

# गणित

## अध्याय-2: बहुपद



## बहुपद

चर, अचर, चर के गुणांक तथा ऋणेतर घातांक के जोड़, घटाव या गुणन की क्रिया वाले बीजगणितीय व्यंजक को बहुपद कहा जाता है।

बीजीय बहुपद मुख्यतः दो प्रकार के होते हैं:

- 1) अचर बहुपद
- 2) चर बहुपद

### 1. अचर बहुपद

बहुपद का वैसा पद जिसका मान हमेशा स्थिर रहता है वह अचर बहुपद कहलाता है। जैसे:-  $3x + 5$ ,  $x - 2$ , 2 और 5 अचर बहुपद है क्योंकि इनका मान सदैव स्थिर रहता है। अचर बहुपद वास्तविक या काल्पनिक, दोनों संख्या हो सकते हैं। अचर बहुपद का घात शून्य होता है।

### 2. चर बहुपद

जिन बहुपदों में केवल एक ही चर राशि का प्रयोग किया जाए एक चर वाले बहुपद कहलाते हैं।  $2x^2 - 5x + 7$  इस व्यंजक में  $2x^2$ ,  $-5x$  और 7 तीन पद हैं।

## मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

1. बहुपद का अर्थ
2. बहुपद की घात
3. गुणांक
4. एकपदी, द्विपदी, इत्यादि
5. अचर, रैखिक, द्विघात बहुपद, इत्यादि
6. चर के दिए हुए मान के लिए बहुपद का मान

7. बहुपद के शून्यक
8. शेषफल प्रमेय
9. गुणनखंड प्रमेय
10. मध्यपद को विभक्त कर एक द्विघात बहुपद का गुणनखंडन

## बहुपद की घात

यदि  $p(x)$  एक बहुपद है, तो चर  $x$ , के बहुपद  $p(x)$  में  $x$  की उच्चतम घात, बहुपद की घात कहलाती है।

### उदाहरण

बहुपद  $5x - 4x^2 + 3$  में  $x$  की उच्चतम घात 2 है। इसलिए कह सकते हैं कि दिए गए बहुपद की घात 2 है।

## गुणनखंड बीजीय सर्वसमिकाएँ

गुणनखंड प्रमेय के प्रयोग द्वारा बीजीय व्यंजकों के गुणनखंड बीजीय सर्वसमिकाएँ:

1.  $(x + y)^2 = x^2 + 2x y + y^2$
2.  $(x - y)^2 = x^2 - 2x y + y^2$
3.  $x^2 - y^2 = (x + y) (x - y)$
4.  $(x + a) (x + b) = x^2 + (a + b) x + ab$
5.  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x y + 2y z + 2z x$
6.  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2 y + 3x y^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3x y (x + y)$
7.  $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2 y + 3x y^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3x y (x - y)$
8.  $x^3 + y^3 = (x + y) (x^2 - x y + y^2)$
9.  $x^3 - y^3 = (x - y) (x^2 + x y + y^2)$
10.  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - x y - y z - z x)$

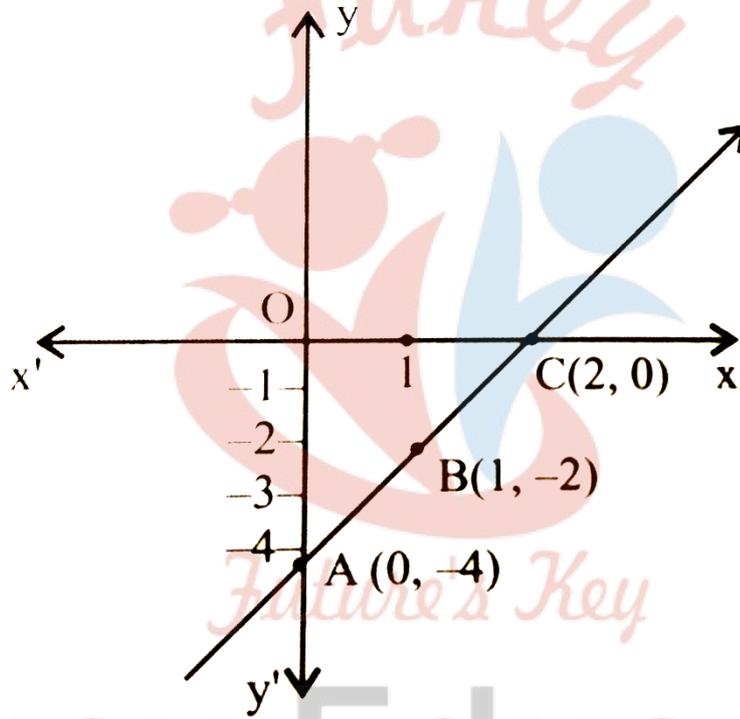
## बहुपद का गुणांक

बहुपद के प्रत्येक पद का एक गुणांक होता है।

उदाहरण के लिए बहुपद  $x^2 + 5x + 4$  को लेते हैं इस बहुपद में अलग-अलग पदों के अलग गुणांक हैं। जैसे  $x^2$  का गुणांक 1 है,  $x$  का गुणांक 5 है तथा अचर पद का गुणांक 4 है।

### रैखिक बहुपद

मान लिया कि  $4x + 2$  एक बहुपद है। इस बहुपद के चर  $x$  का घात 1 है। अतः इस बहुपद को एक घात वाला बहुपद या एक घातीय बहुपद या रैखिक बहुपद कहते हैं।



### द्विघात बहुपद

ऐसे बहुपद जिनमें चर पद की उच्चतम घात दो होती है को द्विघात बहुपद या द्विघाती बहुपद कहते हैं। उदाहरण के लिए बहुपद  $x^2 + x + 2$  में  $x$  की उच्चतम घात दो है अतः यह एक द्विघात बहुपद है।

$a$  का मान ज्ञात कीजिए, यदि  $x - a$  बहुपद  $x^3 - a x^2 + 2x + a - 1$  का एक गुणखंड है।

मान लीजिये  $p(x) = x^3 - a x^2 + 2x + a - 1$

क्योंकि  $x - a$ ,  $p(x)$  का एक गुणखंड है इसलिए  $p(a) = 0$

(3)

$$\text{अर्थात् } a^3 - a(a)^2 + 2a + a - 1 = 0$$

$$\text{या } a^3 - a^3 + 2a + a - 1 = 0$$

$$\text{या } 3a - 1 = 0$$

$$\text{या } a = \frac{1}{3}$$

## चर के दिए हुए मान के लिए बहुपद का मान

यदि  $p(x)$ , चर  $x$  में कोई बहुपद है और  $a$  कोई वास्तविक संख्या है, तो  $p(a)$  में  $x$  को  $a$  से प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त वास्तविक संख्या  $p(x)$  का  $x = a$  पर मान कहलाती है और इसे  $p(a)$  से निरूपित करते हैं।  $a$ ,  $p(x)$  का शून्यक कहलाता है, यदि  $p(a) = 0$  है।

## मध्यपद को विभक्त कर एक द्विघात बहुपद का गुणनखंडन

एक द्विघात बहुपद के गुणनखंड करने के लिए मध्य पद को इस तरह से विभाजित करते हैं कि विभाजित पदों का योग मध्य पद के बराबर होता है तथा गुणनफल प्रथम और अंतिम पद के गुणनफल के बराबर होता है।

एक उदाहरण के माध्यम से इसको समझने का प्रयास करते हैं:

$p(x) = x^2 + 5x + 4$  के गुणनखंड करने के लिए  $5x$  को इस प्रकार विभाजित करते हैं कि विभाजित दोनों पदों का योग  $5x$  के बराबर रहे तथा गुणनफल  $4x^2$  के बराबर हो।

अतः  $5x$  को  $x + 4x$  लिख सकते हैं।

$$x + 4x = 5x \text{ और } x \times 4x = 4x^2$$

$$x^2 + 5x + 4 = x^2 + x + 4x + 4$$

$$= x(x + 1) + 4(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x + 4)$$

घात और पद के आधार पर बहुपदों को निम्न प्रकार से विभाजित किया जा सकता है:

