गणित

अध्याय-2: संबंध और फलन

sक्रमित युग्म (Ordered pair)

माना दो समुच्चय A और B हैं। यदि aEA,BEB तब (a,b) एक क्रमित युग्म कहलाता है। a को क्रमित युग्म (a,b) का प्रथम सदस्य या प्रथम निर्देशांक (Coordinate) तथा b को द्वितीय सदस्य या द्वितीय निर्देशांक कहते हैं।

दो क्रमित युग्म (a, b) और (c, d) समान कहलायेंगे यदि और केवल यदि ac तथा b =d

$$\boxed{\begin{array}{l}(a,b)=(c,d)\\ \Leftrightarrow a=c, b=d\end{array}}$$

प्रतीक ⇔ का अर्थ “यदि और केवल यदि " होता है।

क्रमित युग्म में अवयव और 6 का क्रम महत्वपूर्ण है।(a,b) और (b,a) दो भिन्न क्रमित युग्म हैं।

कार्तीय गुणन (Cartesian product)

यदि aEA,bEB अवयवों के सभी क्रमित युग्मों (a, b) का समुच्चय, समुच्चयों A और B का कार्तीय गुणन कहलाता है। इसे A x B द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

$$\boxed{A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}}$$

माना, $A=\{a_1, a_2\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3\}$

$a_1 \in A$ के लिये B के सभी अवयवों का क्रमित युग्म

(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3)

अब $a_2 \in A$ के लिए B के सभी अवयवों का क्रमित युग्म

(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)

अत: $A \times B$ में कुल 6 अवयव इस प्रकार होंगे—

$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$

नोट—1. यदि $A=\phi$ या $B=\phi$ तो $A\times B=\phi$.

2. यदि $A\neq\phi$ और $B\neq\phi$ तो $A\times B\neq\phi$.

3. यदि समुच्चय A में m अवयव हैं और समुच्चय B में n अवयव हैं तो $A\times B$ में mn अवयव होंगे।

4. $A=B$ हो, तो $A\times B=A^2$.

उदाहरण—यदि $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5\}$ तो $A\times B$ तथा $B\times A$ ज्ञात कीजिए।

हल : $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5\}$

$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$

$B\times A=\{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$.

कार्तीय गुणनफल का प्रमेय (Theorem of Cartesian products)

यदि A, B, C तीन समुच्चय हों, तो

(i) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

(ii) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

उपपत्ति—(i) मान लीजिए कि $(x,y)\in A\times(B\cup C)$. तब,

$x,y)\in A\times(B\cup C)$

$\Rightarrow$ $x\in A$ और $y\in(B\cup C)$

$\Rightarrow$ $x\in A$ और ($y\in B$ या $y\in C$)

$\Rightarrow$ ($x\in A$ और $y\in B$) या ($x\in A$ और $y\in C$)

$\Rightarrow$ $(x,y)\in(A\times B)$ या $(x,y)\in(A\times C)$

$\Rightarrow$ $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$

$\therefore$ $A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$. ...(1)

पुन: मान लीजिए कि $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$. तब,

$(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$

$\Rightarrow$ $(x,y)\in(A\times B)$ या $(x,y)\in(A\times C)$

$\Rightarrow$ ($x\in A$ और $y\in B$) या ($x\in A$ और $y\in C$)

$\Rightarrow$ $x\in A$ और ($y\in B$ या $y\in C$)

$\Rightarrow$ $x\in A$ और $y\in(B\cup C)$

$\Rightarrow$ $(x,y)\in A\times(B\cup C)$

$\therefore$ $(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$ ...(2)

अत: समी. (1) व (2) से,

$$\boxed{A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)}$$

(ii) मान लीजिए कि $(x,y)\in A\times(B\cap C)$. तब,

$\Rightarrow$ $(x,y)\in A\times(B\cap C)$

$\Rightarrow$ $x\in A$ और $y\in(B\cap C)$

$\Rightarrow$ $x\in A$ और ($y\in B$ और $y\in C$)

$\Rightarrow$ ($x\in A$ और $y\in B$) और ($x\in A$ और $y\in C$)

$\Rightarrow$ $(x,y)\in(A\times B)$ और $(x,y)\in(A\times C)$

$\Rightarrow$ $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$

$\therefore$ $A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)$ ...(1)

पुन: मान लीजिए कि $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$. तब,

$$(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$$

$\Rightarrow\quad (x,y)\in(A\times B)$ और $(x,y)\in(A\times C)$

$\Rightarrow\quad (x\in A$ और $y\in B)$ और $(x\in A$ और $y\in C)$

$\Rightarrow\quad x\in A$ और $(y\in B$ और $y\in C)$

$\Rightarrow\quad x\in A$ और $y\in(B\cap C)$

$\Rightarrow\quad (x,y)\in A\times(B\cap C)$

$$(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C) \qquad ...(2)$$

समी. (1) और (2) से,

$$\boxed{A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)}$$

उदाहरण 1 यदि A, B, C तीन समुच्चय हैं, जहाँ $A \subseteq B$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि-

$A\times C \subseteq B\times C.$

हल : मान लीजिए कि,

$$(x,y)\in(A\times C)$$

$\Rightarrow\quad x\in A$ और $y\in C$

$\Rightarrow\quad x\in B$ और $y\in C, \qquad [\because A\subseteq B]$

$\Rightarrow\quad (x,y)\in(B\times C)$

$\Rightarrow\quad (A\times C)\subseteq(B\times C).$ **यही सिद्ध करना था।**

उदाहरण 2 सिद्ध कीजिए कि –

A – B) × = (A × C) – (B × C)

हल : मान लीजिए कि,

$$(x,y)\in(A\times C)-(B\times C)$$

$\Rightarrow\quad (x,y)\in(A\times C)$ और $(x,y)\notin(B\times C)$

$\Rightarrow\quad (x\in A$ और $y\in C)$ और $(x\notin B$ और $y\in C)$

$\Rightarrow\quad (x\in A$ और $x\notin B)$ और $y\in C$

$\Rightarrow\quad x\in(A-B)$ और $y\in C$

$$(x,y)\in(A-B)\times C$$

$$\therefore\ (A\times C)-(B\times C)\subseteq(A-B)\times C \qquad ...(1)$$

पुन: मान लीजिए कि,

$$(x,y)\in(A-B)\times C$$

$\Rightarrow$ $x\in(A-B)$ और $y\in C$

$\Rightarrow$ $(x\in A$ और $x\notin B)$ और $y\in C$

$\Rightarrow$ $(x\in A$ और $y\in C)$ और $(x\notin B$ और $y\in C)$

$\Rightarrow$ $(x,y)\in(A\times C)$ और $(x,y)\notin(B\times C)$

$\Rightarrow$ $(x,y)\in(A\times C)-(B\times C)$

$\therefore$ $(A-B)\times C\subseteq(A\times C)-(B\times C)\ldots(2)$

अत: समी. (1) और (2) से,

$$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C).$$

यही सिद्ध करना था।

फलन (Function)

जब दो राशियाँ इस प्रकार हों कि उनमें से एक के मान में परिवर्तन करने पर दूसरे के मान में भी परिवर्तन हो, तो ऐसी राशियाँ सम्बद्ध (related) राशियों कहलाती हैं। यदि दो चर x और इस प्रकार सम्बन्धित हों कि x के प्रत्येक मान के लिए y का एक निश्चित मान प्राप्त हो, तो y को x का फलन कहते हैं। इसे y-f(x) लिखते हैं। जैसे-(i) वृत्त का क्षेत्रफल A = Tr, वृत्त की त्रिज्या 7 का फलन है।

(ii) त्रिकोणमितीय अनुपात sin x, cosx, tanx ...... x के फलन हैं।

फलन एक नियम होता है जो दो समुच्चयों के बीच संगतता (Correspondence) स्थापित करता है।

प्रतिचित्रण अथवा फलन (Mapping or Function)

यदि किसी समुच्चय 4 के प्रत्येक अवयव को किसी नियम अथवा निर्देश के द्वारा समुच्चय B के किसी विशिष्ट अर्थात् अद्वितीय अवयव से सम्बन्धित किया जाय तो इस __यदि प्रतिचित्रण f के अन्तर्गत A के अवयव x के संगत B का अवयव y हो तो इस तथ्य को सूक्ष्म भाषा में y-f(x) से प्रदर्शित करते हैं तथा y को x का प्रतिबिम्ब (image) कहते हैं और x को yका पूर्व-प्रतिबिम्ब (pre-image) कहते हैं।

परिभाषा (Definition of A+B)

माना A तथा B दो अरिक्त समुच्चय हैं। फलन ,A से B में एक संबंध है। यदि प्रत्येक अवयव aE4 के लिये अद्वितीय bEB का अस्तित्व है जिससे (ab)=fतो 6 को 1 के अंतर्गत a का प्रतिबिम्ब (image) कहते हैं। a को के अंतर्गत 6 का "पूर्व प्रतिबिम्ब" कहते हैं।

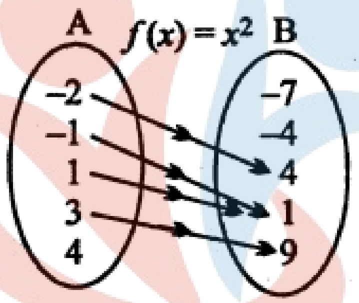
फलन A से B को f: A B से निरूपित करते हैं।

प्रान्त, सह-प्रान्त तथा परिसर (Domain, co-domain and range)

f:A→ B में निर्देश को A से B में प्रतिचित्रण (mapping) कहते हैं। प्रतिचित्रण f:A+B में समुच्चय A,f का डोमेन तथा समुच्चय B,f का सह-डोमेन तथा B के सभी अवयव जोA के प्रतिबिम्ब हैं,f का परिसर कहलाते हैं।

यदि = {-2,-1, 1,3,4,}

तथा B = {-7,-4,1,4,9} तथा f(x)- तो A से B में । का प्रतिचित्रण इस प्रकार होगा Afr)- B



