(iv) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$

(v) $\text{cosec}\theta = 2$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

(i) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

$\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3},$ जहाँ $n \in I$. उत्तर

(ii) $\tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4},$ जहाँ $n \in I$. उत्तर

(iii) $\sin\theta = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ $\theta = n\pi + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow$ $\theta = n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{6},$ जहाँ $n \in I$. उत्तर

(iv) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $\sqrt{3}\tan\theta = -1$

$\Rightarrow$ $\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow$ $\theta = n\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow$ $\theta = n\pi - \frac{\pi}{6},$ जहाँ $n \in I$. उत्तर

(v) $\operatorname{cosec}\theta = 2$

$\Rightarrow$ $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6},$ जहाँ $n \in I$. उत्तर

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

दूसरी विधि—

$$\text{cosec}\,\theta = 2$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, \text{ जहाँ } n \in I. \quad \textbf{उत्तर}$$

उदाहरण: समीकरण $|\sin x| = \frac{1}{2}$ को हल कीजिए।

हल: दिया है: $|\sin x| = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad |\sin x|2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \quad x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad \text{जहाँ } n \in I. \quad \textbf{उत्तर}$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 3.1 (पृष्ठ संख्या 62)

प्रश्न 1 निम्नलिखित डिग्री माप के संगत रेडियन माप ज्ञात कीजिए।

(i) 25°

(ii) −47° 30

(iii) 240°

(iv) 520°

उत्तर-

(i)

Fukey Education

$180^\circ = \pi$ रेडियन

$25^\circ = \frac{\pi}{180} \times 25$

$= \frac{5\pi}{36}$ रेडियन।

(ii)

$60' = 1^\circ$ तब $30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$

$\therefore -47^\circ 30' = \left(-47\frac{1}{2}\right)^\circ = \left(-\frac{95}{2}\right)^\circ$

अब $180^\circ = \pi$ रेडियन

$\therefore \left(-\frac{95}{2}\right)^\circ - = \frac{-\pi}{180} \times \frac{95}{2}$ रेडियन

$= -\frac{19\pi}{72}$ रेडियन

$\therefore -47^\circ 30' = -\frac{19\pi}{72}$ रेडियन।

(iii)

$180^\circ = \pi$ रेडियन

$240^\circ = \frac{\pi}{180} \times 240$ रेडियन

$= \frac{4\pi}{3}$ रेडियन।

(iv)

$180^\circ = \pi$ रेडियन

$520^\circ = \frac{\pi}{180} \times 520$ रेडियन

$= \frac{26\pi}{9}$ रेडियन।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 2 निम्नलिखित रेडियन माप के संगत डिग्री माप ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$) का प्रयोग करें:

(i) $\frac{11}{16}$
(ii) -4
(iii) $\frac{5\pi}{3}$
(iv) $\frac{7\pi}{6}$

उत्तर-

(i)

$$\pi \text{ रेडियन} = \frac{22}{7} \text{ रेडियन} = 180^\circ$$

$$\frac{11}{16} \text{ रेडियन} = \frac{180}{22} \times 7 \times \frac{11}{16} \text{ डिग्री}$$

$$= \frac{315}{8} \text{ डिग्री } 39 = \frac{3}{8} \text{ डिग्री}$$

$$= 39^\circ \left(\frac{3}{9} \times 60\right)'$$

$$= 39^\circ 22' \left(\frac{1}{2} \times 60\right)$$

$$= 39^\circ 22' 30''$$

(ii)

$$\frac{22}{7} \text{ रेडियन} = 180^\circ$$

$$4 \text{ रेडियन} = \frac{180}{22} \times 7 \times (-4) \text{ डिग्री}$$

$$= -\frac{2520}{11} \text{ डिग्री}$$

$$= -229\frac{1}{11} \text{ डिग्री}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= -229^\circ\left(\frac{1}{11}\times 60\right)'$$

$$= -229^\circ 5'\left(\frac{5}{11}\times 60\right)''$$

$$= -229^\circ 5' 27''$$ (निकटतम)।

(iii)

π रेडियन 180°

$\therefore \frac{5\pi}{3}$ रेडियन $= \frac{180}{\pi}\times\frac{5\pi}{3} = 300^\circ$

(iv)

π रेडियन 180°

$\therefore \frac{7\pi}{6}$ रेडियन $= \frac{180}{\pi}\times\frac{7\pi}{6} = 210^\circ$

प्रश्न 3 एक-पहिया एक मिनट में 360° परिक्रमण करता है तो एक सेकंड में कितने रेडियन माप का कोण बनाएगा?

उत्तर- परिक्रमण में पहिया द्वारा बना कोण = 2π रेडियन

360 परिक्रमण में पहिया द्वारा बना कोण = 360 × 2π रेडियन

1 मिनट अर्थात् 60 सेकण्ड में 360 × 2π रेडियन का कोण बनता है।

1 सेकण्ट में चहिया द्वारा बना कोण $= \frac{360\times 2\pi}{60} = 12\pi$ रेडियन।

प्रश्न 4 एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 100 सेमी है, 22 सेमी लंबाई की चाप वृत्त के केन्द्र पर कितने डिग्री माप का कोण बनाएगी? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$ का प्रयोग कीजिए।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\because$ चाप = त्रिज्या × कोण

जहाँ चाप, l = 22 सेमी

त्रिज्या, r = 100 सैमी

$$22 = 100 \times \theta$$

$$\theta = \frac{22}{100} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{22}{100} \times \frac{180}{\pi} \text{ डिग्री}$$

$$= \frac{22}{100} \times \frac{180}{22} \times 7 \text{ डिग्री}$$

$$= \frac{63}{5} \text{ डिग्री}$$

$$= 12.6 \text{ डिग्री}$$

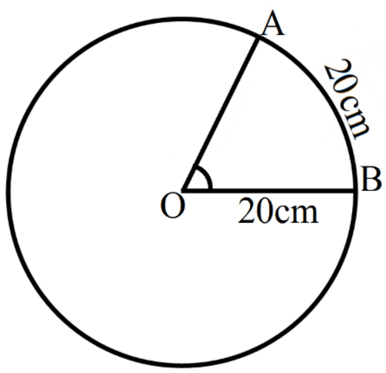
$$= 12°36'$$

प्रश्न 5 एक वृत्त जिसका व्यास 40 सेमी. है, की एक जीवा 20 सेमी. लंबाई की है तो इसके संगत छोटे चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

व्यास = 40 सेमी

त्रिज्या = 20 सेमी



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

त्रिभुज OAB एक समबाहु त्रिभुज है

$\angle \mathrm{AOB} = 60^\circ$

$= \frac{60 \times \pi}{180}$ रेडियन

$= \frac{\pi}{3}$ रेडियन

मान लीजिये चाप AB = l

केंद्र O पर चाप द्वारा बना कोण, $\theta = \frac{\pi}{3}$ रेडियन

चाप AB की लम्बाई, $\mathrm{l} = \mathrm{r}\theta = 20 \times \frac{\pi}{3}$ रेडियन