1. अचर बहुपद को 'शून्य बहुपद' कहते हैं। इसमें  $p(x) = 0$
2. रैखिक बहुपद: एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहते हैं।

उदाहरण:  $ax + b$ , जहाँ  $a \neq 0$

3. द्विघात बहुपद: दो घात वाली बहुपदों को द्विघात बहुपद कहा जाता है।

उदाहरण:  $ax^2 + bx + c$ , जहाँ  $a \neq 0$

4. त्रिघात बहुपद: तीन घात वाले बहुपद को त्रिघात बहुपद कहते हैं।

उदाहरण:  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  जहाँ  $a \neq 0$

5. एकपदी बहुपद: एक पद वाले बहुपद को एकपदी बहुपद कहते हैं।

उदाहरण:  $x, 2x, 3y^2, 5a^3$

6. द्विपदी बहुपद:- दो पदों वाले बहुपद को द्विपदी बहुपद कहते हैं।

उदाहरण:  $x + 2, 2x^2 + 5, 2y^2 - 4, 5a^3 + 7$

7. त्रिपदी बहुपद: तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपदी बहुपद कहते हैं।

उदाहरण:  $x^2 + 2x + 5, 2x^3 + x^2 - 5x, 4x^3 - 4x^2 - 8x$

### बहुपद के शून्यक

बहुपद के शून्यक किसी बहुपद में चर के स्थान पर किसी वास्तविक संख्या को प्रतिस्थापित करने पर यदि बहुपद का मान शून्य आ जाये तो वह वास्तविक संख्या बहुपद का शून्यक कहलाती है।

उदाहरण:  $ax - b$  का शून्यक  $b/a$  है।

### बहुपद के शून्यक एवं गुणांक में सम्बन्ध

उदाहरण के लिए एक रैखिक बहुपद  $p(x) = ax + b$  जहाँ  $a \neq 0$  हो, तो  $p(x)$  का शून्यक एक होता है। जिसका मान  $-b/a$  है।

= - (अचर पद) / (x का गुणांक)

यहाँ अचर पद b है तथा x का गुणांक a है।

## शेषफल प्रमेय

मान लीजिए कि  $p(x)$  एक से अधिक या उसके बराबर घात का कोई बहुपद है और मान लीजिए कि  $a$  कोई वास्तविक संख्या है। यदि  $p(x)$  को रैखिक बहुपद  $x - a$  से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल  $p(a)$  होता है।

उदाहरण:

बहुपद  $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x + 1$  को  $x + 1$  से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल:

$p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x + 1$  में  $x = -1$  रखने पर

$$p(-1) = 2(-1)^4 - 3(-1)^3 + 3(-1) + 1$$

$$p(-1) = 2 \times 1 - 3 \times -1 + 3 \times -1 + 1$$

$$= 3$$

शेषफल = 3

## गुणनखंड प्रमेय

यदि बहुपद  $p(x)$  को बहुपद  $g(x)$  से विभाजित किया जाए और शेषफल  $r(x) = 0$  हो तो बहुपद  $g(x)$  बहुपद  $p(x)$  का एक गुणनखंड होगा या हम कह सकते हैं कि यदि  $g(x)$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड है, तो शेषफल  $r(x)$  शून्य होगा।

हल कीजिए क्या  $x + 1$  बहुपद  $x^2 + 4x + 3$  का एक गुणनखंड है?

माना  $p(x) = x^2 + 4x + 3$  और  $x + 1$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड है।

इसप्रकार,  $x = -1$  के लिए  $p(x)$  का मान 0 होगा

इसके सत्यापन्न के लिए  $x = -1$ ,  $p(x)$  में रखते हैं

$$p(-1) = (-1)^2 + 4(-1) + 3$$

$$= 1 - 4 + 3$$

$$p(-1) = 0$$

जिससे सिद्ध होता है कि  $x + 1$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड है।

## बीजीय सर्वसमिकाएँ

बीजीय सर्वसमिका एक बीजीय समीकरण होती है जो कि चरों के सभी मानों के लिए सत्य होती है।

सर्वसमिका- 1:  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

सर्वसमिका- 2:  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

सर्वसमिका- 3:  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

सर्वसमिका- 4:  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

सर्वसमिका- 5:  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

सर्वसमिका- 6:  $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

सर्वसमिका- 7:  $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

सर्वसमिका- 8:  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

## हल सहित उदाहरण

उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके, निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(i)  $(104)^3$

(ii)  $(999)^3$

### उपरोक्त प्रश्न का हल

$$(i) (104)^3 = (100 + 4)^3$$

$$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100 + 4) \text{ (सर्वसमिका- 6 का प्रयोग करने पर)}$$

$$= 1000000 + 64 + 124800$$

$$= 1124864$$

$$(ii) (999)^3 = (1000 - 1)^3$$

$$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1) \text{ (सर्वसमिका- 7 का प्रयोग करने पर)}$$

$$= 1000000000 - 1 - 2997000$$

$$= 997002999$$

### स्मरणीय तथ्य

1. एक पद वाले बहुपद को एकपदी कहा जाता है।
2. दो पदों वाले बहुपद को द्विपद कहा जाता है।
3. तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपद कहा जाता है।
4. एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहा जाता है।
5. दो घात वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद कहा जाता है।
6. तीन घात वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद कहा जाता है।
7. वास्तविक संख्या "a" बहुपद P(x) का एक शून्यक होती है, यदि P(a) = 0 हो।
8. एक चर में प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक अद्वितीय शून्यक होता है। एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं है और प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।
9. शेषफल प्रमेय रू यदि च(ग) एक से अधिक या एक के बराबर घात वाला एक बहुपद हो, और P(x) को रैखिक बहुपद x - a से भाग दिया गया हो, तो शेषफल P(a) होता है।

## NCERT SOLUTIONS

### प्रश्नावली 2.1 (पृष्ठ संख्या 37-38)

प्रश्न 1. निम्नलिखित व्यंजक में एक चर में बहुपद हैं या नहीं हैं? कारण के साथ उत्तर दीजिए-

(i)  $4x^2 - 3x + 7$

(ii)  $y^2 + \sqrt{2}$

(iii)  $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv)  $y + \frac{2}{y}$

(v)  $x^{10} + y^3 + t^{50}$

उत्तर-

(i) यह एक चर में बहुपद है क्योंकि चर घात एक प्राकृत संख्या है।

(ii) यह एक चर में बहुपद है क्योंकि चर घात एक प्राकृत संख्या है।

(iii) यह एक चर में बहुपद नहीं है क्योंकि चर का घात एक भिन्नात्मक संख्या है कोई प्राकृत संख्या नहीं है।

(iv) यह एक चर में बहुपद नहीं है।

(v) यह एक चर में बहुपद नहीं है, बल्कि यह तीन चर में बहुपद है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित में से में  $x^2$  का गुणांक लिखिए।

(i)  $2 + x^2 + x$

(ii)  $2 - x^2 + x^3$

(iii)  $\frac{\pi}{2}x^2 + x$

(iv)  $\sqrt{2x} - 1$

उत्तर-

(i)  $2 + x^2 + x$

$x^2$  का गुणांक = 1

(ii)  $2 - x^2 + x^3$

$x^2$  का गुणांक = -1

(iii)  $\frac{\pi}{2}x^2 + x$

$x^2$  का गुणांक =  $\frac{\pi}{2}$

(iv)  $\sqrt{2x} - 1$

$x^2$  का गुणांक = 0 [क्योंकि यहाँ  $x^2$  नहीं है इसलिए इसका गुणांक शून्य होगा।

प्रश्न 3. घात के द्विपद का और 100 घात के एकपदी का एक-एक उदाहरण दीजिए।

उत्तर- 35 घात का एक द्विपदी-

$\Rightarrow 2x^{35} + 5y$

**Note-** द्विपदी का अर्थ दो पदों वाला व्यंजक जैसे-  $x + 5$ ,  $3a - 2b$ ,  $3t + 7$  आदि।

100 घात का एक एकपदी-

$\Rightarrow 3y^{100}$

**Note-** एकपदी का अर्थ एक पद वाला व्यंजक जैसे-  $3x$ ,  $5t$ ,  $y$ ,  $3xy$  आदि।

प्रश्न 4. निम्नलिखित बहुपद में से प्रत्येक के घात लिखिए-

(i)  $5x^3 + 4x^2 + 7x$

(ii)  $4 - y^2$

(iii)  $5t - \sqrt{7}$

(iv) 3

उत्तर-

(i)  $5x^3 + 4x^2 + 7x$

नोट- बहुत का घात ज्ञात करने के लिए सभी घातों में से सबसे बड़ी घात को चुना जाता है।