प्रतिचित्रण f : A→ B में,

समुच्चय A, f का डोमेन

समुच्चय B, f का सह-डोमेन

तथा B के सभी अवयव जो A के प्रतिबिम्ब हैं f का परिसर कहलाते हैं।

टिप्पणी-प्रतिचित्रण f : A→ B के लिए

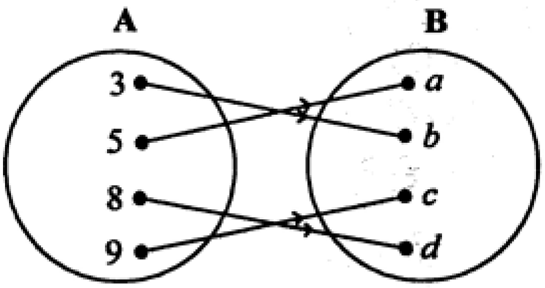
(i) यह आवश्यक है कि डोमेन A के प्रत्येक अवयव के संगत सह-डोमेन B का एक अद्वितीय अवयव हो।

(ii) यह आवश्यक नहीं है कि B का प्रत्येक अवयव, के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब हो।

उदाहरण 1 मान लीजिए कि A = {3, 5, 8,9},

B= {a, b,c,d}

तथा f:A→ B निम्न चित्रानुसार है :

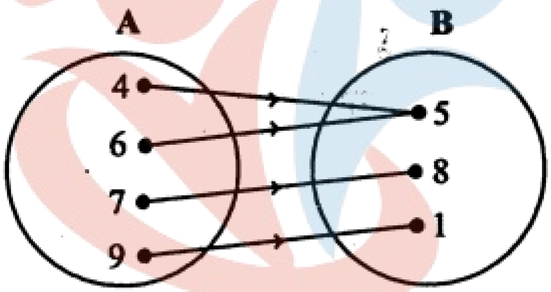


f:4 → B इस प्रकार परिभाषित है :

$f(3) = b, f(5) = a, f(8) = d, f(9) = c$

समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अद्वितीय अवयव से जुड़ा है अत: यह एक फलन है यहाँ फलन का डोमेन {3, 5, 8, 9}, को-डोमेन {a, b, c,d} तथा रेंज-{a, b, c,d} होगी।

उदाहरण 2 यदि = {4,6,7,9}, B= {5,8, 1} तथा f:A→ B निम्न चित्रानुसार है :



f:A→ B इस प्रकार परिभाषित है:

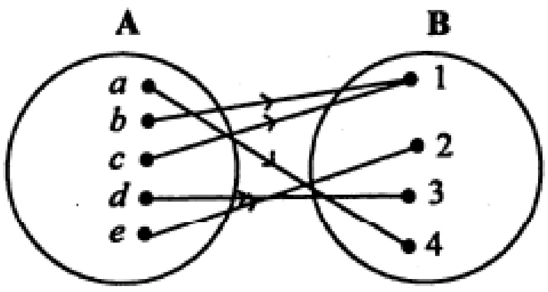
$f(4) = 5, f(6) = 5, f(7) = 8, f(9) = 1$

समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अद्वितीय अवयव से जुड़ा है इसलिए यह एक फलन है। यहाँ फलन का डोमेन {4, 6,7,9} को-डोमेन {5, 8, 1} तथा रेंज {5, 8, 1} होगी।

उदहारण 3 मान लीजिए कि- A = {a,b,c,d,e}

B = {1,2,3,4}

तथा f: A → B निम्न चित्रानुसार है-



$f : A \rightarrow B$

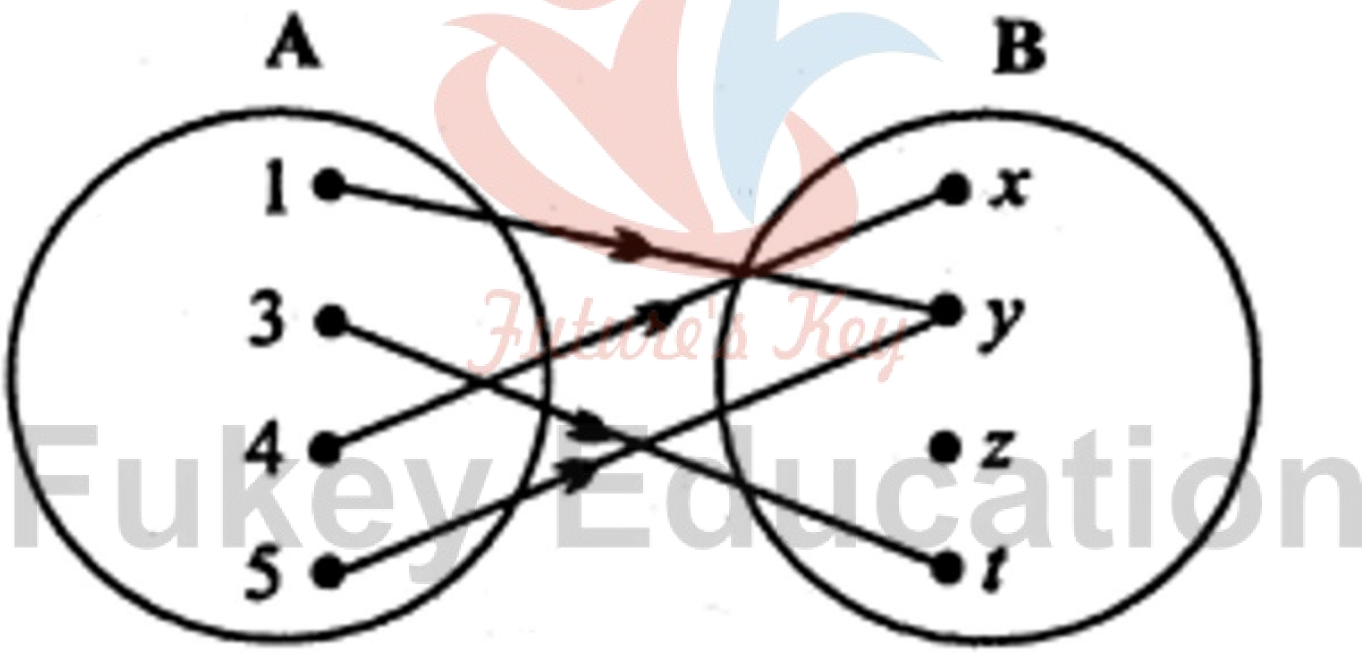
f: A → B *इस प्रकार परिभाषित करते है–*

$f(a) = 4, f(b) = 1, f(c) = 1, f(d) = 3, f(e) = 2$

समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अद्वितीय अवयव से जुड़ा है। अत: यह फलन है। यहाँ फलन का डोमेन {a,b,c,d,e} को-डोमेन (1, 2, 3, 4) तथा रेंज (1, 2, 3, 4) होगी।

उदहारण 4 मान लीजिए कि A = {1, 3, 4, 5},

B = f : A → B निम्न चित्रानुसार है



F : A → B इस प्रकार परिभाषित है :

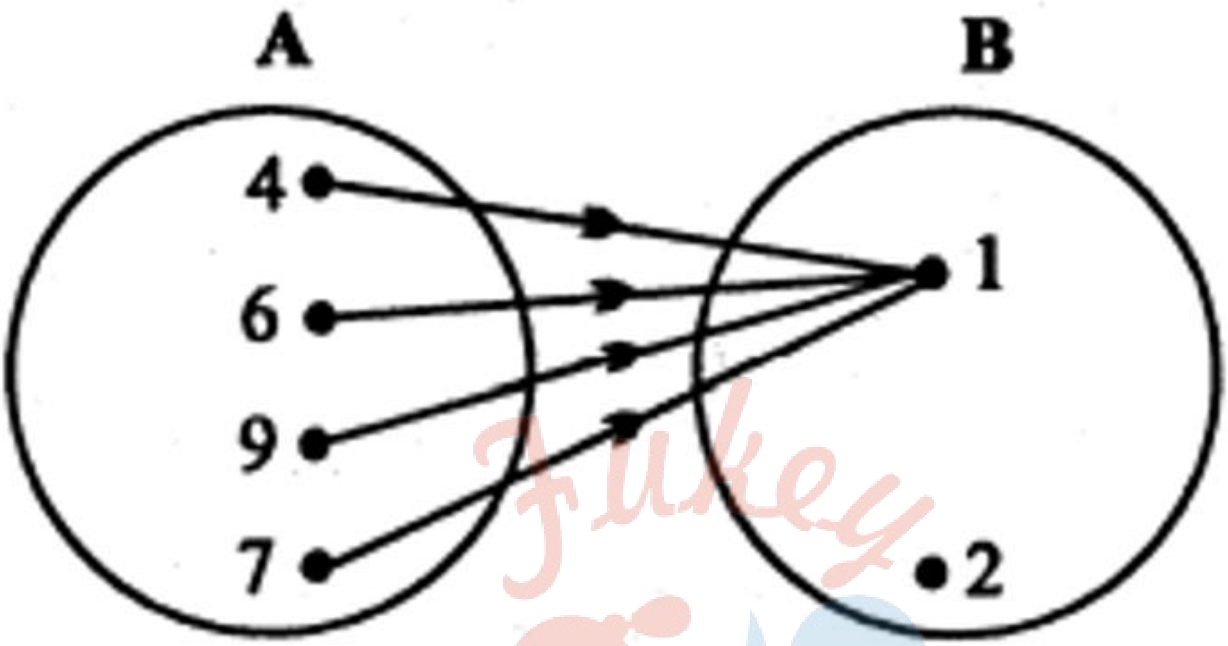
F (1) = y, f (3) = t, f (4) = x ,f (5) = y

समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अद्वितीय अवयव से जुड़ा है अतः यह फलन हैं।

उदाहरण : 5 मान लीजिए कि A = {4, 6,9,7},

B = {1,2}

तथा f :A → B निम्न चित्रानुसार है :



f : A → B

f : A → B इस प्रकार परिभाषित है :