$= \frac{20\pi}{3}$ रेडियन।

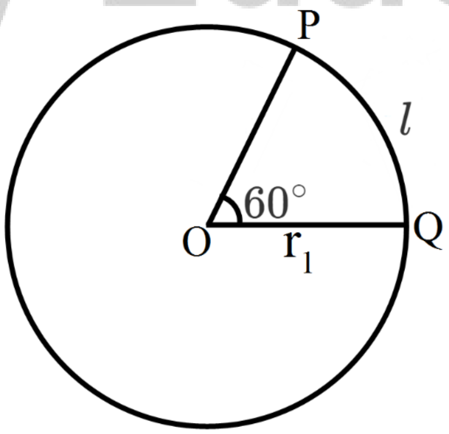
प्रश्न 6 यदि दो वृत्तों के समान लंबाई वाले चाप अपने केन्द्रों पर क्रमशः 60° तथा 75° के कोण बनाते हों, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

माना चाप की लम्बाई = l

चाप द्वारा केंद्र पर बना कोण $\theta_1 = 60^\circ$

$= \frac{\pi}{3}$ रेडियन



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

मान लीजिये इसकी त्रिज्या = r_1

$$l = r_1\theta_1$$

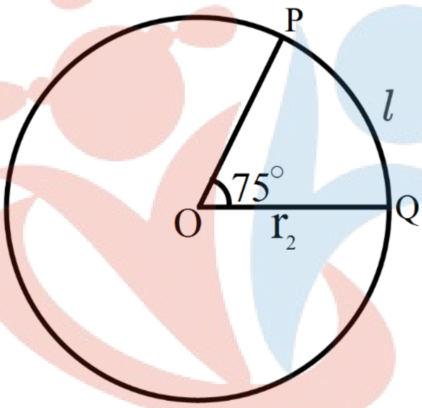
$$l = r_1\frac{\pi}{3}$$

$$r_1 = \frac{3l}{\pi}$$

दूसरे व्रत के लिये,

माना त्रिज्या = r_1

चाप की लंबाई = l



चाप द्वारा केंद्र पर बना कोण, $\theta_2 = 75^\circ$

$= 75 \times \frac{\pi}{180}$ रेडियन

$= \frac{5\pi}{12}$ रेडियन

$$r_2 = \frac{5\pi}{12}$$

समीकरण (i) को समीकरण (ii)से विभाजित करने पर

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3l}{\pi} \div \frac{12l}{5\pi}$$

$$= \frac{3l}{\pi} \times \frac{5\pi}{12l} = \frac{5}{4} = 5 : 4$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 7 75 सेमी लम्बाई वाले एक दोलायमान दोलक का एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोलन करने से जो कोण बनता है, उसका माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि उसके नोक द्वारा बनाए गए चाप की लम्बाई निम्न हैं:

(i) 10 सेमी

(ii) 15 सेमी

(iii) 15 सेमी

उत्तर-

(i)

त्रिज्या = 75 सेमी

चाप की लम्बाई l_1 = 10 सेमी

यदि चाप द्वारा केंद्र पर बना कोण θ रेडियन हो, तो

$$l_1 = r\theta_1$$

$$10 = 75\theta_2$$

$$\theta = \frac{10}{75} = \frac{2}{15} \text{ रेडियन।}$$

(ii)

$$r = 75 \text{ सैमी तथा } l_2 = 15 \text{ सैमी}$$

$$l_2 = r\theta_2$$

$$\theta_2 = \frac{l_2}{r} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5} \text{ रेडियन।}$$

(iii)

$$l_3 = 21 \text{ सेमी, } r = 75 \text{ सेमी}$$

$$\therefore \theta_3 = \frac{l_3}{r} = \frac{21}{75} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{7}{25} \text{ रेडियन।}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्नावली 3.2 (पृष्ठ संख्या 71)

प्रश्न 1 निम्नलिखित प्रश्न में अन्य त्रिकोणमितीय फलनो का मान ज्ञात कीजिये:

$\cos x = -\frac{1}{2}$,x तिसरे चतुर्थांश में स्थिति है।

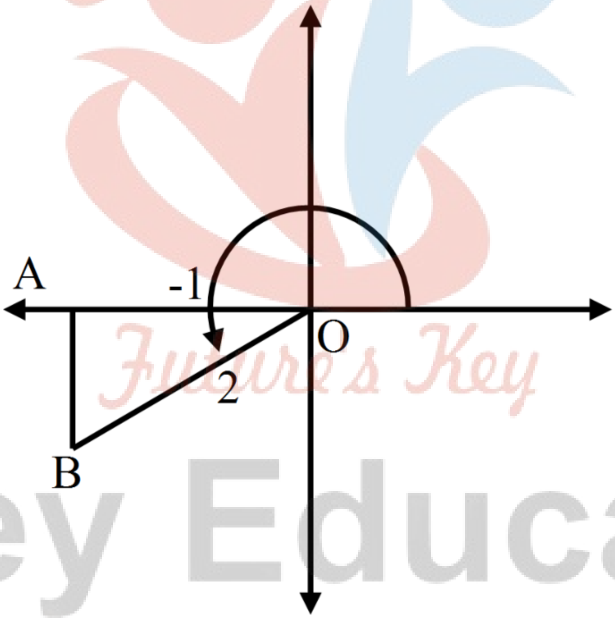
उत्तर-

ΔOAB में,

$$\cos x = \frac{1}{2} = \frac{OA}{OB}$$

$$\therefore AB = \sqrt{OB^2 - OA^2}$$

$$= \sqrt{4-1} = \pm\sqrt{3}$$



Fukey Education

AB अक्ष OY' की दिशा में है।

$$\therefore AB = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow OA = -1, AB = -\sqrt{3}, OB = 2$$

$$\sin x = \frac{AB}{OB} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan x = \frac{AB}{OA} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{OB}{AB} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec x = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{-1} = -2$$

और $\cot x = \frac{OA}{AB} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 2 निम्नलिखित प्रश्न में अन्य त्रिकोणमितीय फलनो का मान ज्ञात कीजिये:

$\sin x = \frac{3}{5}$,x दूसरे चतुर्थांश में स्थिति है।

उत्तर-

$$\sin x = \frac{3}{5} = \frac{AB}{OB}$$

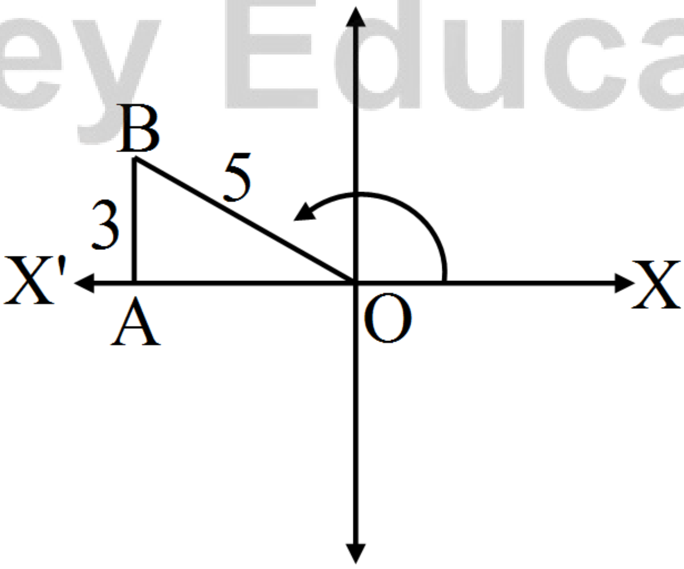
यहाँ $AB = 3$ इकाई

$\therefore OB = 5$ इकाई

$$OA = \sqrt{OB^2 - AB^2}$$

$$= \sqrt{25 - 9} = \pm 4$$

Fukey Education



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

अब OA = -4 (क्योंकि यहाँ OX'दिशा में है।)

$$AB = 3$$

$$OB = 5$$

$$\cos x = \frac{OA}{OB} = \frac{-4}{5}$$

$$\tan x = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{OB}{AB} = \frac{5}{3}$$

$$\sec x = \frac{OB}{OA} = -\frac{5}{4}$$

$$\cot x = \frac{OA}{AB} = \frac{-4}{3}$$

प्रश्न 3 निम्नलिखित प्रश्न में अन्य त्रिकोणमितीय फलनो का मान ज्ञात कीजिये:

$\cot x = \frac{3}{4}$,x तृतीया चतुर्थांश में स्थिति है।

उत्तर-

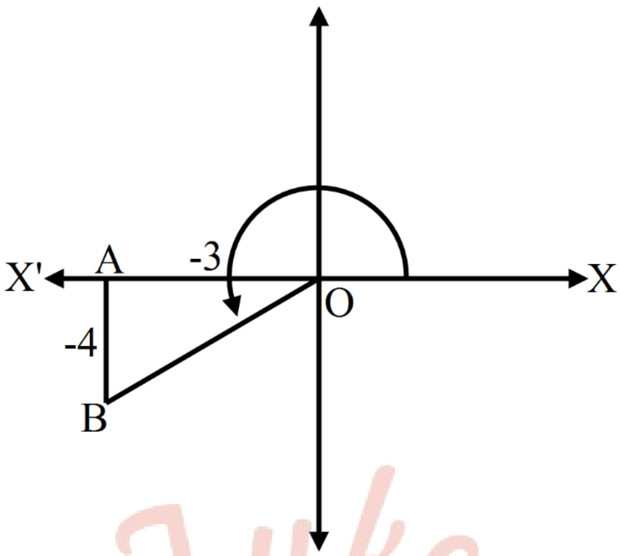
$$\sin x = \frac{3}{4}$$

$$\therefore AB = 4 \text{ इकाई}$$

$$\therefore OB = \sqrt{OA^2 - AB^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ इकाई}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



अब OA = -3 (OX' दिशा में है)

$AB = -4$ (OY' दिशा में है)

$$\sin x = \frac{AB}{OB} = \frac{-4}{5}$$

$$\cos x = \frac{OA}{OB} = \frac{-3}{5}$$

$$\tan\ x = \frac{AB}{OA} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{OB}{AB} = -\frac{5}{4}$$

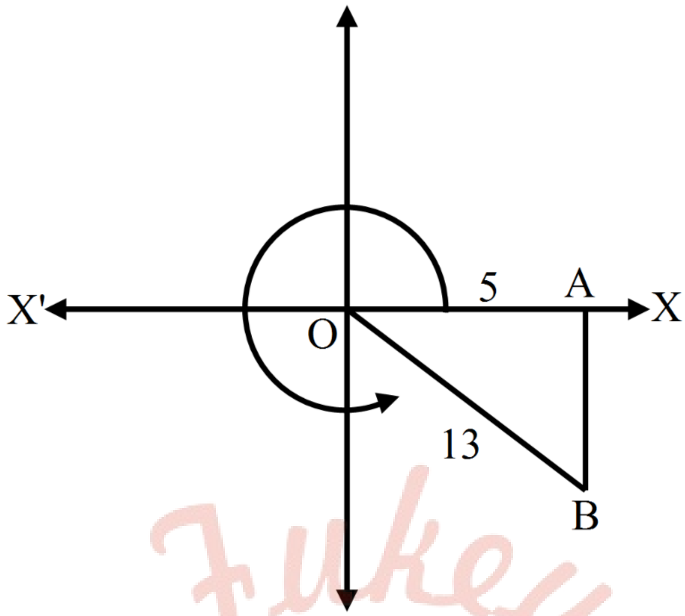
$$\sec x = \frac{OB}{OA} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

प्रश्न 4 निम्नलिखित प्रश्न में अन्य त्रिकोणमितीय फलनो का मान ज्ञात कीजिये:

$\sec x = \frac{13}{5}$,x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थिति है।

उत्तर-

$$\sec x = \frac{13}{5} = \frac{OB}{OA}$$



यहाँ $OB = 13$ इकाई

$\therefore \; OA = 5$ इकाई

$AB = \sqrt{OB^2 - OA^2}$

$= \sqrt{169 - 25}$

$= \pm 12$

अब $OA = 5$ (OX' दिशा में है)

$AB = -12$ (OY' दिशा में है)

$\sin x = \frac{AB}{OB} = \frac{-12}{13} = -\frac{12}{13}, \cos x = \frac{OA}{OB} = \frac{5}{13}$

$\tan x = \frac{AB}{OB} = \frac{-12}{5} = -\frac{12}{5}, \cos x = \frac{OA}{OB} = \frac{5}{13}$

$\operatorname{cosec} x = \frac{OB}{AB} = \frac{13}{-12} = -\frac{13}{12}$

प्रश्न 5 निम्नलिखित प्रश्न में अन्य त्रिकोणमितीय फलनो का मान ज्ञात कीजिये:

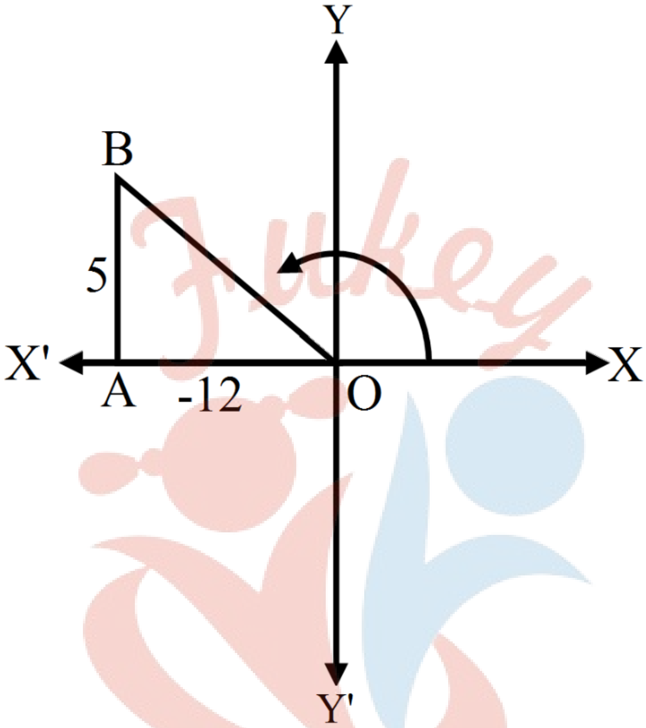
$\tan x = \frac{-5}{12}$, x दूसरे चतुर्थांश में स्थिति है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर-

$$\tan x = \frac{-5}{12}$$

$$\tan x = \frac{-5}{12} = \frac{AB}{OA}$$



यहाँ $AB = 5$ इकाई

$\therefore\ OA = 12$ इकाई

$\therefore OB = \sqrt{25+144} = 13$

अब $OA = -12$ ($\because$ OX' दिशा में है)

$AB = 5$ ($\because$ OY' दिशा में है)

$OB = 13$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\sin x=\frac{AB}{OA}=\frac{5}{13}$$

$$\cos\ x=\frac{OA}{OB}=\frac{-12}{13}=-\frac{12}{13}$$

$$\operatorname{cosec} x=\frac{OA}{AB}=\frac{13}{5}$$

$$\sec\ x\frac{OB}{OA}=-\frac{13}{12}$$

$$\cot\ x=\frac{OA}{AB}=\frac{-12}{5}=\frac{12}{5}$$

प्रश्न 6 मान ज्ञात कीजिये:

sin 765°

उत्तर-

$$\sin 765^{\circ}=\sin(2\times 360+45^{\circ})$$

$$=\sin 45\ \left[\because \sin(360+\theta)=\sin\theta\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

प्रश्न 7 मान ज्ञात कीजिये:

cosec(−1410)°

उत्तर-

$$\operatorname{cosec}(-1410)^{\circ}$$

$$=-\operatorname{cosec}1410\ \left[\because \operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta\right]$$

$$=-\operatorname{cosec}(4\times 360-30^{\circ})$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= -\text{cosec}(-30)^\circ \left[\because \text{cosec}(360+\theta) = -\text{cosec}\theta\right]$$

$$= \text{cosec } 30^\circ \left[\because \text{cosec}(-\theta) = \text{cosec } \theta\right]$$

$$= 2 \left[\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\right]$$

प्रश्न 8 मान ज्ञात कीजिये:

$\tan \dfrac{19\pi}{3}$

उत्तर-

$$\tan \frac{19\pi}{3}$$

$$\tan\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\tan = \frac{\pi}{3} \left[\because \tan(6\pi+\theta) = \tan\theta\right]$$

$$= \tan 60 = \sqrt{3} \left[\because \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta\right]$$

प्रश्न 9 मान ज्ञात कीजिये:

$\sin \dfrac{-11\pi}{3}$

उत्तर-

$$\sin\left(\frac{-11\pi}{3}\right) = -\sin\frac{11\pi}{3} \left[\because \sin(-\theta) = -\sin\theta\right]$$

$$= -\sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) \left[\because \sin(n\pi \pm \theta) = \sin(\pm\theta)\right]$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\sin = \left(\frac{-\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\ [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

प्रश्न 10 मान ज्ञात कीजिये:

$$\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$$

उत्तर-

$$\cot\left(\frac{-15\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{15\pi}{4}\right)\ [\because \cot(-\theta) = -\cot\theta]$$

$$= -\cot\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\cot = \left(\frac{-\pi}{4}\right)\ [\because \cot(2n\pi \pm \theta) = \cot(\pm\theta)]$$

$$= \cot\frac{\pi}{4}\ [\because \cot(-\theta) = -\cot\theta]$$

$$= 1$$

प्रश्नावली 3.3 (पृष्ठ संख्या 81-82)

प्रश्न 1 सिद्ध कीजिये:

$$\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{3} - \tan^2\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

बायाँ पक्ष $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}-\tan^2\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-1^2\left(\because \frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\tan\frac{\pi}{4}=1\right)$$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}$ = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 2 सिद्ध कीजिये:

$$2\sin^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\operatorname{cosec}^2\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\because \sin 30^\circ=\frac{1}{2},\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{4}+\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{4}\ [\because \operatorname{cosec}(\pi+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta]$$

$$=\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{2^2}\ [\because \operatorname{cosec}30^\circ=2]$$

$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 3 सिद्ध कीजिये:

$$\cot^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6}+3\tan^2\frac{\pi}{6}=6$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $\cot^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6}+3\tan^2\frac{\pi}{6}=6$

$$(\sqrt{3})^2+\operatorname{cosec}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left[\therefore \frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$= 3 + \text{cose}\frac{\pi}{6} + 3 \times \frac{1}{3}\ [\because \text{cosec}(\pi - \theta) = \text{cosec}\ \theta]$

$3 + 2 + 1 = 6$ = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 4 सिद्ध कीजिये:

$$2\sin^2\frac{3\pi}{4} + 2\cos^2\frac{\pi}{4} + 2\sec^2\frac{\pi}{3} = 10$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $2\sin^2\frac{3\pi}{4} + 2\cos^2\frac{\pi}{4} + 2\sec^2\frac{\pi}{3} = 10$

$= 2\sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \times (2)^2$

$\left(\because \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sec\frac{\pi}{3} = 2\right)$

$= 2\sin^2\frac{\pi}{4} + \frac{2}{2} + 2 \times 4\ [\because \sin(\pi - \theta) = \sin\theta]$

$= 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{2}{2} + 8\left(\because \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{2}{2} + 1 + 8$

10 = दायाँ पक्ष।

Fukey Education

प्रश्न 5 मान ज्ञात कीजिये:

(i) sin(75°)

(ii) tan15°

उत्तर-

(i)

$$\sin(75^\circ) = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$[\because \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left[\because \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

(ii)

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ \tan 30^\circ} \left(\tan(A\text{-}B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}\right)$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\tan \pi = 1, \tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