(ii)  $4 - y^2$

बहुपद का घात = 2

(iii)  $5t - \sqrt{7}$

बहुपद का घात = 1

(iv) 3

बहुपद का घात = 0

नोट- चूँकि यहाँ कोई चर नहीं है इसलिए बहुपद का घात शून्य (0) है।

प्रश्न 5. निम्नलिखित को रैखिक, द्विघात और त्रिघात बहुपद में वर्गीकृत कीजिए-

(i)  $x^2 + x$

(ii)  $x - x^3$

(iii)  $y + y^2 + 4$

(iv)  $1 + x$

(v)  $3t$

(vi)  $r^2$

(vii)  $7x^2$

उत्तर-

- (i) द्विघात बहुपद।
- (ii) त्रिघात बहुपद।
- (iii) द्विघात बहुपद।
- (iv) रैखिक बहुपद।
- (v) रैखिक बहुपद।

- (vi) द्विघात बहुपद।  
 (vii) त्रिघात बहुपद।

## प्रश्नावली 2.2 (पृष्ठ संख्या 41)

प्रश्न 1. निम्नलिखित पर बहुपद  $5x - 4x^2 + 3$  के मान ज्ञात कीजिए-

- (i)  $x = 0$   
 (ii)  $x = -1$   
 (iii)  $x = 2$

उत्तर-

(i)  $P(x) = 5x - 4x^2 + 3$

बहुपद  $P(x)$  में  $x = 0$  रखने पर

$$P(0) = 5(0) - 4(0)^2 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

अतः बहुपद का मान 3 है।

(ii)  $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

बहुपद  $p(x)$  में  $x = -1$  रखने पर

$$P(1) = 5(-1) - 4(-1)^2 + 3 = -5 - 4 + 3 = -9 + 3 = -6$$

अतः बहुपद का मान -6 है।

(iii)  $p(x) = 5x - 4x^2 + 3$

बहुपद  $p(x)$  में  $x = 2$  रखने पर

$$P(2) = 5(2) - 4(2)^2 + 3 = 10 - 16 + 3 = -3$$

अतः बहुपद का मान -3 है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित बहुपद में  $p(0)$ ,  $p(1)$  और  $p(2)$  ज्ञात कीजिए-

(i)  $p(y) = y^2 - y + 1$

(ii)  $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii)  $p(x) = x^3$

(iv)  $P(x) = (x - 1)(x + 1)$

उत्तर-

(i)  $p(y) = y^2 - y + 1$

$P(0)$  के लिए

$$P(0) = (0)^2 - 0 + 1 = 1$$

$P(1)$  के लिए

$$P(1) = (1)^2 - 1 + 1$$

$$= 1 - 1 + 1 = 1$$

$P(2)$  के लिए

$$P(2) = (2)^2 - 2 + 1$$

$$= 4 - 2 + 1 = 3$$

(ii)  $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

$P(0)$  के लिए

$$P(0) = 2 + 0 + 2(0)^2 - (0)^3 = 2$$

$P(1)$  के लिए

$$P(1) = 2 + 1 + 2(1)^2 - (1)^3 = 4$$

P(2) के लिए

$$P(2) = 2 + 2 + 2(2)^2 - (2)^3$$

$$= 4 + 8 - 8 = 4$$

(iii)  $p(x) = x^3$

P(0) के लिए

$$P(0) = (0)^3 = 0$$

P(1) के लिए

$$P(1) = (1)^3 = 1$$

P(2) के लिए

$$P(2) = (2)^3 = 8$$

(iv)  $P(x) = (x - 1)(x + 1)$

P(0) के लिए

$$P(0) = (0 - 1)(0 + 1) = (-1)(1) = -1$$

P(1) के लिए

$$P(1) = (1 - 1)(1 + 1) = 0(1) = 0$$

P(2) के लिए

$$P(2) = (2 - 1)(2 + 1) = 1(3) = 3$$



# Fukey Education

प्रश्न 3. सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थितियों में संगत बहुपद के शून्यक हैं-

(i)  $p(x) = 3x + 1, x = -\frac{1}{3}$

(ii)  $p(x) = 5x - \pi, x = \frac{4}{5}$

(iii)  $p(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$

(iv)  $p(x) = (x + 1)(x - 2), x = -1, 2$

(v)  $p(x) = x^2, x = 0$

(vi)  $p(x) = lx + m, x = -\frac{m}{l}$

(vii)  $p(x) = 3x^2 - 1, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(viii)  $p(x) = 2x + 1, x = \frac{1}{2}$

उत्तर-

(i)

$$P(x) = 3x + 1$$

$$\text{given } x = \frac{1}{3}$$

$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1$$

$$= -1 + 1$$

$$= 0$$

$p(x) = 0$ , अतः दिया गया  $x$  का मान बहुपद का शून्यक है।

(ii)

$$p(x) = 5x - \pi$$

$$p\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right) - \pi$$

$$= 5 - \pi$$

$$\therefore p(x) \neq 0$$

$\therefore x$  के लिए दिया गया मान  $P(x)$  का शून्यक नहीं है।

(iii)  $p(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$

$$p(1) = 1^2 - 1 = 0$$

$$p(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

इसलिए, 1 और -1  $p(x)$  के शून्यक हैं।

(iv)  $P(x) = (x + 1)(x - 2)$

$x = -1$  के लिए,

$$P(-1) = (-1 + 1)(-1 - 2)$$

$$= 0(3)$$

$$= 0,$$

$x = 2$  के लिए

$$P(2) = (2 + 1)(2 - 2)$$

$$= (3)(0)$$

$$= 0,$$

Fukey Education

दोनों स्थितियों में  $P(x) = 0$ ,

इसलिए  $x = -1, 2$  के बहुपद शून्य हैं।

(v)  $p(x) = x^2$

$$p(0) = (0)^2 = 0,$$

$$p(x) = 0$$

इसलिए  $x = 0$  का बहुपद शून्य है।

(vi)

$$p(x) = lx + m$$

$$p\left(-\frac{m}{l}\right) = \left(1 \times -\frac{m}{1}\right) + m$$

$$= -m + m = 0$$

$$p(x) = 0,$$

इसलिए  $x = -\frac{m}{1}$  का बहुपद शून्य है।

(vii)  
**Fukey Education**

$$p(x) = 3x^2 - 1$$

$$\text{For } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1$$

$$= 1 - 1 = 0$$

$p(x) = 0$ , इसलिए  $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  का बहुपद शून्य है।

$$\text{For } x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$p\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1$$

$$= 4 - 1 = 3$$

$p(x) \neq 0$ , इसलिए  $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$  का बहुपद शून्य नहीं है।

(viii)

$$p(x) = 2x + 1$$

$$\text{For } x = \frac{1}{2}$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$p(x) \neq 0$ , इसलिए  $x = \frac{1}{2}$  का बहुपद शून्य नहीं है।