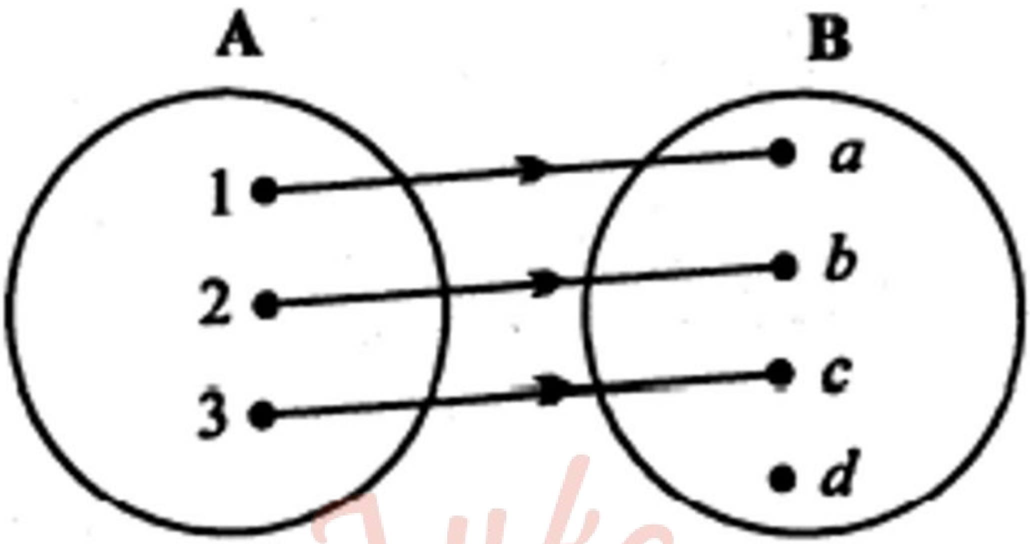
f (4) = 1,f (6) = 1,f (9) = 1, f (7) = 1

समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अद्वितीय अवयव से जुड़ा है अत: यह एक फलन है। यहाँ फलन का डोमेन {4, 6,9,7}, को-डोमेन {1,2} तथा रेंज {1} होगी।

उदहारण 6. यदि A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c, d}

f : A → B इस प्रकार है

f = {(1,a),(2,b),(3,6)}



f : A → B

f : A → B इस प्रकार परिभाषित है :

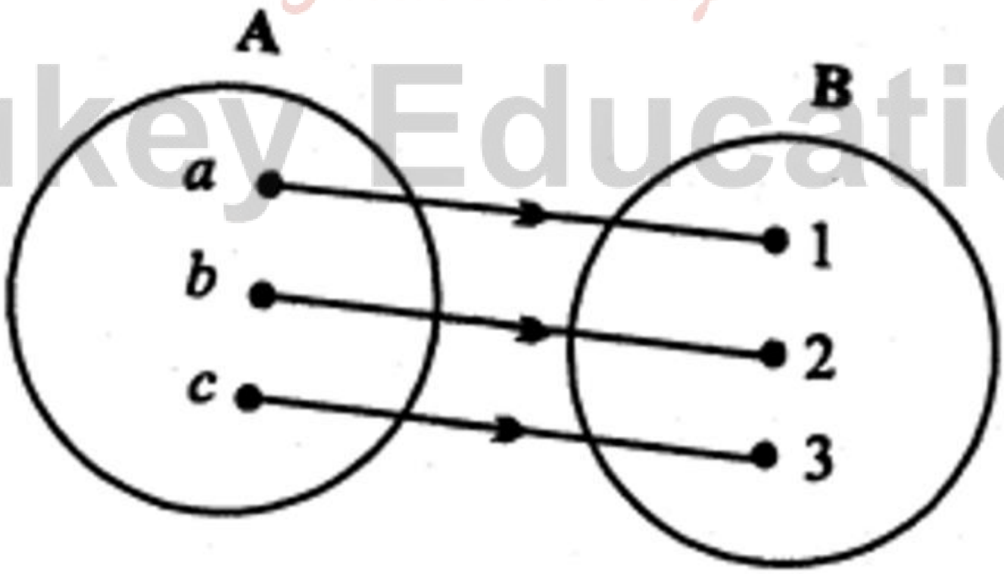
f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c.

समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अद्वितीय अवयव से जुड़ा है। अत: यह एक फलन है।

यहाँ फलन का डोमेन {1,2,3}, को-डोमेन {a, b, c, d} तथा रेंज {a, b, c} होगा।

उदहारण 7. यदि A = {a, b, c}, B = {1, 2, 3} तथा f:A→B इस प्रकार है कि

f = {(a, 1), (b, 2), (c, 3)}



f : A → B इस प्रकार परिभाषित है :

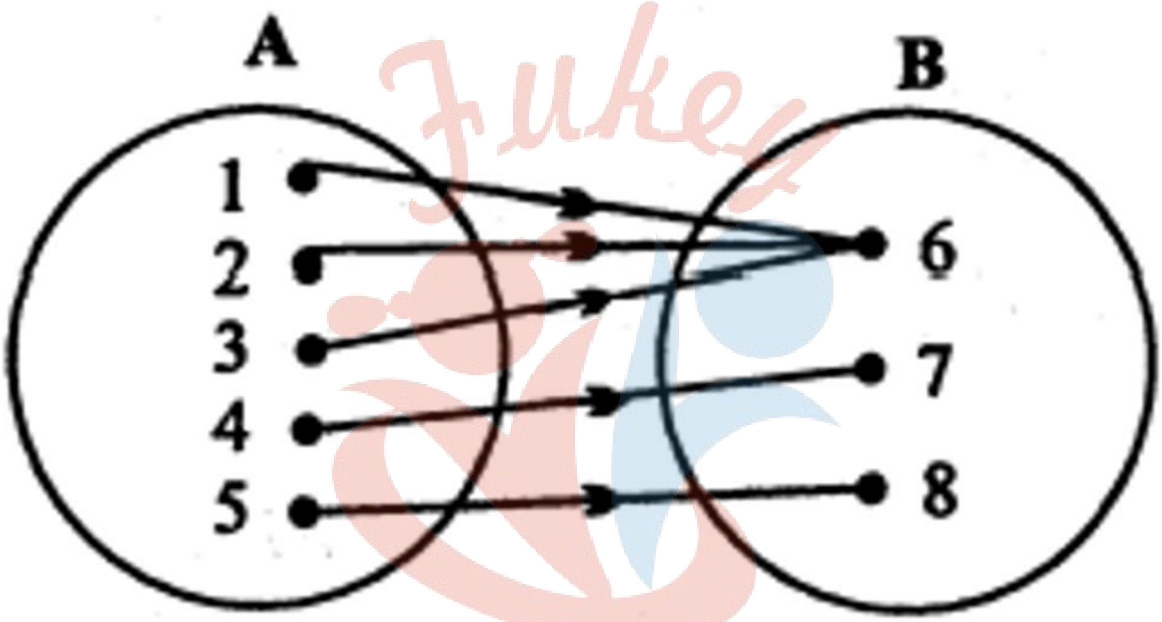
f (a) = 1, f (b) = 2,f (c) = 3

समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अद्वितीय अवयव से जुड़ा है। अतः यह एक फलन है।

यहाँ फलन का डोमेन {a,b,c}, को-डोमेन {1,2,3} तथा रेंज {1,2,3} होगा।

उदहारण 8. यदि A = {1,2,3,4,5}, B = {6,7,8} तथा f : A → B इस प्रकार है कि

F = {(1,6), (2,6), (3,6), (4,7), (5,8)}



f : A → B इस प्रकार परिभाषित है :

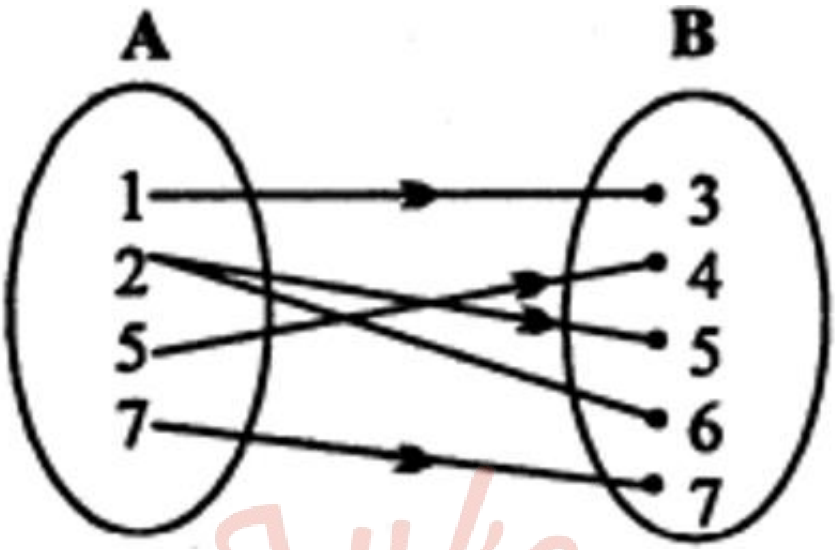
f (1) = 6, f (2) = 6, f (3) = 6, f(4)= 7,f(5) = 8

समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अद्वितीय अवयव से जुड़ा है अत: यह एक फलन है।यहाँ फलन का डोमेन {1,2,3,4,5}, को-डोमेन {6,7,8} तथा रेंज {6, 7, 8} होगी।

उदहारण 9. माना A = {1,2,5,7}

B= {3,4,5,6,7}

माना f :A → B जो इस प्रकार परिभाषित है



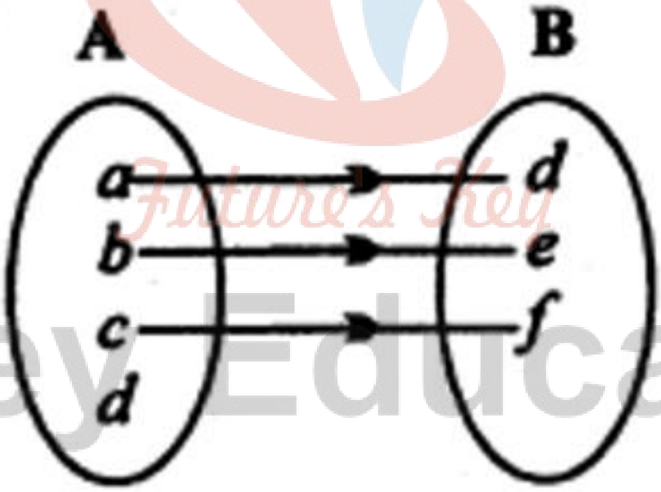
F (1) = 3, f (2) = 5, f (2) = 6, f (5) = 4, f (7) = 7

यहाँ f फलन नहीं है क्योंकि समुच्चय A के अवयव 2 के दो प्रतिबिम्ब 5 और 6 हैं।

उदहारण 10 माना A = {a, b, c, d}

B= {d, e, f}

माना f : A → B जो इस प्रकार परिभाषित है :



f (a) = d, f (b) = e, f (c) = f,

यहाँ। फलन नहीं है, क्योंकि समुच्चय A के अवयव d का समच्चय B में कोई प्रतिबिम्ब नहीं है।