प्रश्न 6 सिद्ध कीजिये:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \sin(x+y)$$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$$

बाँया पक्ष $= \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$

$$=\left[\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right]\quad[\because \cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)]$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right)$$

$= \sin(x+y)$ = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 7 सिद्ध कीजिये:

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{(1+\tan x)^2}{(1-\tan x)^2}$$

उत्तर-

बाँया पक्ष $= \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\dfrac{(1+\tan x)^2}{(1-\tan x)^2}$

अब $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

और $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$ के प्रयोग से,

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \frac{\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}}{\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}}$$

$$= \frac{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}}{\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}} \left(\because \tan\frac{\pi}{4}=1\right)$$

$$= \frac{1+\tan x}{1-\tan x} \times \frac{1+\tan x}{1-\tan x} \times \frac{(1+\tan x)^2}{(1-\tan x)^2}$$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्न 8 सिद्ध कीजिये:

$$\frac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x\cos)\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \cot^2 x$$

उत्तर-

बाँया पक्ष $= \dfrac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x\cos)\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \cot^2 x$

अब $\cos(\pi+x) = -\cos x, \cos(-x) = \cos x$

और $\sin(\pi-x) = \sin x, \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$ के प्रयोग से,

बाँया पक्ष $= \dfrac{-\cos x \times \cos x}{\sin x(-\sin x)}$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2$$

$= \cot^2 x$ = दायाँ पक्ष।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 9 सिद्ध कीजिये:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(2\pi+x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi+x)\right]=1$$

उत्तर-

बाँया पक्ष $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(2\pi+x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi+x)\right]$

अब $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x, (2\pi+x)=\cos x]$

$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\tan x$ और $\cot, (2\pi+x)=\cot x$

इन सब का मान रखने पर,

बाँया पक्ष $\sin x \cos x[\tan x+\cot x]$

$$=\sin x \cos x\left[\frac{\sin x}{\cos x}\ \frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$=\sin x \cos x\left[\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x \cos x}\right]$$

$=1$ = दायाँ पक्ष। $[\because \sin^2 x+\cos^2 x=1]$

Fukey Education

प्रश्न 10 सिद्ध कीजिये:

$$\sin(n+1)x\sin(n+2)x+\cos(n+1)x\cos(n+2)x=\cos x$$

उत्तर-

बाँया पक्ष $\sin(n+1)x\sin(n+2)x+\cos(n+1)x\cos(n+2)x=\cos x$

मान लीजिये $(n+2)x=A, (n+1)x=B$

$= \sin B \sin A + \cos B \cos A$

$= \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$= \cos(A - B)$

$= \cos[(n+2)x - (n+1)x]$ [A और B के मान रख कर]

$= \cos(nx + 2x - nx - x)$

$= \cos x$ = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 11 सिद्ध कीजिये:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{2}\sin x$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$

मान लीजिये $\frac{3\pi}{4} + x = A, \frac{3\pi}{4} = x = B$

$= \cos A - \cos B$

$= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\left[\because \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right]$

A और B के मान रख पर

बायाँ पक्ष $-2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4} + x + \frac{3\pi}{4} - x\right) = \sin\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4} + x + \frac{3\pi}{4} - x\right)$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$-2\sin\frac{3\pi}{4}\sin x\left[\because \sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=-2\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$$

$$=-\sqrt{2}\sin x$$ = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 12 सिद्ध कीजिये:

$$\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin 2x\sin 10x$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $\sin^2 6x-\sin^2 4x$

मान लीजिये $\frac{3\pi}{4}+x=A, \frac{3\pi}{4}=x=B$

$$=\sin(6x+4x)\sin(6x-4x)$$

सूत्र $\sin^2 A-\sin 62B=\sin(A+B)\sin(A-B)$ का प्रयोग करें

$$\sin 10x\sin 2x$$

$\sin 2x=\sin 10x$ = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 13 सिद्ध कीजिये:

$$\sin 2x\sin 10x\sin 2x\sin 10x$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $=\cos^2 2x-\cos^2 6x$

$$=1-\sin^2 2x-(1-\sin^2 6x)$$

$$=\sin^2 6x-\sin^2 2x$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$= \sin^2 6x - \sin^2 2x$$

$$= \sin(6x+2x)\sin(6x-2x)$$

$$= \sin 8x \sin 4x$$

$$= \sin 4x \sin 8x$$ = दायाँ पक्ष

प्रश्न 14 सिद्ध कीजिये:

$$\sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x = 4\cos^2 x \ \sin 4x$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $= \sin 2x + 2\sin 4x + \sin 6x$

$$= (\sin 2x + \sin 6x) + 2\sin 4x$$

$$= 2\sin 4x \cos 2x + 2\sin 4x$$

$$= 2\sin 4x(\cos 2x + 1)$$

$$= 2\sin 4x(2\cos^2 x - 1 + 1)$$

$$= 4\sin 4x \cos^2 x$$

$$= 4\cos^2 x \ \sin 4x$$ = दायाँ पक्ष

प्रश्न 15 सिद्ध कीजिये:

$$\cot 4x(\sin 5x + \sin 3x) = \cot x(\sin 5x - \sin 3x)$$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

बायाँ पक्ष $= \cot 4x(\sin 5x + \sin 3x)$

$= \cot 4x.2\sin\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}$ $\left[\because \sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\right]$

$= 2\frac{\cos 4x}{\sin 4x}\sin 4x\cos x$

$= 2\cos 4x\cos x$

दायाँ पक्ष $= \cot x(\sin 5x - \sin 3x)$

$= \frac{\cos x}{\sin x} \times 2\sin x\cos 4x$

$= 2\cos x\cos 4x$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

प्रश्न 16 सिद्ध कीजिये:

$$\frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = -\frac{\sin 2x}{\cos 10x}$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $= \frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x}$

$= \frac{-2\sin\frac{9x+5x}{2}\sin\frac{9x-5x}{2}}{2\cos\frac{17x+3X}{2}\sin\frac{17x-3x}{2}}$ $\left[\begin{array}{l}\because \cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \\ \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C+D}{2}\end{array}\right]$

$= \frac{-\sin 7x\sin 2x}{\cos 10x\sin 7x} = -\frac{\sin 2x}{\cos 10x}$ दायाँ पक्ष।