प्रश्न 4. निम्नलिखित स्थिति में बहुपद का शून्यक ज्ञात कीजिए-

(i)  $P(x) = x + 5$

(ii)  $P(x) = x - 5$

(iii)  $P(x) = 2x + 5$

(iv)  $p(x) = 3x - 2$

(v)  $p(x) = 3x$

(vi)  $P(x) = ax, a \neq 0$

उत्तर-

(i)  $P(x) = x + 5$

$$\Rightarrow x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = -5$$

बहुपद का शून्यक -5 है।

(ii)  $P(x) = x - 5$

$$\Rightarrow x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = 5$$

बहुपद का शून्यक 5 है।

(iii)  $P(x) = 2x + 5$

$$P(x) = 0$$

$$2x + 5 = 0$$

$$2x = -5$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

बहुपद का शून्यक  $-\frac{5}{2}$  है।

(iv)  $p(x) = 3x - 2$

$$3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{3}$$



Fukey Education

बहुपद का शून्यक  $\frac{2}{3}$  है।

(v)  $p(x) = 3x$

$$3x = 0$$

$$3x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{3} \Rightarrow x = 0$$

(vi)  $P(x) = ax, a \neq 0$

$$ax = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{a} \Rightarrow x = 0$$

बहुपद का शून्यक 0 है।

### प्रश्नावली 2.3 (पृष्ठ संख्या 47)

प्रश्न 1.  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  को निम्नलिखित से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए-

(i)  $x + 1$

(ii)  $x - \frac{1}{2}$

(iii)  $x$

(iv)  $x + \pi$

(v)  $5 + 2x$

उत्तर-

(i)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  को  $x + 1$  से भाग देने पर-

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x + 1 \\
 x + 1 \overline{) x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\
 \underline{x^3 + x^2} \phantom{+ 1} \\
 (-) \phantom{(-)} \phantom{+ 1} \\
 2x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{2x^2 + 2x} \phantom{+ 1} \\
 (-) \phantom{(-)} \phantom{+ 1} \\
 x + 1 \\
 \underline{x + 1} \\
 (-) \phantom{(-)} \\
 0
 \end{array}$$

अतः भाग देने पर शेषफल 0 है।

(ii)



# Fukey Education

$$\begin{array}{r}
 x^2 + \frac{5x}{2} + \frac{7}{4} \\
 x + \frac{1}{2} \sqrt{\begin{array}{l} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ x^3 + \frac{x}{2} \\ (-) \quad (-) \end{array}} \\
 \hline
 \frac{5x^2}{2} + 3x + 1 \\
 \frac{5x^2}{2} + \frac{5x}{4} \\
 (-) \quad (-) \\
 \hline
 \frac{7x}{4} + 1 \\
 \frac{7x}{4} + \frac{7}{8} \\
 (-) \quad (-) \\
 \hline
 \frac{1}{8}
 \end{array}$$

अतः भाग देने पर शेषफल  $\frac{1}{8}$  है।

(iii)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  को  $x$  से भाग देने पर-

# Fukey Education

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 3x + 3 \\
 x \sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\
 \underline{x^3} \\
 (-) \quad 3x^2 + 3x + 1 \\
 \quad 3x^2 \\
 \quad \underline{(-)} \quad 3x + 1 \\
 \quad \quad 3x \\
 \quad \quad \underline{(-)} \quad 1 \\
 \quad \quad \quad 1
 \end{array}$$

अतः भाग देने पर शेषफल 1 है।

(iv)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  को  $x + \pi$  से भाग देने पर

$$\begin{array}{r}
 x^2 + (-\pi + 3)x + (\pi^2 - 3\pi + 3) \\
 x + \pi \sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\
 \underline{x^3 + \pi x^2} \\
 (-) \quad (-) \quad (-\pi + 3)x^2 + 3x + 1 \\
 \quad \quad (-\pi + 3)x^2 + (-\pi^2 + 3\pi)x \\
 \quad \quad \underline{(-) \quad (-)} \quad (\pi^2 - 3\pi + 3)x + 1 \\
 \quad \quad \quad (\pi^2 + 3\pi + 3)x + (-\pi^3 - 3\pi^2 + 3\pi) \\
 \quad \quad \quad \underline{(-) \quad (-)} \quad -\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1
 \end{array}$$

अतः भाग देने पर शेषफल  $\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1$  है।

(v) यहाँ  $5 + 2x = 0$

$$\Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \Rightarrow x + \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \\
 x + \frac{5}{2} \overline{) x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\
 \underline{x^3 + \frac{5x^2}{2}} \\
 (-) \quad (-) \\
 \hline
 \frac{x^2}{2} + 3x + 1 \\
 \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{4} \\
 (-) \quad (-) \\
 \hline
 \frac{7x}{4} + 1 \\
 \frac{7x}{4} + \frac{35}{8} \\
 (-) \quad (-) \\
 \hline
 \frac{-27}{8}
 \end{array}$$

अतः भाग देने पर शेषफल  $-\frac{27}{8}$  है।

प्रश्न 2.  $x^3 - ax^2 + 6x - a$  को  $x - a$  से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-  $p(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$  और  $g(x) = x - a$  है।

$g(x) = x - a$  का शून्यक

अतः  $x - a = 0$

$x = a$

अतः शेषफल प्रमेय से-

$p(x)$  को  $x - a$  से भाग देने पर शेषफल प्रमेय द्वारा शेषफल  $p(a)$  प्राप्त होगा।

$$\begin{aligned} \text{इसलिए, } p(a) &= (a)^3 - a(a)^2 + 6(a) - a \\ &= a^3 - a^3 + 6a - a = 5a \end{aligned}$$

अतः शेषफल  $5a$  है।

प्रश्न 3. जाँच कीजिए कि  $7 + 3x$ ,  $3x^3 + 7x$  का एक गुणनखंड है या नहीं।

उत्तर-

$$7 + 3x = 0$$

$$\Rightarrow 3x = -7$$

$$\Rightarrow x = \frac{-7}{3}$$

अतः  $7 + 3x$  का शून्यक  $\frac{-7}{3}$  है।

अब गुणनखंड प्रमेय से-

यदि  $p\left(\frac{-7}{3}\right) = 0$  तो  $7 + 3x$ ,  $3x^3 + 7x$  का एक गुणनखंड है अथवा नहीं है।

$$\text{अतः } p(x) = 3x^3 + 7x$$

$$\text{तो } p\left(\frac{-7}{3}\right) = 3\left(\frac{-7}{3}\right)^3 + 7\left(\frac{-7}{3}\right)$$

$$= \frac{-343}{3} - \frac{49}{3}$$

$$= \frac{-343-147}{9}$$

$$= \frac{-490}{9}$$

चूँकि शेषफल  $\frac{-490}{9}$  है।

अतः  $p(x) \neq 0$  है।

इसलिए  $7 + 3x$ ,  $3x^3 + 7x$  का एक गुणनखंड नहीं है।

## प्रश्नावली 2.4 (पृष्ठ संख्या 52)

प्रश्न 1 बताइए कि निम्नलिखित बहुपद में से गुणनखंड  $x + 1$  है या नहीं?

- (i)  $x^3 + x^2 + x + 1$
- (ii)  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
- (iii)  $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$
- (iv)  $x^3 - x^3 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

उत्तर-

(i)  $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

माना  $g(x) = x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -1$

अब गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग से-

$p(x) = 0$  यदि  $x = -1$   $p(x)$  का शून्यक है।

अतः  $p(x)$  में  $x = -1$  रखने पर

$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$= -1 + 1 - 1 + 1 = 0$

चूँकि  $p(-1) = 0$  इसलिए  $-1$   $p(x)$  का शून्यक है और  $x + 1$   $p(x)$  का एक गुणनखंड है।

(ii)  $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$$\text{माना } g(x) = x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1$$