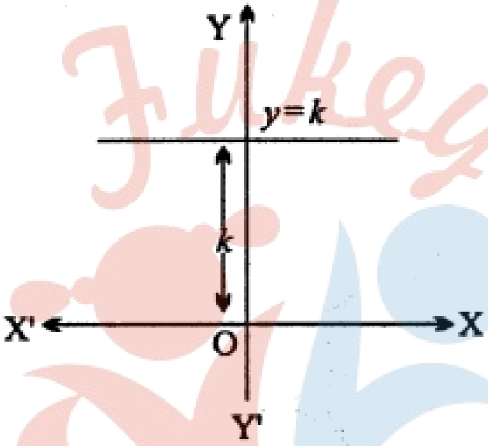
कुछ प्रामाणिक वास्तविक फलन (Some standard real functions)

(i) अचरफलन (Constant function): यदि एक निश्चित वास्तविक संख्या है जो प्रत्येक वास्तविक संख्या x के संगत इस निश्चित संख्या को निर्दिष्ट करता है, तो फलन f(a) को अचर फलन कहते हैं,

यदि f(x) =k.VxER

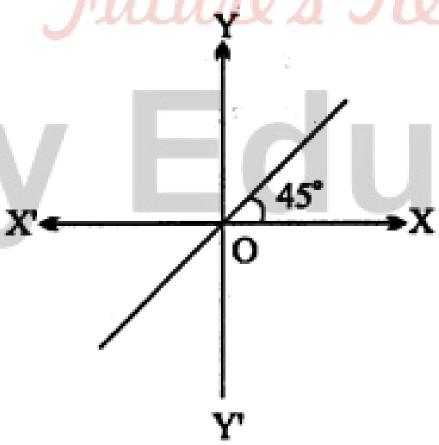
स्पष्टतः फलन का प्रान्त f(D)=R

और फलन का परिसर f(RJ)= {k}



अचर फलन का ग्राफ

(ii) तत्समक फलन (Identity function): तत्समक फलन का ग्राफ मूलबिन्दु से गुजरने वाली एक सरल रेखा है जो x-अक्ष से 45°का कोण बनाती है, अर्थात् जिसकी प्रवणता 1 है।



तत्समक फलन का ग्राफ

(iii) बहुपद फलन (Polynomial function) : वह फलन जो प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत बहुपद P(x) = apx" +ax-l+apx"-2 +.....+an-ix+an

जहाँ a, # 0 तथा n एक ऐसी पूर्णांक संख्या है जो ऋणात्मक नहीं है, को निर्दिष्ट करता है, बहुपद फलन कहलाता है।

बहुपद फलन के कुछ उदाहरण निम्न हैं-

$f(x) = ax^2 + bx + c$,

$P(x) = 2x + 5x^3 + 1$

और $g(x)=3x^2 + 1$ एक विशेष प्रकार का बहुपद फलन है

$f(x) = ax+b, a \neq 0$ यह रैखिक फलन से जाना जाता हैअचर फलन भी एक विशेष प्रकार का बहुपद फलन है। बहुपद फलन का प्रान्त व परिसर R हैं।

(iv) परिमेय फलन (Rational function) : एक परिमेय फलन दो बहुपद फलनों का भागफल होता है फलन $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ के रूप का हो, जहाँ P(x) और Q(x) बहुपद फलन है तथा$Q(x) \neq 0$ एक परिमेय फलन कहलाता है।

उदाहरण के लिए, एक परिमेय फलन है।

$$f(x)=\frac{3x^2+4x+5}{x^2-5x+6}$$

x के उन सभी मानों के लिए जिसका हर शून्य हो, तो परिमेय फलन अपरिभाषित होगा। उदाहरण के लिए,

3x +4x+5

(x-5x+6 यह फलन x के उन मानों के लिए अपरिभाषित होगा जिनके लिए

$$x^2-5x+6=0$$
$$(x-2)(x-3)=0$$
$$x=2,3$$

x=2, x=3 को छोड़कर, अन्य मानों के लिये निश्चित और अद्वितीय मान रखता है।

(v) मापांक फलन (Modulus function): फलन f इस प्रकार परिभाषित है

: $f(x) = |x|$,

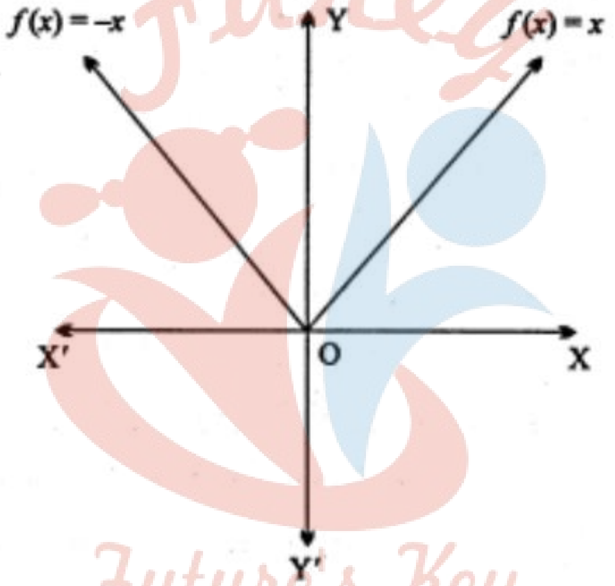
$$|x| = \begin{cases} x & \text{यदि } x \geq 0 \\ -x, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

मापांक फलन कहलाता है।

चूँकि यह सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है, इसलिए फलन का प्रान्त R है।

पुनः|x| का मान 0 या तो धन वास्तविक संख्या होती है।

अत: फलन का परिसर ऋणेत्तर वास्तविक संख्या का समुच्चय है।



स्पष्ट है, y = x रेखा जो मूलबिन्दु से गुजरती है तथा X-अक्ष से 45° का कोण बनाती है। y = -x रेखा जो मूलबिन्दु से गुजरती है तथा X-अक्ष से 130° का कोण बनाती है। इसका ग्राफ चित्र मं दर्शाया गया है।

(vi) सिगनम फलन (Signum function) : फलन इस प्रकार f परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

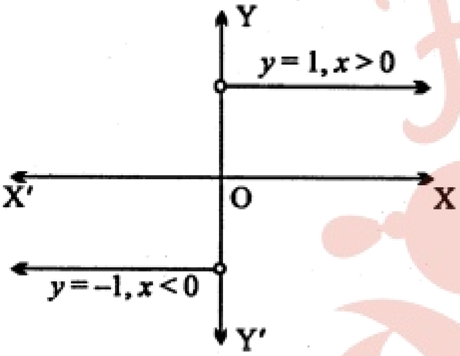
सिगनम फलन कहलाता है। अतः स्पष्ट है कि

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{जब} \quad x>0\\ 0, & \text{जब} \quad x=0\\ -1, & \text{जब} \quad x<0\end{cases}$$

स्पष्ट है कि सिगनम फलन का प्रान्त R है और इसका परिसर {-1, 0, 1} है।

[1x| यदि x0 f(x) = 7'.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & \text{यदि} \quad x\neq 0\\ 0, & \text{यदि} \quad x=0\end{cases}$$



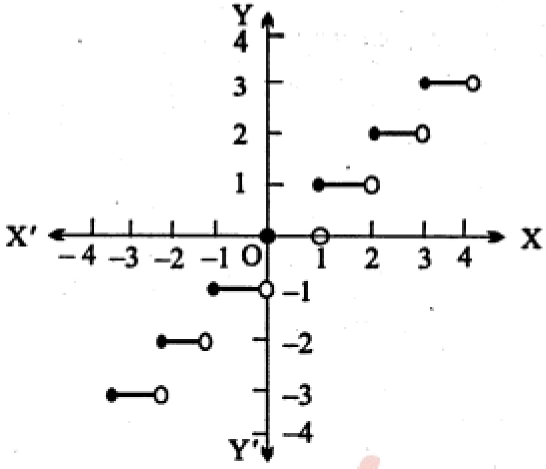
सिगनम फलन का ग्राफ

(vii) महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest integeral function): किसी वास्तविक संख्या x के लिए [:] का मान x से छोटा या बराबर होता है। उदाहरण के लिए,

[0-51] = 0, [2-3] -2

फलन fox) = [x], जहाँ [x] का मान x के बराबर या छोटा होता है तो महत्तम पूर्णांक फलन कहते हैं।

स्पष्ट है कि महत्तम पूर्णांक फलन का प्रान्त वास्तविक संख्या R का समुच्चय है और परिसर सभी पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय है।



$y = [x]$ का ग्राफ

(viii) वर्गमूल फलन (Square root function) : यदि x एक धनात्मक वास्तविक संख्या है और x के संगत $+\sqrt{\{x\}}$ को निर्दिष्ट करें तो वह फलन वर्गमूल फलन कहलाता है।

अर्थात् $f(x) = +\sqrt{\{x\}}$

चूँकि ऋणात्मक वास्तविक संख्या, वास्तविक वर्गमूल नहीं है, इसलिए/ का प्रान्त सभी ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

(ix) चरघातांकी फलन (Exponential function): फलन F इस प्रकार परिभाषित है :

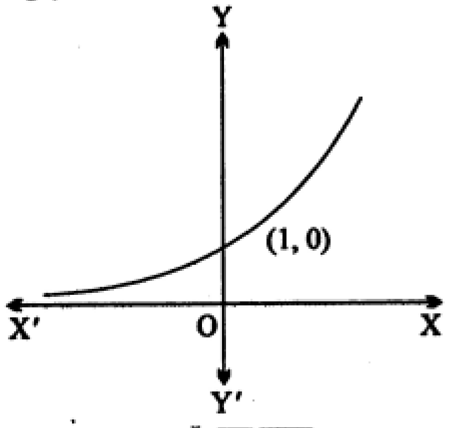
$f(x)=e^x$ चरघातांकी फलन कहलाता है।

चूँकि $f(x)=e^x$ x की वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। स्पष्ट है कि चरघातांकी फलन का प्रान्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R है।

पुनः $\quad y = e^x \Rightarrow x = \log y$

$\because$ $\log y$ अपरिभाषित है जब $y = 0$ या ऋणात्मक है।

$\therefore$ परिसर (f) = धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय।