प्रश्न 17 सिद्ध कीजिये:

$$\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

बायाँ पक्ष $= \dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{\cos 5x+\cos 3x}$

$$= \frac{2 \sin \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}}{2 \cos \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}} \quad \left[\begin{array}{l} \because \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C+D}{2} \\ \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \end{array}\right]$$

$$= \frac{\sin 4x \cos x}{\cos 4x \cos x}$$

$= \tan 4x$ =दायाँ पक्ष।

प्रश्न 18 सिद्ध कीजिये:

$$\frac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y} = \tan \frac{x-y}{2}$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}$

$$= \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} \quad \left[\begin{array}{l} \because \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \\ \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \end{array}\right]$$

$$= \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{\cos \frac{x-y}{2}}$$

$\tan \frac{x-y}{2}$ =दायाँ पक्ष।

प्रश्न 19 सिद्ध कीजिये:

$$\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos x} = \tan 2x$$

उत्तर-

Fukey Education

बायाँ पक्ष $\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos x}$

$$=\frac{2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}}{2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}}\left[\begin{array}{l}\because \sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\\ \cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\end{array}\right]$$

$$=\frac{\sin 2x\cos x}{\cos 2x\cos x}$$

$\tan 2x$ =दायाँ पक्ष।

प्रश्न 20 सिद्ध कीजिये:

$$\frac{\sin x-\sin 3x}{(\sin^2 x-\cos^2 x)}=2\sin x$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $\frac{\sin x-\sin 3x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$

$$=\frac{-2\cos\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}}{-(\cos^2 x-\sin^2 x)}\left[\begin{array}{c}\because \sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\\ \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x\end{array}\right]$$

$$=\frac{-2\cos 2x\sin x}{-\cos 2x}$$

$=2\sin x$ =दायाँ पक्ष।

प्रश्न 21 सिद्ध कीजिये:

$$\frac{\cos 4x+\cos 3x+\cos 2x}{\sin 4x+\sin 3x+\sin 2x}=\cot 3x$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $\frac{\cos 4x+\cos 3x+\cos 2x}{\sin 4x+\sin 3x+\sin 2x}$

$$\frac{(\cos 4x+\cos 2x)+\cos 3x}{(\sin 4x+\sin 2x)+\sin 3x}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \frac{2\cos=\frac{4x+2x}{2}\cos=\frac{4x-2x}{2}+\cos 3x}{2\sin=\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2}+\sin 3x} \quad \left[\begin{array}{l} \because \cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \\ \sin C - \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \end{array}\right]$$

$$= \frac{2\cos 3x\cos x+\cos 3x}{2\sin 3x\cos x+\sin 3x}$$

$$= \frac{\cos 3x(2\cos x+1)}{\sin 3x(2\cos x+1)}$$

$$= \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \cos 3x$$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्न 22 सिद्ध कीजिये:

$$\cot x\cot 2x - \cot 2x\cot 3x - \cot 3x\cot x = 1$$

उत्तर-

$$3x = x + 2x$$

$$\cot 3x = \cot(x+2x) = \frac{\cot x\cot 2x-1}{\cot x+\cot 2x}$$

दोनों पक्षों में $\cot x + \cot 2x$ से गुणा करने पर,

$$\cot 3x(\cot x + \cot 2x) = \frac{\cot x\cot 2x-1}{\cot x+\cot 2x}(\cot x + \cot 2x)$$

या $\cot 3x(\cot x + \cot 2x) = \cot x\cot 2x - 1$

या $\cot 3x\cot x + \cot 3x\cot 2x = \cot x\cot 2x - 1$

या $\cot 3x\cot x + \cot 3x\cot 2x - \cot x\cot 2x = -1$

या $\cot 3x\cot x - \cot 3x\cot 2x + \cot x\cot 2x - 1$

या $\cot x\cot 2x - \cot 2x\cot 3x - \cot 3x\cot x = 1$

प्रश्न 23 सिद्ध कीजिये:

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\tan 4x = \frac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$$

उत्तर-

$$\text{बायाँ पक्ष} = \tan 4x = \tan 2(2x)$$

$$= \frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x} \left[\because \tan A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\right]$$

$\tan 2x$ का मान रखने पर,

$$\tan 4x = \frac{2\left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right)}{1-\left(\frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}\right)} = \frac{\frac{4\tan x}{1-\tan^2 2}}{1-\frac{4\tan^2 x}{(1-\tan^2 x)^2}}$$

$$= \frac{\frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}}{\frac{(1-\tan^2 x)^2-4\tan^2 x}{(1-\tan^2 x)^2}}$$

$$= \frac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{(1-\tan^2 x)^2-4\tan^2 x}$$

$$= \frac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्न 24 सिद्ध कीजिये:

$$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$$

उत्तर-

Fukey Education

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

बायाँ पक्ष $= \cos 4x = \cos 2.(2x)\ (\because 2a = 2\cos^2 A - 1)$

$= 2\cos^2 2x - 1$

$= 2[2\cos^2 x - 1]^2 - 1$

$= 2[4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1] - 1$

$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

$= 1 + 8\cos^4 x - 8\cos^2 x$

$= 1 + 8\cos^2 x(\cos^2 x - 1)$

$1 - 8\cos^2 x \sin^2 x\ [\because 1 - \cos^2 x = \sin^2 x]$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्न 25 सिद्ध कीजिये:

$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $= \cos 6x = \cos 3(2x)\ 2x = A$ मान लिया

$= \cos 3A = \cos(2A + A)$

$= \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin\ A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A \cos A \sin\ A$
$[\because \cos 2A = 2\cos^2 A - 1, \sin 2A = 2\sin A \cos A]$

$= 2\cos^3 A - \cos A\ - 2\cos A(1 - \cos^2 A)\ [\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A]$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= 2\cos^3 A - \cos\ A - 2\cos A + 2\cos^3 A$$

$$= 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$= 4\cos^3 2A - 3\cos 2x$ [A का ,,मान रखने पर]

$$= 4(2\cos^2 x - 1)^3 - 3(2\cos^2 x - 1)\ (\because \cos 2x = 2\cos^2 x - 1)$$

$$= 4[8\cos^6 x - 12\cos^4 x + 6\cos^2 x - 1)] - (6\cos^2 x - 3)$$

$$= 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्नावली 3.4 (पृष्ठ संख्या 86)

प्रश्न 1 निम्नलिखित समीकरण का मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिये:

$\tan x = \sqrt{3}$

उत्तर-

$$\tan x = \sqrt{3}$$

$$= \tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{4\pi}{3}$$

$\therefore$ x के मुख्य मान $= \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

x का व्यापक हल $= n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in Z$

प्रश्न 2 निम्नलिखित समीकरण का मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिये:

sec x = 2

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\sec x = 2$$

$$\text{या } \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore\ x \text{ के मुख्य मान } = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$x \text{ का व्यापक हल } = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in Z$$

प्रश्न 3 निम्नलिखित समीकरण का मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिये:

$\cot x = -\sqrt{3}$

उत्तर-

$$\cot x = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan\frac{\pi}{6}$$

$$= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{5\pi}{6}$$

$$= \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{11\pi}{6}$$

$$x \text{ के मुख्य मान } = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$x \text{ का व्यापक हल } = n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, n \in Z$$