**अब गुणखण्ड प्रमेय के प्रयोग से-**

$$p(x) = 0 \text{ यदि } x = -1 \text{ } p(x) \text{ का शून्यक है।}$$

अतः  $p(x)$  में  $x = -1$  रखने पर

$$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$$

चूँकि  $p(-1) = 1$  इसलिए  $-1$   $p(x)$  का शून्यक नहीं है इसलिए गुणखण्ड प्रमेय से  $x + 1$   $p(x)$  का एक गुणखण्ड नहीं है।

$$(iii) p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$$

$$\text{माना } g(x) = x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1$$

**अब गुणखण्ड प्रमेय के प्रयोग से-**

$$p(x) = 0 \text{ यदि } x = -1 \text{ } p(x) \text{ का शून्यक है।}$$

अतः  $p(x)$  में  $x = -1$  रखने पर

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$$

$$p(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$$

$$= 1 - 3 + 3 - 1 + 1 = 1$$

चूँकि  $p(-1) = 1$  इसलिए  $-1$   $p(x)$  का शून्यक नहीं है अतः गुणखंड प्रमेय से  $x + 1$   $p(x)$  का एक गुणखंड नहीं है।

$$\text{माना } g(x) = x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1$$

अब गुणखण्ड प्रमेय के प्रयोग से-

$p(x) = 0$  यदि  $x = -1$   $p(x)$  का शून्यक है।

अतः  $p(x)$  में  $x = -1$  रखने पर

इसलिए  $-1$   $p(x)$  का शून्यक नहीं है अतः गुणखंड प्रमेय से  $x + 1$   $p(x)$  का एक गुणखंड नहीं है।

(iv)

$$x^3 - x^3 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$$

$$p(-1) = -(-1)^3 - (-1)^2 - (2 + \sqrt{2})(-1) + \sqrt{2}$$

$$= -1 - 1 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= -2 + 2 + 2\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

चूँकि  $p(-1) = 2\sqrt{2}$  है।

प्रश्न 2 गुणखंड प्रमेय लागू करके बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में  $g(x)$ ,  $p(x)$  का एक गुणखंड है या नहीं-

(i)  $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

$$g(x) = x + 1$$

$$(ii) p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$g(x) = x + 2$$

$$(iii) p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

$$g(x) = x - 3$$

उत्तर-

$$(i) p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$g(x) = x + 1$$

$g(x)$  का शून्यक

$$\Rightarrow x + 1 = 0$$

$$\text{अतः } x = -1$$

गुणनखंड प्रमेय लागू करने पर यदि  $p(-1) = 0$ , तो गुणनखंड है अथवा नहीं।

$$\text{अतः } p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \text{ दिया है।}$$

$$\text{अब, } p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$$

$$= 2(-1) + 1 + 2 - 1 = -2 + 1 + 2 - 1 = 0$$

चूँकि  $p(-1) = 0$  है इसलिए  $-1$   $p(x)$  का एक शून्यक है अतः गुणनखंड प्रमेय से  $x + 1$   $p(x)$  का एक गुणनखंड है।

$$(ii) p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$$

$g(x)$  का शून्यक

$$\Rightarrow x + 2 = 0$$

$$\text{अतः } x = -2$$

गुणनखंड प्रमेय लागु करने पर यदि  $p(-2) = 0$ , तो गुणनखंड है अथवा नहीं।

$$\text{अतः } p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \text{ दिया है।}$$

$$\text{अब, } p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$$

$$= -8 + 12 - 6 + 1 = 13 - 14 = -1$$

चूँकि  $p(-2) = -1$  है इसलिए  $-2$   $p(x)$  का एक शून्यक नहीं है अतः गुणनखंड प्रमेय से  $x + 2$   $p(x)$  का एक गुणनखंड भी नहीं है।

$$(iii) p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 3$$

$g(x)$  का शून्यक

$$\Rightarrow x - 3 = 0$$

$$\text{अतः } x = 3$$

गुणनखंड प्रमेय लागु करने पर यदि  $p(3) = 0$ , तो गुणनखंड है अथवा नहीं।

$$\text{अतः } p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \text{ दिया है}$$

$$\text{अब, } p(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6$$

$$= 27 - 36 + 3 + 6 = 36 - 36 = 0$$

चूँकि  $p(3) = 0$  है इसलिए  $3$   $p(x)$  का एक शून्यक है अतः गुणनखंड प्रमेय से  $x - 3$   $p(x)$  का एक गुणनखंड है।

प्रश्न 3 k का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में  $(x - 1)$ ,  $p(x)$  का एक गुणनखंड हो-

- (i)  $p(x) = x^2 + x + k$
- (ii)  $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$
- (iii)  $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$
- (iv)  $p(x) = kx^2 - 3x + k$

उत्तर-

(i)  $p(x) = x^2 + x + k$

$x - 1$   $p(x)$  का एक गुणनखंड है।

इसलिए  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

अतः 1  $p(x)$  का शून्यक है।

इसलिए  $p(1) = 0$

अब  $p(x) = x^2 + x + k = 0$

$p(1) = (1)^2 + (1) + k = 0$

$1 + 1 + k = 0$

$2 + k = 0$

$k = -2$

(ii)  $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

चूँकि  $x - 1$   $p(x)$  का एक गुणनखंड है।

इसलिए  $x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x = 1$$

अतः 1  $p(x)$  का शून्यक है।

इसलिए  $p(1) = 0$

$$\text{अब } p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2} = 0$$

$$p(1) = 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2} = 0$$

$$2 + k + \sqrt{2} = 0$$

$$k = -2 - \sqrt{2}$$

$$k = -(2 + \sqrt{2})$$

(iii)

$$p(x) = kx^2 - \sqrt{2x} + 1$$

चूँकि  $x - 1$   $p(x)$  का एक गुणनखंड है।

$$\text{इसलिए } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

अतः 1  $p(x)$  का शून्यक है।

$$\text{इसलिए } p(1) = 0$$

$$\text{अब } p(x) = kx^2 - \sqrt{2x} + 1$$

$$p(1) = k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1 = 0$$

$$k - \sqrt{2} + 1 = 0$$

$$k = \sqrt{2} - 1$$

$$(iv) p(x) = kx^2 - 3x + k$$

चूँकि  $x - 1$   $p(x)$  का एक गुणखंड है।

$$\text{इसलिए } x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

अतः 1  $p(x)$  का शून्यक है।

$$\text{इसलिए } p(1) = 0$$

$$\text{अब } p(x) = kx^2 - 3x + k = 0$$

$$p(1) = k(1)^2 - 3(1) + k = 0$$

$$k - 3 + k = 0$$

$$2k - 3 = 0$$

$$2k = 3$$

$$k = \frac{3}{2}$$

प्रश्न 4 5 गुणखंड ज्ञात कीजिए-

$$(i) 12x^2 - 7x + 1$$

$$(ii) 2x^2 + 7x + 3$$

$$(iii) 6x^2 + 5x - 6$$

$$(iv) 3x^2 - x - 4$$

उत्तर-

$$(i) 12x^2 - 7x + 1$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 3x - 4x + 1$$

$$\Rightarrow 3x(4x - 1) - 1(4x - 1)$$

$$\Rightarrow (4x - 1)(3x - 1)$$

(ii)  $2x^2 + 7x + 3$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x + x + 3$$

$$\Rightarrow 2x(x + 3) + 1(x + 3)$$

$$\Rightarrow (x + 3)(2x + 1)$$

(iii)  $6x^2 + 5x - 6$

$$\Rightarrow 6x^2 + 9x - 4x - 6$$

$$\Rightarrow 3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$$

$$\Rightarrow (2x + 3)(3x - 2)$$

(iv)  $3x^2 - x - 4$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 3x - 4$$

$$\Rightarrow x(3x - 4) + 1(3x - 4)$$

$$\Rightarrow (3x - 4)(x + 1)$$

प्रश्न 5. गुणखंड ज्ञात कीजिए-

(i)  $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii)  $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii)  $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(iv)  $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