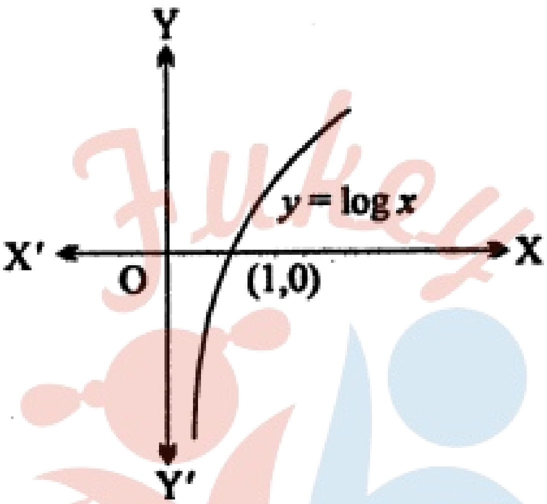


$y = e^x$ का ग्राफ

(x) लघुगणकीय फलन (Logarithmic function): फलन f इस प्रकार परिभाषित है:

f(x)= logx लघुगणकीय फलन कहलाता है।

हम जानते हैं कि log x परिभाषित नहीं है जब x-0 या ऋणात्मक है। अत: लघुगणकीय फलन का प्रान्त धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है अर्थात् R^+, तो परिसर (f) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R.



log x का ग्राफ

(xi) व्युत्क्रम फलन (Reciprocal function) : फलन $f(x) = \frac{1}{x}$, *जहाँ* $x \neq 0$ को व्युत्क्रम फलन कहते हैं। x के ऋणेत्तर मानों के लिए $f(x) = \frac{1}{x}$ का मान अद्वितीय है।

∴ व्युत्क्रम फलनों का प्रान्त R - {0} है, तो

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

स्पष्टत: जब y = 0, अर्थात् f(x) = 0 को छोड़कर वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है।

:: परिसर (1)=R-{0}.

(xii) आवर्ती फलन (Periodic function): यदि किसी फलन (के प्रान्त में प्रत्येकx और 1+x के लिए f(t+x) = f(x), तो f को x का एक आवर्ती फलन कहते हैं और के न्यूनतम धनात्मक मान को फलन का आवर्त कहते हैं।

उदाहरण : (i) f(x) = cos x एक आवर्ती फलन है अत: इसका आवर्तकाल 27 है।

(ii) f (x) - tan x एक आवर्ती फलन है अत: इसका आवर्तकाला है।

(ii) f(x)|sinx|+/cosx|एक आवर्ती फलन है अत: इसका आवर्तकाल है।

(xiii) समफलन (Even function): फलन f(x) समफलन कहलाता है यदि f(-x)= f(x),x के सभी मानों के लिए।

उदाहरण: f(x) = cosx एक समफलन है, चूंकि f(-x) = cos(-x) = cosx= f(x).

(xiv) विषम फलन (Odd function) : फलन f(x) विषम फलन कहलाता है यदि

f(-x)=-f(x),x के सभी मानों के लिए।

उदाहरण – f(x) = sinx एक विषम फलन है, चूंकि f(x) = sin (-x) = sin x = -f(x)

उदाहरण : $f(x)=\frac{/x-4/}{/x-4/}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

F(r)=1x4 जो कि x4 के लिए परिभाषित नहीं है, जहाँ इसका हर शून्य हो जाता है।

अतः प्रान्त, 4 के अतिरिक्त अन्य सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

सम्बन्ध (Relation)-

निम्न वाक्यों पर विचार कीजिए

(i) दिल्ली भारत की राजधानी है।

(ii) श्रीमती इन्दिरा गाँधी पं. जवाहर लाल नेहरू की पुत्री थीं।

(ii) 10,2 से विभाज्य है।

(iv)x,y का घन है।

उपर्युक्त वाक्य ऐसे हैं जिन्हें हम दैनिक प्रयोग में लाते हैं। इनमें से प्रत्येक में दो अवयव हैं जो एक-दूसरे से सम्बन्धित हैं। ये सम्बन्ध पृथक्-पृथक वाक्यों में पृथक्-पृथक् हैं। पहले वाक्य में "राजधानी है " दूसरे में "पुत्री थी", तीसरे में "विभाज्य है", तथा चौथे में “घन है" सम्बन्ध दिये गये हैं। यदि प्रत्येक वाक्य में दिये गये अवयवों में एक को व दूसरे कोष से दर्शाया जाय तथा उपस्थित सम्बन्ध को R से दर्शाया जाय तो प्रत्येक वाक्य को x R y का रूप दिया जा सकता है तथा इस प्रकार इन वाक्यों को व्यापक बनाया जा सकता है।

वाक्य	प्रथम अवयव x	सम्बन्ध R	द्वितीय अवयव y
(i)	दिल्ली	राजधानी है	भारत की
(ii)	श्रीमती इन्दिरा गाँधी	पुत्री थीं	पं. जवाहर लाल नेहरू की
(iii)	10	विभाज्य है	2 से
(iv)	x	घन है	y का।

अतः $x R y$ का अर्थ हुआ x, y से सम्बन्ध R द्वारा जुड़ा है।

अब हम इन सम्बन्धों के बारे में अधिक जानकारी हेतु समुच्चय 4-{1,2,3} पर विचार करते हैं।

कार्तीय गुणनफल की परिभाषा से, AxA = {(1,1),(1,2),
(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2), (3,3)}

मान लीजिए कि सम्बन्ध R_1,R_2, व R_3 क्रमशः<,=,> को प्रदर्शित करते हैं। तब,

(i) सम्बन्ध R_1:

	$x R_1 y$
$\Rightarrow$	$x < y$
यहाँ	$1 R_1 2, 1 R_1 3, 2 R_1 3$
क्योंकि	$1 < 2, 1 < 3, 2 < 3$

यदि R_1,R_1 सम्बन्ध को सन्तुष्ट करने वाले क्रमित युग्मों के समुच्चय को निरूपित करता है, तो

R_1 = {(1,2), (1,3),(2,3)}

(ii) सम्बन्ध R_2:

X R_2 y

$\Rightarrow x = y$

1 R_2 1, 2 R_2 2, 3 R_2 3

क्योंकि 1 = 1, 2 = 2,3 = 3

यदि R_2, R_2, सम्बन्ध को सन्तुष्ट करने वाले क्रमित युग्मों के समुच्चय को निरूपित करता है, तो

R_2 = {(1, 1), (2,2), (3,3)}

(iii) सम्बन्ध R_3:

x R_3 Y

$\Rightarrow x > y$

यहाँ 2 R_3 1,3 R_3 1, 3 R_3 2

क्योंकि 2 > 1, 3 > 1, 3 > 2

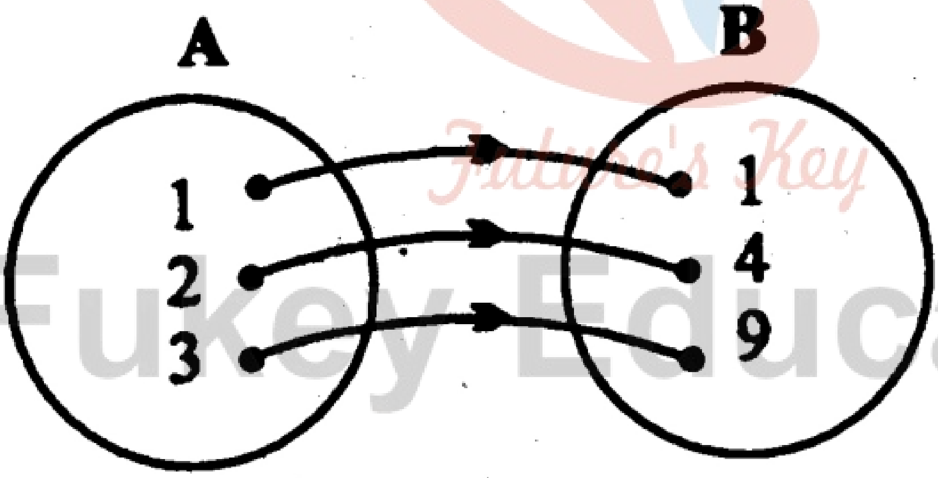
यदि R_3, R_3 सम्बन्ध को सन्तुष्ट करने वाले क्रमित युग्मों के समुच्चय को निरूपित करता है, तो

R_3 = {(2,1), (3, 1), (3,2)}.

उपर्युक्त तीनों स्थितियों में स्पष्ट है कि

$R_1 \subseteq A \times A$
$R_2 \subseteq A \times A$
तथा $R_3 \subseteq A \times A$
अत: "किसी समुच्चय 4 पर कोई सम्बन्ध R, A × A का उपसमुच्चय है।"

पुनः अब हम दो समुच्चयों में सम्बन्ध की चर्चा करेंगे।



मान लीजिए कि 4 = {1,2,3} तथा B = {1, 4,9} तब,

A x B = {(1,1),(1,4),(1,9),(2.1),(2,4),(2,9),(3,1), (3,4),(3,9)}

यदि A से B में एक सम्बन्ध R इस प्रकार है, कि

$(x, y) \in R$ जहाँ $y = x^2; x \in A, y \in B$

तो R = {(1,1),(2,4),(3,9)}

स्पष्ट है कि $R \subseteq A \times B$.

परिभाषा- माना दो समुच्चय A और B हैं। A से B में संबंध A x B का एक उप समुच्चय होता है।

माना A से B में R एक संबंध है। यदि (a,b) ∈ R हो, तो हम कहते हैं कि और a में R संबंध है या a,R के सापेक्ष b से संबंधित है। (a.b) ∈ R को a R b लिखते हैं।

उदाहरण 1. माना {A = {1,2,3,4,5,6} तथा R, A में संबंध इस प्रकार है कि R = {(ab): a-b = 2}

तब R= { (3,1), (4,2), (5,3), (6,4)} स्पष्ट है कि 3R1, 4R2, 5R3 तथा 6R4.