प्रश्न 4 निम्नलिखित समीकरण का मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिये:

cosec x = −2

उत्तर-

Fukey Education

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\operatorname{cosec} x = -2$

या $x = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6}$

$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{6}$

$= \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{11\pi}{6}$

x के मुख्य मान $= \frac{4\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

x का व्यापक मान $= n\pi + (-1)^n\left(\frac{7\pi}{6}\right), n \in z$

प्रश्न 5 निम्नलिखित में से प्रत्येक समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

cos 4x = cos 2x

उत्तर-

$\cos 4x = \cos 2x$

$-2\sin\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2} = 0$

या $\sin 3x \sin x = 0$

i. जब $\sin 3x = 0$, 3x के मुख्य मान $= 0$

$\therefore$ 3x का व्यापक मान $= n\pi$

$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{3}$

ii. जब $\sin x = 0$, x के मुख्य मान $= 0$

$\therefore$ x का व्यापक मान $= n\pi$

दिये गये समीकरण का व्यापक हल $x = n\pi, \frac{n\pi}{3}, nz$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 6 निम्नलिखित में से प्रत्येक समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

cos 3x + cos x – cos 2x = 0

उत्तर-

$$\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$$

$$2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} - \cos 2x = 0$$

या $2\cos 2x\cos x - \cos 2x = 0$

$$\Rightarrow \cos 2x(2\cos x - 1) = 0$$

i. जब $\cos 2x = 0, 2x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $2x$ का व्यापक मान $= (2\pi + 1)\frac{\pi}{2}$

$$\therefore x = (2\pi + 1)\frac{\pi}{4}$$

ii. जब $2\cos x - 1 = 0$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ दिये गये समीकरण का हल $= (2n+1)\frac{\pi}{4}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$

प्रश्न 7 निम्नलिखित में से प्रत्येक समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

sin 2x + cos x = 0

उत्तर-

$$\sin 2x + \cos x = 0$$

$$\therefore 2\sin x\cos x + \cos x = 0 \ [\because \sin 2x = 2\sin x\cos x]$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

या $\cos x(2\sin x+1)=0$

i. जब $\cos x=0, x$

$x=(2\pi+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore x=(2\pi+1)\frac{\pi}{4}$

ii. और जब $2\sin x+1=0$

$\sin x=-\frac{1}{2}=\sin(-30)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{7\pi}{6}$

$x=n\pi+(-1)^n\frac{7\pi}{6}$

दिये गये समीकरण का व्यापक हल $=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\pi+(-1)^n\frac{7\pi}{6}, n\in z$

प्रश्न 8 निम्नलिखित में से प्रत्येक समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

$\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

उत्तर-

$\sec^2 2x=1-\tan 2x$

$1+\tan^2 2x=1-\tan 2x\ [\because \sec^2 A=1\sin+\tan^2 A]$

या $\tan^2 2x+\tan 2x=0$

या $\tan 2x(\tan 2x+1) = 0$

$\therefore \tan 2x = 0$ या $\tan 2x + 1 = 0$

i. जब $\tan 2x = 0$

$2x = n\pi$ या $x = \frac{n\pi}{4}$

ii. जब $\tan 2x + 1 = 0$

$$\tan 2x = -1 = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore 2x = n\pi + \frac{3\pi}{4}$$

या $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$

दिये गये समीकरण का व्यापक हल $= \frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{2}, \frac{3\pi}{8}, n \in z$

प्रश्न 9 निम्नलिखित में से प्रत्येक समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए:

sin x + sin 3x + sin 5x = 0

उत्तर-

$\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

या $(\sin 5x + \sin x) + \sin 3x = 0$

या $2 \sin \frac{5x+x}{2} \cos \frac{5x-x}{2} + \sin 3x = 0 \left[\because \sin c + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}\right]$

या $2 \sin 3x \cos 2x + \sin 3x = 0$

या $\sin 3x(2 \cos 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow \sin 3x = 0$

या $2 \cos 2x + 1 = 0$

जब $2\cos 2x + 1 = 0,$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi = -\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

या $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

अतः हल होगा: $= \frac{n\pi}{3}$ या $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in Z$

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 90)

प्रश्न 1 सिद्ध कीजिए:

$$2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5x}{13} = 0$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5x}{13}$

$$= \cos\frac{10\pi}{13} + \cos\frac{8\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}$$

$$\left[\therefore 2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$= \left(\cos\frac{10\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13}\right) + \left(\cos\frac{8\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}\right)$$

$$= \left[\left(\pi - \frac{3\pi}{13}\right) + \left(\cos\frac{3\pi}{13}\right)\right] + \left[\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{13}\right) + \cos\frac{5\pi}{13}\right]$$

$$= \left(-\cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13}\right) + \left(-\cos\frac{5\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13}\right)$$

$= 0$ = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 2 सिद्ध कीजिए:

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$(\sin 3x + \sin x)\sin x \; + (\cos 3x - \cos x)\cos x = 0$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $(\sin 3x + \sin x)\sin x \; + (\cos 3x - \cos x)\cos x$

$= \sin 3x \sin x + \sin 2x + \cos 3x \cos x - \cos^2 x$

$= (\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x) - (\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= \cos 2x - \cos 2x [\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B]$

$= 0$ = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 3 सिद्ध कीजिए:

$$(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\cos^2 \frac{x+y}{2}$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$

$$= \left(2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \because C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \\ \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \end{array}\right]$$

$$= 4\cos^2\frac{x+y}{2}\left[\cos^2\frac{x-y}{2} + \sin^2\frac{x+y}{2}\right]$$

$$4\cos^2\frac{x+y}{2} \quad \left[\because \cos^2\frac{x-y}{2} + \sin^2\frac{x-y}{2} = 1\right]$$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्न 4 सिद्ध कीजिए:

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\cos^2\frac{x+y}{2}$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$

$$= \left(-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$4\sin^2\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x-y}{2} + 4\cos^2\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x+y}{2}$$

$$= 4\sin^2\frac{x+y}{2}\left[\sin^2\frac{x-y}{2} + \cos^2\frac{x+y}{2}\right]$$

$$4\sin^2\frac{x-y}{2}\left[\because \sin^2\frac{x+y}{2} + \cos^2\frac{x+y}{2} = 1\right]$$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्न 5 सिद्ध कीजिए:

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x\cos 2x\sin 4x$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$

$$= (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x)$$

$$= 2\sin\frac{7x+x}{2}\cos\frac{7x-x}{2} + 2\sin\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}$$

$$\left[\because \sin C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\right]$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= 2\sin 4x \cos 3x + 2\sin 4x \cos x$$

$$= 2\sin 4x(\cos 3x + \cos x)$$

$$4\sin 4x\left(2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}\right)$$

$$\left[\because \cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\right]$$

$$= 2\sin 4x \cos 2x \cos x$$

$$= 4\cos x \cos 2x \sin 4x$$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्न 6 सिद्ध कीजिए:

$$\frac{(\sin 7x+\sin 5x+(\sin 9x+\sin 3x)}{(\cos 7x+\cos 5x)+(\cos 7x+\cos 5x)} = \tan 6x$$