उत्तर-

(i)  $x^3 - 2x^2 - x + 2$

बहुपद का संभावित शून्यक हैं-  $\pm 1$  और  $\pm 2$

अतः बहुपद  $x^3 - 2x^2 - x + 2$  में  $x = 1$  रखने पर

$$p(x) = (1)^3 - 2(1)^2 - (1) + 2$$

$$= 1 - 2 - 1 + 2 = 0$$

चूँकि  $p(x) = 0$  है,

अतः  $x - 1$   $p(x)$  का शून्यक है इसलिए  $x - 1$   $p(x)$  का एक गुणखंड है।

पहली विधि-  $x - 1$  से  $x^3 - 2x^2 - x + 2$  में भाग देने पर

$$\begin{array}{r}
 \phantom{x - 1} \overline{) x^3 - 2x^2 - x + 2} \\
 \underline{x^3 - x^2} \phantom{- x + 2} \\
 \phantom{x^3 -} -x^2 - x + 2 \\
 \phantom{x^3 -} \underline{-x^2 + x} \phantom{+ 2} \\
 \phantom{x^3 -} \phantom{-x^2 -} 2x + 2 \\
 \phantom{x^3 -} \phantom{-x^2 -} \underline{-2x + 2} \\
 \phantom{x^3 -} \phantom{-x^2 -} \phantom{-2x +} 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अतः } x^3 - 2x^2 - x + 2 &= (x - 1)(x^2 - x - 2) \text{ [चूँकि } p(x) = g(x) \times q(x)\text{]} \\
 &= (x - 1)(x^2 - 2x + x - 2) \\
 &= (x - 1)[x(x - 2) + 1(x - 2)] \\
 &= (x - 1)(x - 2)(x + 1)
 \end{aligned}$$

**नोट:** चूँकि यह त्रिघात बहुपद है इसलिए इसके तीन शून्यक होंगे और तीन गुणखंड होंगे।

**दूसरी विधि :** हम यहाँ पर  $x - 1$  से भाग की लंबी प्रक्रिया न अपनाकर गुणखंड विधि से अन्य गुणखंड प्राप्त कर सकते हैं। चूँकि एक गुणखंड  $x - 1$  प्राप्त है।

$$\begin{aligned}
 x^3 - 2x^2 - x + 2 &= x^2(x - 1) - x^2 - x + 2 \\
 &= x^2(x - 1) - x(x - 1) - 2x + 2 \\
 &= x^2(x - 1) - x(x - 1) - 2(x - 1) \\
 &= (x - 1)(x^2 - x - 2) \\
 &= (x - 1)(x^2 - 2x + x - 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x - 1)[x(x - 2) + 1(x - 2)] \\
 &= (x - 1)(x - 2)(x + 1)
 \end{aligned}$$

**तीसरी विधि-** हमें बहुपद का संभावित शून्यक  $\pm 1$  और  $\pm 2$  ज्ञात है-

$p(x)$  में  $x = 1, -1, 2$  और  $=2$  रखने पर

$p(1) = 0$  है। अतः  $x - 1$  एक गुणखंड है।

$$\text{अब } p(-1) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$= (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2$$

$$= -1 - 2 + 1 + 2 = 0$$

अतः  $p(-1) = 0$  है अतः  $x + 1$  एक गुणनखंड है।

$$\text{अब } p(2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$= (2)^3 - 2(2)^2 - (2) + 2$$

$$= 8 - 8 - 2 + 2$$

$$= 0$$

$p(2) = 0$  है अतः  $x - 2$   $p(x)$  का एक गुणनखंड है।

$$\text{अब } p(-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$= (-2)^3 - 2(-2)^2 - (-2) + 2$$

$$= -8 - 8 + 2 + 2$$

$$= -16 + 4 = -12$$

$p(-2) \neq 0$  अतः  $-2$   $p(x)$  का शून्यक नहीं है।

अतः  $x^3 - 2x^2 - x + 2$  के गुणनखंड हैं  $(x - 1)(x + 1)(x - 2)$

$$(ii) x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$

बहुपद का संभावित शून्यक  $\pm 1$  और  $\pm 5$  है।

बहुपद में  $x = -1$  रखने पर

$$p(-1) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$

$$= (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$$

$$= -1 - 3 + 9 - 5 = 9 - 9 = 0$$

अतः  $x = -1$   $p(x)$  का शून्यक है इसलिए  $x + 1$  एक गुणनखंड है।

$$x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = x^2(x + 1) - 4x^2 - 9x - 5$$

$$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5x - 5$$

$$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - 4x - 5)$$

$$= (x + 1)(x^2 - 5x + x - 5)$$

$$= (x + 1)[x(x - 5) + 1(x - 5)]$$

$$= (x + 1)(x - 5)(x + 1)$$

अतः त्रिघात बहुपद के गुणनखंड  $(x + 1)$ ,  $(x - 5)$  और  $(x + 1)$  है।

$$(iii) x^3 + 13x^2 + 32x + 20$$

बहुपद का संभावित शून्यक  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10$  और  $\pm 20$  हैं।

बहुपद में  $x = -1$  रखने पर

$$p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$$

$$= (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20$$

$$= -1 + 13 - 32 + 20 = 33 - 32 = 1 \neq 0$$

चूँकि  $p(-1) \neq 0$  है अतः  $x + 1$  बहुपद का एक गुणनखंड है।

$$\begin{aligned}
 x^3 + 13x^2 + 32x + 20 &= x^2(x + 1) + 12x^2 + 32x + 20 \\
 &= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20x + 20 \\
 &= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20(x + 1) \\
 &= (x + 1)(x^2 + 12x + 20) \\
 &= (x + 1)(x^2 + 10x + 2x + 20) \\
 &= (x + 1)[(x(x + 10) + 2(x + 10))] \\
 &= (x + 1)(x + 10)(x + 2)
 \end{aligned}$$

अतः त्रिघात बहुपद के गुणखंड  $(x + 1)$ ,  $(x + 10)$  और  $(x + 2)$  हैं।

$$\begin{aligned}
 \text{(iv) } 2y^3 + y^2 - 2y - 1 & \\
 &= y^2(2y + 1) - 1(2y + 1) \\
 &= (y^2 - 1)(2y + 1) \\
 &= (y + 1)(y - 1)(2y + 1)
 \end{aligned}$$

बहुपद के गुणखंड  $(y + 1)$ ,  $(y - 1)$  और  $(2y + 1)$  हैं।

**उपयोगी बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ-**

1.  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2.  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3.  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
4.  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
5.  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
6.  $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

7.  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
8.  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
9.  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
10.  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

## प्रश्नावली 2.5 (पृष्ठ संख्या 57-59)

प्रश्न 1 उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए-

- (i)  $(x + 4)(x + 10)$
- (ii)  $(x + 8)(x - 10)$
- (iii)  $(3x + 4)(3x - 5)$
- (iv)  $(y^2 + \frac{3}{2})(y^2 - \frac{3}{2})$
- (v)  $(3 - 2x)(3 + 2x)$

उत्तर-

- (i)  $(x + 4)(x + 10)$

**सर्वसमिका-**

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$  का प्रयोग करने पर

$$\begin{aligned}(x + 4)(x + 10) &= x^2 + (4 + 10)x + (4)(10) \\ &= x^2 + 14x + 40\end{aligned}$$

- (ii)  $(x + 8)(x - 10)$

**सर्वसमिका-**  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$  का प्रयोग करने पर

$$\begin{aligned}(x + 8)(x - 10) &= x^2 + [8 + (-10)]x + (8)(-10) \\ &= x^2 - 2x - 80\end{aligned}$$

- (iii)  $(3x + 4)(3x - 5)$

सर्वसमिका-

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$  का प्रयोग करने पर

$$(3x + 4)(3x - 5) = (3x)^2 + [4 + (-5)] 3x + (4)(-5)$$

$$= 9x^2 - 3x - 20$$

(iv)

$$\left(y^2 + \frac{3}{2}\right) \left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$$

सर्वसमिका-  $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$  का प्रयोग करने पर

$$= (y^2)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= y^4 - \frac{9}{4}$$