उदाहरण 2. माना प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर संबंध R,a+3b-12 से परिभाषित है। तो

$R = \{a, b): a \in N, b \in N, a + 3b = 12\}$
$= \{(9,1), (6,2), (3,3)\}$
$= 9R1, 6R2, 3R3$

उदाहरण 3. यदि A = {3,5}, B= {7, 11} हो तथा $R = \{(a, b): a \in A, b \in B, a - b$ विषम है तो R ज्ञात कीजिए।

हल : A = {3,5}, B = {17, 11}

a = b के लिये (3-7),(3-11), (5-7), (5-11) विषम संख्याएँ नहीं है। अतः R एक रिक्त संबंध है।

सम्बन्ध का डोमेन और परिसर (Domain and range of relation)

मान लीजिए कि R, समुच्चय से समुच्चय B में कोई सम्बन्ध है अर्थात् $R \subseteq A \times B$ तो Rके क्रमित युग्मों के सभी प्रथम अवयवों का समुच्चय सम्बन्ध R का डोमेन कहलाता है तथा इसे डोमेन R [Dom (R)] से दर्शाया जाता है।

प्रतीकात्मक रूप में,

$$\mathrm{Dom}(R) = \{x : x \in A \text{ तथा } (x, y) \in R$$

पुन: R के क्रमित युग्मों के सभी द्वितीय अवयवों का समुच्चय परिसर R[Range (R)] कहलाता है। प्रतीकात्मक रूप में,

$$\mathrm{Range}(R) = \{y : y \in B \text{ तथा } (x, y) \in R$$

स्पष्ट है कि $Dom\ (R) \subseteq A$ तथा $Range\ (R) \subseteq B$

उदाहरणार्थ : मान लीजिए कि A = {1,2,3} तथा B = {a,b,b}. तथा A से B में कोई सम्बन्ध R इस प्रकार है कि

R= {(1, a), (2,b), (3,b)}

तब, Dom (R) = {1,2,3} = $A \subseteq A$

Range (R) = {a,b,b} = {a,b)$\subseteq B$.

प्रतिलोम संबंध (Inverse relation)

मान लीजिए कि R, A से B में एक सम्बन्ध है, जहाँ

$R = \{(x, y): x \in A, y \in B\}$ तो सम्बन्ध Rका प्रतिलोम सम्बन्ध वह समुच्चय है जो Rके प्रत्येक क्रमित युग्म के अवयवों को परस्पर बदल देने से प्राप्त होता है। इसे R^1 से निरूपित किया जाता है।

इस प्रकार,

$$R^{-1} = \{(x, y): y \in B, x \in A\ (x, y) \in R\}$$

स्पष्ट है कि $(x, y) \in R \ \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$

परिसर R = डोमेन R तथा डोमेन R^{-1} = परिसर R

उदाहरण 1: मान लीजिए कि A- {1,2,3} तथा B = {a, b,c}

पुनः मान लीजिए कि A से B में कोई सम्बन्ध R इस प्रकार है कि

R= {(1,a), (2,b), (3,c)} तब R-1 = {(a, 1), (6, 2), (6,3)}.

उदाहरण 2: माना A-{1,2,3,4} तथा B = {x,y,} माना R,A से B में इस प्रकार परिभाषित संबंध है-

R= {(1,x) (1,2)(3,x)(4,))} R का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है,

R- {(1, 3) (1,2) (3,x) (4,))} R का प्रांत -R के सभी अवयवों के प्रथम घटकों का समुच्चय = {1,3,4} R का परिसर = R के सभी अवयवों के द्वितीय घटकों का समुच्चय = {x,y,z}.

उदाहरण 1. यदि f (x)= $x^2+2x\sin x+3$,तो सिद्ध कीजिए कि f (x),x का एक सम फलन है।

हल : दिया है,

$$f(x)=x^2+2x\sin x+3 \qquad ...(1)$$

समी.(1) में $x=-x$ रखने पर,

$$f(-x)=(-x)^2+2(-x)\sin(-x)+3$$

$$=x^2+2x\sin x+3$$

या $f(-x)=f(x),$ **[समी. (1) से]**

∴ $f(x), x$ का एक सम फलन है।

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 2. यदि f(x)=$x^3+3x+\tan x$, तो सिद्ध कीजिए कि f(x) एक विषम फलन है।

हल : दिया है, $f(x)=x^3+3x+\tan x$

अब, $f(-x)=(-x)^3+3(-x)+\tan(-x)$

$$=-x^3-3x-\tan x$$

$$=-(x^3+3x+\tan x)$$

$$=-f(x)$$

अतः $f(x)$ एक विषम फलन है। यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 3. x का मान ज्ञात कीजिए जब फलन f (x) =3x-1 तथा g(x) = 3+ x समान है।

हल : दिया है,

$$f(x)=g(x)$$

$$3x^2-1=3+x$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - 4x + 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(3x-4) + 1(3x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (3x-4)(x+1) = 0$$

या तो $3x - 4 = 0$ या तो $x + 1 = 0$

$$x = \frac{4}{3} \text{ या } x = -1$$

$$\therefore \; x = -1, \frac{4}{3}.$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 2.1 (पृष्ठ संख्या 38-39)

प्रश्न 1 यदि $\left(\frac{x}{3} + 1, y - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, तो x तथा y तथा ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

दिया है- $\left(\frac{x}{3} + 1, y - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

दोनों पक्षों के क्रमित अवयवों की तुलना से,

अर्थात $\frac{x}{3} + 1 = \frac{5}{3}$ या $\frac{x}{3} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

$x = 2$

$y - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ या $y - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

$x = 2, y = 1.$

प्रश्न 2 यदि समुच्चय A में 3 अवयव हैं तथा समुच्चय B = {3, 4, 5}, तो A × B में अवयवों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- समुच्चयं A में 3 अवयव है और समुच्चय B में भी 3 अवयव हैं।

A × B में अंवयवों की संख्या = 3 × 3 = 9.

प्रश्न 3 यदि G = {7, 8} और H = {5, 4, 2}, तो G × H तथा H × G ज्ञात कीजिए।

उत्तर- G = {7, 8}, H = {5, 4, 2} G × H = {7, 8} × {5, 4, 2}

= {(7, 5), (7, 4), (7, 2), (8, 5), (8, 4), (8, 2)}

तथा H × G = {5, 4, 2} × {7, 8} = {(5, 7), (5, 8), (4,7), (4, 8), (2, 7), (2, 8)}

प्रश्न 4 बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सत्य है या असत्य है। यदि कथन असत्य है, तो दिए गए कथन को सही बनाकर लिखिए।

(i) यदि P= {m, n} और 2 = {n, m} तो P x Q = {(m, n), (n, m)}

(ii) यदि A और B अरिक्त समुच्चय हैं, तो A x B क्रमित युग्मों (x, y) का एक अरिक्त समुच्चय है इस प्रकार कि x ∈ A तथा y ∈ B

(iii) यदि A = {1, 2}, B = {3, 4}, तो A × (B ∩ ϕ) = ϕ

उत्तर-

(i) दिया है-P = {m, n}

Q = {n, m }

P x Q = {m, n} x {n, m} = {(m, n), (m, m), (n, n), (n, m)}

अतः दिया गया P x Q = {(m, n), (n, m)} कथन असत्य है।

(ii) सत्य है क्योंकि A × B क्रमित युग्म (x, y) का अरिक्त समुच्चय है जिसमें x ∈ A तथा y ∈ B.

(iii) सत्य है क्योंकि B ∈ ϕ = ϕ

A × (B ⊂ ϕ) = Axϕ = ϕ

प्रश्न 5 यदि A= {-1, 1}, तो A × A × A ज्ञात कीजिए।

उत्तर- A = {(-1, 1)}

A x A = {-1, 1} x {-1, 1} = {(-1,-1), (-1, 1), (1,- 1), (1,1)}

A x A x A = {-1, 1} x {(-1, – 1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)} = {(-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1)}.

प्रश्न 6 यदि A x B = {(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)} तो A तथा B ज्ञात कीजिए।

उत्तर- A × B = {(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)} = {a, b} x {x, y}

अतः A = {a, b}, B = {x, y}.

प्रश्न 7 मान लीजिए कि A = {1, 2}, B = {1, 2, 3, 4}, C = {5, 6} तथा D = {5, 6, 7, 8} सत्यापित कीजिए कि-

i. A × (B ∩ C) = (A × B) ∩ (A × C)
ii. A × C, B × D का एक उपसमुच्चय है।

उत्तर-

दिया है। A = {1, 2}, B = {1, 2, 3, 4}, C = {5, 6}, D = {5, 6, 7, 8}

बायाँ पक्ष $= \mathrm{Ax}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C})\{1,2\} \times\{1,2,3,4\} \cap\{5,6\}=\{1,2\} \times \phi=\phi$

दायाँ पक्ष $=(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \cap(\mathrm{A} \times \mathrm{C})$

$=[\{1,2\} \times\{1,2,3,4\}] \cap[\{1,2\}\{5,6\}]$

$$= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$
$$\{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$$

$$= \phi$$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$$A \times C = \{1,2\} \times \{5,6\} = \{1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$$

$$B \times D = \{1,2,3,4\} \times \{5,6,7,8\}$$

$$= \{(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),\}$$
$$(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8)$$

हम पाते हैं कि $A \times C$ के सभी अवयव समुच्चय $B \times D$ में स्थित हैं।

अतः $A \times C \subset B \times D.$

प्रश्न 8 मान लीजिए कि A = {1, 2} और B = {3, 4} A × B लिखिए। A × B के कितने उपसमुन्। होंगें? उनकी सूची बनाइए।

उत्तर- A × B = {1, 2} x {3, 4} = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)}

A × B के उपसमुच्चयों की संख्या = 24 = 16

A × B के उपसमुच्चयों के अवयव = 6, {(1, 3)}, {(1,4)}, {(2, 3)}, {(2, 4)}, {(1, 3), (1,4)}, {(1, 3)(2, 3)},{(1, 3), (2, 4)}, {(1, 4), (2, 3)}, {(1, 4), (2,4)}, {(2, 3), (2, 4)}, {(1, 3), (1, 4), (2, 3)}, {(1, 3), (1, 4), (2, 4)}, {(1, 3), (2,3), (2, 4)}, {(1, 4), (2, 3), (2, 4)}, {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)}.

प्रश्न 9 मान लीजिए कि A और B दो समुच्चय हैं, जहाँ n(A) = 3 और n(B) = 2. यदि (x, 1), (y, 2), (z, 1), A × B में हैं, तो A और B को ज्ञात कीजिए, जहाँ x, y और z भिन्न-भिन्न अवयव हैं।

उत्तर- अवयव x, y, z ∈ A अर्थात् A = x, y, z

1, 2 ∈ B अर्थात् B = 1, 2.