उत्तर-

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{(\sin 7x+\sin 5x+(\sin 9x+\sin 3x)}{(\cos 7x+\cos 5x)+(\cos 7x+\cos 5x)}$$

$$= (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x)$$

$$= \frac{2\sin\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2}+2\sin\frac{9x+3x}{2}\cos\frac{9x-3x}{2}}{2\sin\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2}+2\cos\frac{9x+3x}{2}\cos\frac{9x-3x}{2}}$$

$$= \frac{[2 \sin 6x + \cos x + \sin 6x \cos 3x]}{[2 \cos 6x + \cos x + \cos 6x \cos 3x]}$$

$$= \frac{\sin 6x[\cos x + \cos 3x]}{\cos 6x[\cos x + \cos 3x]}$$

$$= \tan 6x$$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्न 7 सिद्ध कीजिए:

$$\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4 \sin x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$$

उत्तर-

बायाँ पक्ष $\sin 3x + (\sin 2x - \sin x)$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \cos \frac{2x+x}{2} \sin \frac{2x-x}{2}$$

$$\left[\because \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}\right]$$

$$2 \cos \frac{3x}{2}\left[\sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right]$$

$$= 2 \cos \frac{3x}{2}\left[2 \sin \frac{\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}}{2} \cos \frac{\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}}{2}\right]$$

$$= 2 \cos \frac{3x}{2}\left[2 \sin x \cos \frac{x}{2}\right] = 4 \sin x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्न 8

निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में $\frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$ और $\frac{x}{2}$ ज्ञात कीजिए:

$\tan x = -\frac{4}{3}$, x द्वितीय चतुर्थांश में हैं।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

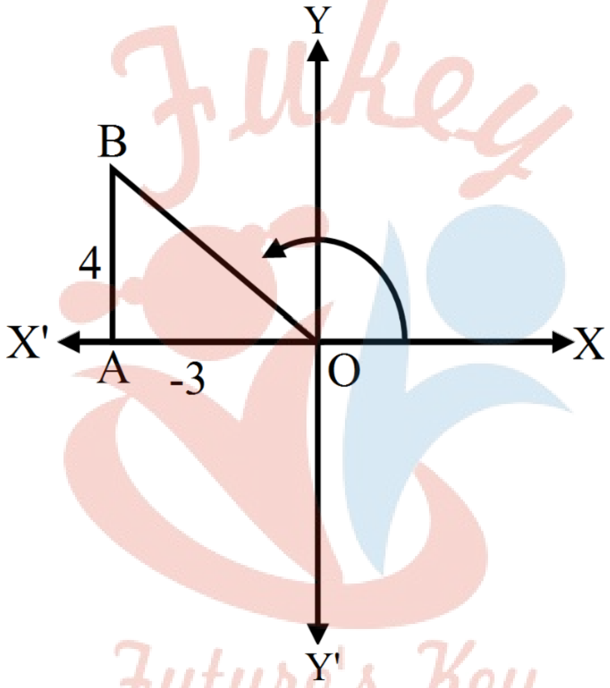
उत्तर-

$\because$ x दूसरे चतुर्थांश में है,

$\therefore$ $\frac{x}{2}$ पहले चतुर्थांश में है इसलिए $\sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}$ और $\frac{x}{y}$ धनात्मक होंगे।

$\because 0 < \frac{x}{2} < 90^\circ$

$\tan x = -\frac{4}{3}$



यहाँ $AB = 4$ इकाई

$\therefore OA = -3$ इकाई

और $OB^2 = \sqrt{AB^2 + OA^2} = \sqrt{16+9} = 5$

$OA = -3$ (OX की दिशा में है।)

$AB = 4$ (OY की दिशा में है।)

अतः $OA = -3, AB = 4, OB = 5$

$\cos x = -\frac{3}{5}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\sin\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}}$$

$$\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

अतः $\sin\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ और $\tan\frac{x}{2} = 2$

प्रश्न 9

निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में $\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ और $\frac{x}{2}$ ज्ञात कीजिए:

$\cos x = \frac{-1}{2}$, x तृतीय चतुर्थांश में हैं।

उत्तर-

$\because$ x तृतीय चतुर्थांश में है,

अर्थात $180^\circ < x < 270^\circ$

$90^\circ < \frac{x}{2} < 135^\circ$

$\Rightarrow \frac{x}{2}$ दूसरे चतुर्थांश में है,

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\therefore \sin\frac{x}{2}$ =धनात्मक है, $\cos\frac{x}{2}$ = ऋणात्मक है, $\tan\frac{x}{2}$ = ऋणात्मक है।

जब $\cos x = -\frac{1}{3}$

$$\sin\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos\frac{x}{5} = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}}$$

$$\sqrt{\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = -\sqrt{2}$$

अतः $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\frac{x}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ और $\tan\frac{x}{2} = -\sqrt{2}$

प्रश्न 10

निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में $\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ और $\frac{x}{2}$ ज्ञात कीजिए:

$\sin x = \frac{1}{4}$, x द्वितीय चतुर्थांश में हैं।

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

x दूसरे चतुर्थांश में है,

$\Rightarrow 90^\circ < x < 180^\circ$

2 से भाग देने पर $45^\circ < \frac{x}{2} < 90^\circ$

$\Rightarrow \frac{x}{2}$ पहले चतुर्थांश में है,

$\therefore \sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}\ \tan\frac{x}{2}$ तीन ही धनात्मक है।

$\sin x = -\frac{1}{4}, \cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$ [x दूसरे चतुर्थेश में है]

$$= \sqrt{1-\frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{15}{4}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{15}+4}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{15}+4)2}{16}}$$

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{15}+8}{4}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{15}}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{8}}$$

$$= \sqrt{\frac{(4-\sqrt{15})2}{16}} = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{15}}{4}}$$

$$\tan\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{15}}{4}}{1-\frac{\sqrt{15}}{4}}}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \sqrt{\frac{\frac{4+\sqrt{15}}{4}}{\frac{4-\sqrt{15}}{4}}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{4-\sqrt{15}}}$$

$$= \sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{4-\sqrt{15}}} \times \sqrt{\frac{4+\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(4+\sqrt{15})^2}{16-15}}$$

$$= 4 + \sqrt{15}$$

अतः $\sin\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{15}+8}{4}$, $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$ और $\tan\frac{x}{2} = 4+\sqrt{15}$

Fukey Future's Key

Fukey Education