(v)  $(3 - 2x)(3 + 2x)$

सर्वसमिका-  $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$  का प्रयोग करने पर

$$(3 - 2x)(3 + 2x) = (3)^2 - (2x)^2$$

$$= 9 - 4x^2$$

प्रश्न 2 सीधे गुना किये बिना निम्नलिखित गुणनफल के मान ज्ञात कीजिए-

(i)  $103 \times 107$

(ii)  $95 \times 96$

(iii)  $104 \times 96$

उत्तर-

(i)  $103 \times 107 = (100 + 3)(100 + 7)$

**सर्वसमिका-**  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$  का प्रयोग करने पर

$$(100 + 3)(100 + 7) = (100)^2 + (3 + 7)100 + 3 \times 7$$

$$= 10000 + 1000 + 21 = 11021$$

(ii)  $95 \times 96 = (90 + 5)(90 + 6)$

**सर्वसमिका-**  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$  का प्रयोग करने पर

$$(90 + 5)(90 + 6) = (90)^2 + (5 + 6)90 + 5 \times 6$$

$$= 8100 + 990 + 30 = 9120$$

(iii)  $104 \times 96 = (100 + 4)(100 - 4)$

**सर्वसमिका-**  $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$  का प्रयोग करने पर

$$(100)^2 - (4)^2$$

$$= 10000 - 16 = 9984$$

प्रश्न 3 उपयुक्त सर्वसमिकाओं को प्रयोग करके निम्नलिखित का गुणनखंड कीजिए-

(i)  $9x^2 + 6xy + y^2$

(ii)  $4y^2 - 4y + 1$

(iii)  $x^2 - \frac{y^2}{100}$

उत्तर-

(i)  $9x^2 + 6xy + y^2$

$$= (3x)^2 + 2.3x.y + (y)^2 [ \because x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 ]$$

$$= (3x + y)^2$$

$$= (3x + y)(3x + y)$$

(ii)  $4y^2 - 4y + 1$

$$= (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 1 + (1)^2$$

$$[\because x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2]$$

$$\therefore = (2y - 1)^2$$

$$= (2y - 1)(2y - 1)$$

(iii)

$$x^2 - \frac{y^2}{100}$$

$$= (x^2) - \left(\frac{y}{10}\right)^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{10}\right) \left(x - \frac{y}{10}\right)$$

$$[\because x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)]$$

प्रश्न 4 उपयुक्त सर्वसमिका को प्रयोग करके निम्नलिखित का प्रसार कीजिए-

(i)  $(x + 2y + 4z)^2$

(ii)  $(2x - y + z)^2$

(iii)  $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv)  $(3a - 7b - c)^2$

(v)  $(-2x + 5y - 3z)^2$

(vi)  $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

उत्तर-

(i)  $(x + 2y + 4z)^2$

यहाँ माना कि  $a = x$ ,  $b = 2y$ ,  $c = 4z$  और  $a$ ,  $b$  तथा  $c$  का मान सर्वसमिका

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \text{ में रखने पर}$$

$$\begin{aligned} \therefore (x + 2y + 4z)^2 &= (x)^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2(x)(2y) + 2(2y)(4z) + 2(4z)(x) \\ &= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8zx \end{aligned}$$

(ii)  $(2x - y + z)^2$

यहाँ माना कि  $a = 2x$ ,  $b = -y$ ,  $c = z$  और  $a$ ,  $b$  तथा  $c$  का मान

**सर्वसमिका-**  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$  में रखने पर

$$\begin{aligned} \therefore (2x - y + z)^2 &= (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(2x) \\ &= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx \end{aligned}$$

(iii) यहाँ माना कि  $a = -2x$ ,  $b = 3y$ ,  $c = 2z$  और  $a$ ,  $b$  तथा  $c$  का मान

**सर्वसमिका-**

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \text{ में रखने पर}$$

$$\begin{aligned} \therefore (-2x + 3y + 2z)^2 &= (-2x)^2 + (3y)^2 + (2z)^2 + 2(-2x)(3y) + 2(3y)(2z) + \\ &2(2z)(-2x) \end{aligned}$$

$$= 4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8zx$$

(iv)  $(3a - 7b - c)^2$

यहाँ माना कि  $x = 3a$ ,  $y = -7b$ ,  $z = -c$  और  $x$ ,  $y$  तथा  $z$  का मान

सर्वसमिका  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$  में रखने पर

$$\therefore (3a - 7b - c)^2 = (3a)^2 + (-7b)^2 + (-c)^2 + 2(3a)(-7b) + 2(-7b)(-c) + 2(-c)(3a)$$

$$= 9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$$

(v)  $(-2x + 5y - 3z)^2$

यहाँ माना कि  $a = -2x$ ,  $b = 5y$ ,  $c = -3z$  और  $a$ ,  $b$  तथा  $c$  का मान

सर्वसमिका-  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$  में रखने पर

$$\therefore (-2x + 5y - 3z)^2 = (-2x)^2 + (5y)^2 + (-3z)^2 + 2(-2x)(5y) + 2(5y)(-3z) + 2(-3z)(-2x)$$

$$= 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12zx$$

(vi)

$$\left[ \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1 \right]^2$$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$  में रखने पर

यहाँ  $a = \frac{a}{4}$ ,  $b = -\frac{b}{2}$  और  $c = 1$

$$\left( \frac{a}{4} - \frac{b}{2} \right)^2 = \left( \frac{a}{4} \right)^2 + \left( \frac{-b}{2} \right)^2 + 1^2 + \left( 2 \times \frac{a}{4} \times \frac{-b}{2} \right)$$

$$+ \left( 2 \times \frac{-b}{2} \right) + \left( 2 \times \frac{a}{4} \right)$$

$$\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 1 - \frac{b}{4} - b + \frac{a}{2}$$

प्रश्न 5 गुणनखंड कीजिए-

- (i)  $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$
- (ii)  $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2xy} + 4\sqrt{2yz} - 8xz$

उत्तर-

(i)  $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

$$= (2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(4z) + 2(4z)(2x)$$

$[\because a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2]$

$$= (2x + 3y + 4z)^2$$

$$= (2x + 3y + 4z)(2x + 3y + 4z)$$

(ii)

$$2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2xy} + 4\sqrt{2yz} - 8xz$$

$[\because (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca]$

$$= (\sqrt{2x})^2 + y^2 + (2\sqrt{2z})^2 - 2(\sqrt{x})(y) + 2(y)(2\sqrt{2z}) + 2(-\sqrt{2x})(2\sqrt{2z})$$

$$= (-\sqrt{2x})^2 + (y)^2 + (2\sqrt{2z})^2 + (2 \times -\sqrt{2x} \times y) + (2 \times y \times 2\sqrt{2z}) + (2 \times 2\sqrt{2z} \times -\sqrt{2x})$$

$$\therefore (-\sqrt{2x} + y + 2\sqrt{2z})^2$$

$$= (-\sqrt{2x} + y + 2\sqrt{2z})(-\sqrt{2x} + y + 2\sqrt{2z})$$

प्रश्न 6 निम्नलिखित घन को विस्तारित रूप में लिखिए-

- (i)  $(2x + 1)^3$

(ii)  $(2a - 3b)^3$

(iii)  $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$

(iv)  $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

उत्तर-

(i)  $(2x + 1)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ]

$$(2x + 1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + (1)^3$$

$$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

(ii)  $(2a - 3b)^3$

[सर्वसमिका के प्रयोग से  $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ ]

$$(2a - 3b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2 - (3b)^3$$

$$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$$

(iii)

[सर्वसमिका के प्रयोग से  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ]

$$\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3 = \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)^2(1) + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)^2 + (1)^3$$

$$= \frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$$

(iv)

[सर्वसमिका के प्रयोग से  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ]

$$\begin{aligned} \left[x - \frac{2}{3}y\right]^3 &= (x)^3 - 3(x^2)\left(\frac{2}{3}y\right) + 3(x)\left(\frac{2}{3}y\right)^2 - \left(\frac{2}{3}y\right)^3 \\ &= x^3 - \frac{9}{2}x^2y + \frac{27}{4}xy^2 - \frac{27}{8}y^3 \end{aligned}$$

प्रश्न 7 उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग कर निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए-

- (i)  $(99)^3$
- (ii)  $(102)^3$
- (iii)  $(998)^3$

उत्तर-

(i)  $(99)^3$

$$= (100 - 1)^3$$

[सर्वसमिका के प्रयोग से  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ]

$$(100 - 1)^3 = (100)^3 - 3(100)^2(1) + 3(100)(1)^2 - (1)^3$$

$$= 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 1000300 - 30001 = 970299$$