प्रश्न 10 कार्तीय गुणन A × A में 9 अवयव हैं जिनमें (-1, 0) तथा (0, 1) भी हैं। समुच्चय A ज्ञात कीजिए तथा A × A के शेष अवयव भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$(-1,0) \in A \times A \Rightarrow -1 \in A \text{ और } 0 \in A \Rightarrow -1, 0 \in A \text{ और}$$

$$(0,1) \in A \Rightarrow 0 \in A \text{ तथा } 1 \in A$$

$$\Rightarrow 0, 1 \in A$$

$$-1, 0, 1 \in A$$

$$A = \{-1, 0, 1\}$$

$$A \times A = \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$$

$$= \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (0,-1), (0,0),\}$$
$$(0,1), (1,-1), (1,0), (1,1)$$

जिसमें $(-1, 0), (0, 1)$ सम्मिलित है।

अतः $A \times A$ के शेष अवयव $= (-1,-1), (-1,1), (0,-1), (0,0), (1,-1), (1,0), (1,1).$

प्रश्नावली 2.2 (पृष्ठ संख्या 41-42)

प्रश्न 1 मान लीजिए A = {1, 2, 3, ...14}, R = {x, y) : 3x - y = 0, जहाँ x, Y ∈ A द्वारा A से A का एक संबंध R लिखिए। इसके प्रांत, सहप्रांत और परिसर लिखिए।

उत्तर- A = {1, 2, 3, ...14}, R : A जबकि R= {(x, y): 3x - y = 0 या y = 3x} = {(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4,12),....}

प्रात- सबध R के समुच्चयों में x के अवयव = {1, 2, 3, 4}

सहप्रांत- {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14}

परिसर- संबंध R के समुच्चयों में के अवयव = {3, 6, 9, 12}

प्रश्न 2 प्राकृत संख्याओं के समुच्चय पर R = {x, y) : y = x + 5, x संख्या 4 से कम, एक प्राकृत संख्या है, x, y ∈ N द्वारा एक संबंध R परिभाषित कीजिए। इस संबंध को

i. रोस्टर रूप में इसके प्रांत और परिसर लिखिए।

उत्तर- संबंध R, दिया गया है। R = {(x, y) : y = x + 5, x, y ∈ N तदा x < 4} = {(1, 6), (2, 7), (3, 8)}

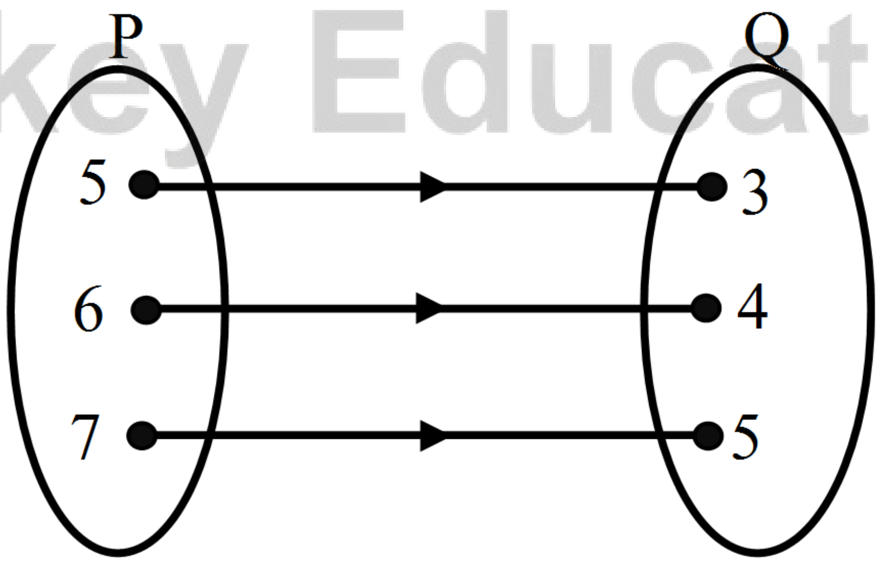
i. प्रान्त = {1, 2, 3}. परिसर = {6, 7, 8}

प्रश्न 3 A = {1, 2, 3, 5) और B = {4, 6, 9}, A से B में एक सम्बन्ध R = {x, y} : x और y का अंतर विषम है, x ∈ A, Y ∈ B} द्वार परिभाषित कीजिए। R को रोस्टर रूप में लिखिए।

उत्तर- दिया है- A = {1, 2, 3, 5} और B = {4, 6, 9}. A से B में संबंध, R = {(x, y) : x, y में अंतर विषम है, x ∈ A, Y ∈ B} = {1, 4,), (1, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (5,4), (5, 6)}.

प्रश्न 4 दी हुई आकृति समुच्चय P से Q का एक संबंर दर्शाती है। इस संबंध को

i. समुच्चय निर्माण रूप में
ii. रोस्टर रूप में लिखिए। इसके प्रांत व परिसर क्या हैं?



उत्तर- समुच्चय निर्माण रूप में, $R = \{(3, y) : y = x - 2, x = 5, 6, 7$ के लिए}

रोस्टर रूप में, $R = \{(5, 3), (6, 4), (7, 5)\}$

प्रान्त = $\{5, 6, 7\}$

और परिसर = $\{3, 4, 5\}$.

प्रश्न 5 मान लीजिए कि $A= \{1, 2, 3, 4, 6\}$ मान लीजिए कि R, A पर {(a, b) : a, b ∈ A, संख्या a संख्या b को यथावथ विभाजित करती है। द्वारा परिभाषित एक संबंध है।

i. R को रोस्टर रूप में लिखिए।
ii. R का प्रांत ज्ञात कीजिए।
iii. R का परिसर ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है :

$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

R = {(a, b) : a, b ∈ A, a संख्या b को विभाजित करती है।

i. रोस्टर रूप में, $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\}$
ii. R का प्रांत = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
iii. R का परिसर = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

प्रश्न 6 $R = \{(x, x + 5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$R = \{(x, x + 5) : x \in \{, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

$$= (0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)$$

R का प्रांत $= 0, 1, 2, 3, 4, 5$

R का परिसर- $5, 6, 7, 8, 9, 10.$

प्रश्न 7 संबंध R = (x, x^3) : x संख्या 10 से कम एक अभाज्य संख्या है। को रोस्टर रूप में लिखिए।

उत्तर- 10 से कम अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7

रोस्टर रूप में, R = (x, x^3) : x एक अभाज्य संख्या है जो 10 से कम है।

={(2,8), (3,27), (5,125), (7,343)}.

प्रश्न 8 मान लीजिए कि A = {x, y, z} और B = {1, 2}, A से B के संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है-

A = {x, y, z}, B = {1, 2}

A × B = {(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2), (z, 1), (z, 2)}

n(A × B) = 6

संबंधों की कुल संख्या = A × B के उपसमुच्चयों की संख्या = 26 = 64.

प्रश्न 9 मान लीजिए कि R, Z पर, R = {(a, b) : a, b ∈ Z, a − b एक पूर्णांक है}, द्वारा परिभाषित एक संबंध है। R के प्रांत व परिसर ज्ञात कीजिए।

उत्तर- R समुच्चय Z पर एक संबंध है तथा R = {(a, b) : a, b ∈ Z, a − b एक पूर्णांक संख्या है।

प्रांत (R) = Z

परिसर (R) = Z.

प्रश्नावली 2.3 (पृष्ठ संख्या 50)

प्रश्न 1 निम्नलिखित संबंध में से कौन से फलन हैं? कारण का उल्लेख कीजिए। यदि संबंध एक फलन है तो उसका परिसर निर्धारित कीजिए।

(i) {(2,1), (5, 1), (8, 1), (11, 1), (14, 1), (17, 1)}

(ii) {(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5), (12, 6), (14, 7)}

(iii) {(1, 3), (1, 5), (2, 5)}

उत्तर-

(i) माना R = {(2, 1), (5, 1), (8, 1), (11, 1), (14, 1), (17, 1)}

यह संबंध एक फलन है क्योंकि किसी भी दो क्रमित युग्म का पहला घटक बराबर नहीं है

प्रान्त = {2, 6, 8, 11, 14, 17} तथा परिसर = {1}.

(ii) माना R = {(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5), (12, 6), (14, 7)}

यह एक फलन है क्योंकि किसी भी दो क्रमित युग्म का पहला घटक बराबर नहीं है।

अतः प्रांत = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}, परिसर = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

(iii) यह एक फलन नहीं है क्योंकि (1, 3), (1, 5) में पहला घटक समान है।

प्रश्न 2 निम्नलिखित वास्तविक फलनो के प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x) = -|x|$

(ii) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

उत्तर-

(i)

दिया है-

$f(x) = -|x|, f(x) \leq 0$ सभी $x \subset R$ के लिए

f का प्रान्त = R

तथा f का परिसर $= \{y : y \in R, y \leq 0 = (-\infty, 0)\}$

(ii)

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

f(x) परिभाषित नहीं है जब 9 - x2 < 0 या x2 > 9

⇒ x > 3 और x < -3

$\therefore$ f परिभषित है जब $-3 \leq x \leq 3$

f का प्रान्त $= -3 \leq x \leq 3, x \in R$

अब मान लीजिए $y = \sqrt{9 - x^2}$ या $y^2 = 9 - x^2$

$x^2 = 9 - y^2, x = \sqrt{9 - y^2}$

f परिभाषित है यदि $9 = y^2 \geq 0$ या $y^2 \leq 9$

$y \leq 3, y \neq$ -ve

f का परिषर $y \leq 3$ और $y \geq 0$

$= \{y : y \leq R$ और $0 \leq y \leq 3\}$

प्रश्न 3 एक फलन $f(x) = 2x - 5$ द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित के मान लिखिए-

(i) $f(0)$

(ii) $f(7)$

(iii) $f(-3)$

उत्तर-

(i) $f(x) = 2x - 5$

$f(0) = 2x(0) - 5 = -5$

(ii) $f(x) = 2x - 5$

$f(7) = 14 - 5 = 9$

(iii) $f(x) = 2x - 5$

$f(-3) = 2x(-3) - 5 = -6 - 5 = -11$

प्रश्न 4 फलन ‘t’ सेल्सियस तापमान का फारेनहाइट तापमान में प्रतिचित्रण करता है, जो $t(C) = \frac{9C}{5} + 32$ द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए-

(i) $t(0)$

(ii) $t(28)$

(iii) $t(-10)$

(iv) C का मान, जब $t(C) = 212$

उत्तर-

(i)

$$t(C) = \frac{9C}{5} + 32$$

$$t(0) = \frac{9}{5} \times 0 + 32 = 0 + 32 = 32$$

(ii)

$$t(C) = \frac{9C}{5} + 32$$

$$t(28) = \frac{9 \times 28}{5} + 32 = \frac{252}{5} + 32$$

$$= \frac{252+160}{5}$$

$$= \frac{412}{5}$$

(iii)

$$t(C) = \frac{9C}{5} + 32$$

$$t(-10) = \frac{9}{5} \times (-10) + 32$$

$$= -18 + 32 = 14$$

(iv)

$$t(C) = \frac{9C}{5} + 32$$

$$t(C) = 212$$

$$\therefore 212 = \frac{9}{5} \times C + 32$$

$$C = \frac{180 \times 5}{9} = 100$$

प्रश्न 5 निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का परिसर ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = 2 - 3x,\ x \in R,\ x > 0.$

(ii) $f(x) = x^2 + 2$, x एक वास्तविक संख्या है।

(iii) $f(x) = x$, एक वास्तविक संख्या है।

उत्तर-

(i)

दिया है-

$f(x) = 2 - 3x,\ x \in R,\ x > 0 = y$ माना

$2 - 3x = y$ या $2 - y = 3x$ या $x = \frac{2-y}{3}$

दिया है- $x > 0$ अर्थात $\frac{2-y}{3} > 0$ या $2 - y > 0$ या $y < 2$

अतः f का परिसर $= y < 2$ या $(-\infty, 2)$

(ii)

$f(x) = y = x^2 + 2, x \in R$

या $x^2 = y - 2$

या $x = \sqrt{y-2}$

अर्थात $y - 2 \leq 0$ या $y \geq 2$

अतः f का परिसर $y = \{y : y \in R$ और $y \geq 2\}$

$= [2, \infty]$

(iii)

$$f(x) = y = x \text{ या } x = y$$

$$x \in R \text{ और } x = y \text{ तब } y \in R$$

$$\text{अतः } f \text{ का परिसर} = \{y : y \in R\} = R.$$

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 52-53)

प्रश्न 1

सम्बन्ध $f, f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 3 \\ 3x, 3 \le x \le 10 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

सम्बन्ध $g, g(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 2 \\ 3x, 2 \le x \le 10 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

दर्शाइए कि क्यों f एक फलन है और g फलन नहीं है।

उत्तर-

i. दिए गए अंतराल $0 \le x \le 3$ में, $f(x) = x^2$ जो कि पूर्णतया परिभाषित है। इस प्रकार अन्तराल $3 \le x \le 10$ में $f(x) = 3x$ भी पूर्णतया परिभाषित है। $x = 3$, हो, तब $x^2 = 9$, और $3x = 9$.

अत $f(3) = 9$ इस प्रकार f एक फलन है।

ii. अंतराल $0 \le x \le 2$ में $g(x) = x^2$ जो कि पूर्णतया परिभाषित है।

अंतराल $2 \le x \le 10$ में $g(x) = 3x$ पूर्णतया परिभाषित है। परन्तु

$x=2$ पर $x =4$ और $3x = 6$

$x = 2$ पर $g(x)$ के दो मान हैं।

अत: संबंध g एक फलन नहीं है। इति सिद्धम्

प्रश्न 2

यदि $f(x) = x^2$ तो $\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$f(x) = x^2$$

$$\therefore\ f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21, \text{ और } f(1) = 1^2 = 1$$

$$\therefore\ \frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1} = \frac{1.21-1}{1.1-1}$$

$$= \frac{0.21}{0.1} = 2.1$$

प्रश्न 3 फलन $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$ का प्रान्त ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{(x-2)(x-6)}$$

$x = 2$ और $x = 6$ पर परिभाषित नहीं है।

अतः फलन का प्रान्त संख्याओं 6 और 2 को छोड़कर शेष वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

प्रश्न 4 $f(x) = \sqrt{x-1}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

यदि x - 1 < 0 या x < 1, फलन परिभाषित नहीं है।

फलन का प्रान्त $= \{x : x \in R, x \geq 1) = [1, \infty)$

मान लीजिए $y = \sqrt{x-1}$ या $y^2 = x - 1$ या $x = 1 + y^2$

अतः फलन का परिसर $= \{y : y \in R, y \geq 0\} = [0, \infty)$

प्रश्न 5 f(x) = |x – 1| द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

उत्तर- f(x) = |x – 1|

x के सभी वास्तविक मूल्यों के लिए फलन परिभाषित है।

f का प्रान्त = R

f(x) = |x – 1|,f का मान जब x ∈ R एक धनात्मक संख्या है।

अतः f का परिसर = ऋणोत्तर वास्तविक संख्याएँ।

प्रश्न 6

मान लीजिए कि $f = \left\{\left(x, \frac{x^2}{1+x^2}\right) : x \in R\right\}$ R से R में फलन है। f का परिसर निर्धारित कीजिए।

उत्तर-

माना $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

या $y + yx^2 = x^2$

या $x^2(1-y) = y$

तब $x^2 = \frac{y}{1-y}$

$$\Rightarrow \ y \neq 1$$

x की सभी वास्तविक मूल्यों के लिए $y \geq 0$

f का अंश हर से सदैव काम है, $y \leq 1$

$\therefore$ f का परिसर = कोई भी धन वास्तविक संख्या इस प्रकार कि $0 \leq x < 1.$

प्रश्न 7 मान लीजिए कि f, g : R → R क्रमशः f(x) = x + 1, g (x) = 2x − 3 द्वारा परिभाषित है। f + g, f − g और $\frac{f}{g}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$f(x) = x + 1, g(x) = 2x - 3$$

$$(f + g) = f(x) + g(x) = x + 1 + 2x - 3 = 3x - 2$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x + 1) - (2x - 3)$$

$$= x + 1 - 2x + 3 = -x + 4$$

और $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{2x-3}$, जबकि $x \neq \frac{3}{2}$.

प्रश्न 8 मान लीजिए कि f = {(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)} Z से Z में, f(x) = ax + b, द्वारा परिभाषित एक फलन है, जहाँ a, b कोई पूर्णांक हैं। a, b को निर्धारित कीजिए।

उत्तर- **दिया है-**

f = {(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)}

और f(x) = ax + b ....(A)

जब x = 1, y = 1, हो तब a + b = 1 ....(i)

और जबे x = 2, y = 3, 2a + b = 3 ....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से,

$a = 2, b = -1$

a तथा b के इन मानों को समीकरण (A) में रखने पर,

$f(x) = 2x - 1$

जब $x = 0, f(x) = -1$

और जब $x = -1, f(x) = -3$

अतः $f(x) = 2x - 1$ तथा $a = 2, b = -1.$

प्रश्न 9 $R = \{(a, b) : a, b \in N$ तथा $a = b^2\}$ द्वारा परिभाषित N से N में, एक संबंध R है। क्या निम्नलिखित कथन सत्य है।

(i) $\{a, a\} \in R$ सभी $a \in N$

(ii) $(a, b) \in R$ का तात्पर्य है की $(b, a) \in R$

(iii) $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ का तात्पर्य है कि $(a, c) \in R$? प्रत्येक दशा में अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

उत्तर-

(i) $a = a$ यह सत्य है जब $a = 0, 0 \notin N$,
अत: यह एक संबंध नहीं है।

(ii) $a = b^2$, और $b = a^2$, यह $a, b \in N$, a, b के सभी मूल्यों के लिए सत्य नहीं है। अत: यह एक संबंध नहीं है।

(iii) जब $a = b^2, b = c^2$ तब $a \neq c^2$
यह संबंध नहीं है।

प्रश्न 10 मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 5, 9, 11, 15, 16\}$ और $f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 1), (4, 5), (2, 11)\}$, क्या निम्नलिखित कथन सत्य है?

i. f, Aसे B में एक संबंध है।

ii. f, A से B में एक फलन है। प्रत्येक दशा में अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

उत्तर- **दिया है-**

i. A = {1, 2, 3, 4} तथा B = {1, 5, 9, 11, 15, 16}

A × B = {(1, 1), (1, 5), (1, 9), (1,11), (1, 15), (1, 16), (2, 1), (2, 5), (2, 9), (2, 11), (2, 15), (2, 16), (3, 1), (3, 5), (3, 9), (3, 11), (3, 15), (3,16), (4, 1), (4, 5), (4,9), (4, 11), (4, 15), (4, 16)}

अवयव, A × B का उपसमुच्चय है।

अतः यह एक संबंध है।

ii. f में (2, 9) और (2, 11) अवयव प्रथम घटक दोनों युग्मों में 2 है। यह फलन नहीं है।

प्रश्न 11 मान लीजिए कि f, f = {(ab, a + b) ; a, b ∈ Z} द्वारा परिभाषित Z × Z का एक उपसमुच्चय है। क्या f, Z से Z में एक फलन है ? अपने उत्तर का औचित्य भी स्पष्ट कीजिए।

उत्तर- मान लीजिए a = 0, b = 1 हो, तब

ab = 0 और a + b = 0 + 1 = 1

पुनः माना a = 0, b = 2 हो, तब

ab = 0, a + b = 2.

अवयव 0 के दो प्रतिबिंब 1 और 2 हैं।

अत: f एक फलन नहीं है।

प्रश्न 12 मान लीजिए कि A= {9, 10, 11, 12, 13} तथा f : A → N, f(n) = n का महत्तम अभाज्य गुणक द्वारा परिभाषित है। f का परिसर ज्ञात करो।

उत्तर- यदि $n = 9 = 3 \times 3$ तो 3 इन गुणनखंडों में सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।

$n = 10 = 2 \times 5$ तो 5 इन गुणनखंडों में सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।

$n = 11 = 1 \times 11$ तो 11 इन गुणनखंडों में सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।

$n = 12 = 22 \times 3$ तो 3 इन गुणनखंडों में सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।

$n = 13 = 1 \times 13$ तो 13 इन गुणनखंडों में सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।

अतः f का परिसर = $\{3, 5, 11, 13\}$.