(ii)  $(102)^3$

$$= (100 + 2)^3$$

[सर्वसमिका के प्रयोग से  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ]

$$(100 + 2)^3 = (100)^3 + 3(100)^2(2) + 3(100)(2)^2 + (2)^3$$

$$= 1000000 + 60000 + 1200 + 8 = 1061208$$

$$(iii)(998)^3$$

$$= (1000 - 2)^3$$

$$[\text{सर्वसमिका के प्रयोग से } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3]$$

$$(1000 - 2)^3 = (1000)^3 - 3(1000)^2(2) + 3(1000)(2)^2 - (2)^3$$

$$= 1000000000 - 6000000 + 12000 - 8$$

$$= 1000012000 - 6000008$$

$$= 994011992$$

प्रश्न 8 निम्नलिखित का गुणनखंड कीजिए-

$$(i) 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$$

$$(ii) 8a^2 - b^2 - 12a^2b + 6ab^2$$

$$(iii) 27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$$

$$(iv) 64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$$

$$(v) 27p^3 - \frac{2}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$$

उत्तर-

$$(i) 8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$$

$$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$$

$$[\text{सर्वसमिका के प्रयोग से } x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = (x + y)^3]$$

$$= (2a)^3 + (b)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2 = (2a + b)^3$$

$$= (2a + b)(2a + b)(2a + b)$$

$$(ii) \quad 8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$$

$$= (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2$$

$$[\text{सर्वसमिका के प्रयोग से } x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3]$$

$$= (2a)^3 - (b)^3 - 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2 = (2a - b)^3$$

$$= (2a - b)(2a - b)(2a - b)$$

$$(iii) \quad 27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$$

$$= (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2$$

$$[\text{सर्वसमिका के प्रयोग से } x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3]$$

$$= (3)^3 - (5a)^3 - 3(3)^2(5a) + 3(3)(5a)^2 = (3 - 5a)^3$$

$$= (3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a)$$

$$(iv) \quad 64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$$

$$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2$$

$$[\text{सर्वसमिका के प्रयोग से } x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3]$$

$$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2 = (4a - 3b)^3$$

$$= (4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b)$$

$$[\text{सर्वसमिका के प्रयोग से } x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3]$$

$$(v)$$

[सर्वसमिका के प्रयोग से  $x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = (x - y)^3$  ]

$$\begin{aligned}
 & 27p^3 - \frac{2}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p \\
 &= (3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3(3p)^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)^2 \\
 &= \left(3p - \frac{1}{6}\right)^3 \\
 &= \left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)
 \end{aligned}$$

प्रश्न 9 सत्यापित कीजिए-

(i)  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

(ii)  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

उत्तर-

(i) RHS =  $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$$= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2)$$

$$= x^3 - x^2y + xy^2 + x^2y - xy^2 + y^3$$

$$= x^3 + y^3$$

∴ LHS = RHS सत्यापित

(ii) RHS =  $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$$x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$$

$$= x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$$

$$= x^3 - y^3$$

∴ LHS = RHS सत्यापित।

प्रश्न 10 निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखंड ज्ञात कीजिए-

(i)  $27y^3 + 125z^3$

(ii)  $64m^3 - 343n^3$

उत्तर-

(i)  $27y^3 + 125z^3$

$$= (3y)^3 + (5z)^3$$

[सर्वसमिका के प्रयोग से  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ ]

$$(3y)^3 + (5z)^3 = (3y + 5z) [(3y)^2 - (3y)(5z) + (5z)^2]$$

$$= (3y + 5z)(9y^2 - 15yz + 25z^2)$$

(ii)  $64m^3 - 343n^3$

$$= (4m)^3 - (7n)^3$$

[सर्वसमिका के प्रयोग से  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ ]

$$(4m)^3 - (7n)^3 = (4m - 7n) [(4m)^2 + (4m)(7n) + (7n)^2]$$

$$= (4m - 7n)(16m^2 + 28mn + 49n^2)$$

प्रश्न 11 गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए-

$$27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$$

उत्तर-

$$= (3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 9xyz$$

$$\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

सर्वसमिका के प्रयोग से-

$$= (3x + y + z)((3x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (3x)(y) - (y)(z) - (z)(3x))$$

$$= (3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx)$$

प्रश्न 12 सत्यापित कीजिए-

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$$

उत्तर-

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$$

$$\text{LHS} = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \text{ [सर्वसमिका के प्रयोग से]}$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

प्रश्न 13 यदि  $x + y + z = 0$  हो, तो दिखाइए कि  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$  है।

उत्तर-

$x + y + z = 0$  दिया है।

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= (0)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$\text{अतः } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$

या  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$  सत्यापित

प्रश्न 14 वास्तव में घनों का परिकलन किए बिना निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए-

(i)  $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii)  $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

उत्तर-

(i)  $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

इस सर्वसमिका में  $x = -12$ ,  $y = 7$  और  $z = 5$  रखने पर

चूँकि-  $-12 + 7 + 5 \Rightarrow -12 + 12 = 0$

अतः  $x + y + z = 0$  है।

अब,  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$  [ $x$ ,  $y$ , और  $z$  का मान रखने पर]

$$\Rightarrow (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3 \times (-12) \times 7 \times 5$$

$$= -1260$$

(ii)  $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

$$28 + (-15) + (-13) = 28 - 28 = 0$$

चूँकि  $x + y + z = 0$  है।

इसलिए  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

अब,  $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3 = 3 \times 28 \times (-15) \times (-13)$

$= 133380$

प्रश्न 15 नीचे दिए गए आयात, जिसमें क्षेत्रफल दिया गया है, लंबाई और चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिये।

(i) क्षेत्रफल-  $25a^2 - 35a + 12$

(ii) क्षेत्रफल-  $35y^2 + 13y - 12$

उत्तर-

(i) क्षेत्रफल :  $25a^2 - 35a + 12$

क्षेत्रफल = लंबाई  $\times$  चौड़ाई

अतः  $25a^2 - 35a + 12$  के दो गुणखंड होंगे जिसमें एक लंबाई होगा और दूसरा चौड़ाई होगा।

गुणखंड करने पर-

$$25a^2 - 35a + 12 = 25a^2 + 15a + 20a + 12$$

$$= 5a(5a + 3) + 4(5a + 3)$$

$$= (5a + 3)(5a + 4)$$

चूँकि  $(5a + 3) < (5a + 4)$  है।

अतः लंबाई =  $5a + 4$  और चौड़ाई =  $5a + 3$

(ii) क्षेत्रफल-  $35y^2 + 13y - 12$

गुणनखंड करने पर-

$$35y^2 + 13y - 12 = 35y^2 + 28y - 15y - 12$$

$$= 7y(5y + 4) - 3(5y + 4)$$

$$= (5y + 4)(7y - 3)$$

अतः लंबाई =  $5y + 4$  और चौड़ाई =  $7y - 3$

प्रश्न 16 घनाभों (cuboids), जिनके आयतन नीचे दिया गया है कि, विमाओं के लिए संभव व्यंजक क्या हैं?

(i) आयतन-  $3x^3 - 12x$

(ii) आयतन-  $12ky^2 + 8ky - 20k$

उत्तर-

(i) आयतन :  $3x^3 - 12x$

गुणनखंड करने पर

$$\text{आयतन} = 3x^3 - 12x = 3x(x - 4)$$

$$\text{चूँकि आयतन} = L \times B \times H$$

$$\text{अतः } L = 3, B = x \text{ और } H = x - 4$$

(ii) आयतन-  $12ky^2 + 8ky - 20k$

$$\text{आयतन} = 12ky^2 + 8ky - 20k$$

$$= 4k (3y^2 + 2y - 5)$$

$$= 4k (3y^2 + 5y - 3y - 5)$$

$$= 4k [y (3y + 5) - 1(3y + 5)]$$

$$= 4k (3y + 5)(y - 1)$$

चूँकि आयतन =  $L \times B \times H$

अतः  $L = 4k$ ,  $B = (3y + 5)$  और  $H = (y - 1)$



# Fukey Education