गणित

अध्याय-2: बहुपद

बहुपद क्या है?

चर, अचर, चर के गुणांक तथा ऋणेतर घातांक के जोड़, घटाव या गुणन की क्रिया वाले बीजगणितीय व्यंजक को बहुपद कहा जाता हैं।

उदाहरण

$x^2 + 2x + 1$, एक बहुपद बीजगणितीय व्यंजक है।

- $2x^5 + 4xy^3 + 6x^2$
- $4y^3 + y^2 + yz$
- $3x + x^2 - x^4$
- $5x^6y + 6px^2yx^2 - 8ax$

घात n वाले एक चर x वाले बहुपद को निम्न रूप में व्यक्त किया जाता हैं।

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1x + a_0$

जहाँ $a_n \neq 0$ और a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 = अचर

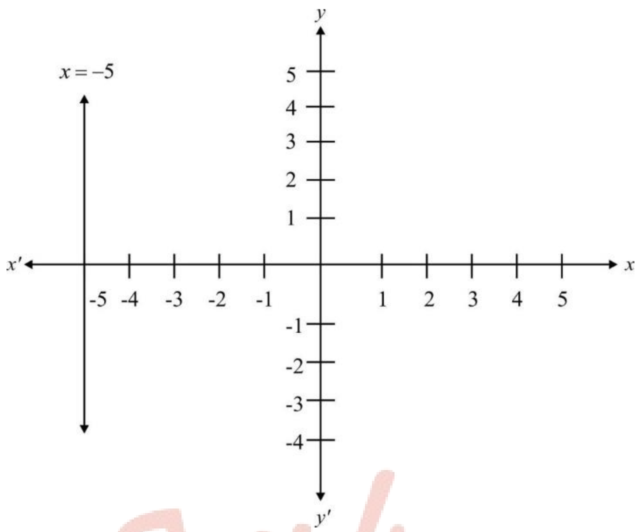
बहुपद का घात

पदों के घातों में से महत्तम को बहुपद का घात (डिग्री) कहते हैं। यदि एक से अधिक चर राशियाँ हों, तो विभिन्न पदों में चर राशियों के घातों के योगफलों में से महत्तम को बहुपद का घात कहते हैं।

उदाहरण

$2y^2 - 3y + 4$, बहुपद बीजगणितीय व्यंजक में चर y की अधिकतम घात 2 है इसलिए बहुपद का घात 2 है।

रैखिक बहुपद



घात 1 के बहुपद को रैखिक बहुपद कहते हैं। उदाहरण के लिए, $2x - 3$, $\sqrt{3}\,x + 5$, $y + \sqrt{2}$ आदि।

द्विघात बहुपद

घात 2 के बहुपद को द्विघात बहुपद कहते हैं। द्विघात शब्द क्वाडरेट शब्द से बना है, जिसका अर्थ है 'वर्ग'।

उदाहरण के लिए $2x^2 + 3x - 2/5$, $y^2 - 2$ आदि।

अधिक व्यापक रूप में, x में कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याये हैं और $a \neq 0$ है, के प्रकार का होता है।

त्रिघात बहुपद

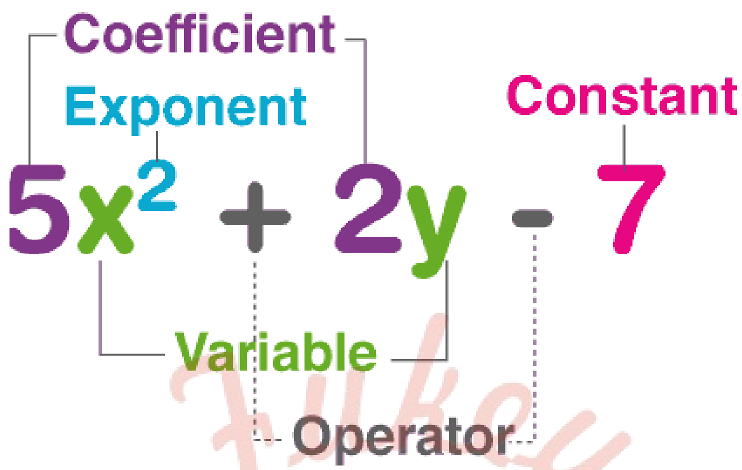
घात 3 का बहुपद त्रिघात बहुपद कहलाता है। त्रिघात बहुपद के कुछ उदाहरण निम्न हैं:

$2 - x^3$, x^3, $x^3 - x^2 + 3$ आदि

वास्तव में, त्रिघात बहुपद का सबसे व्यापक रूप है: $ax^3 + bx^2 + cx + d$, जहाँ a, b, c, d वास्तविक संख्याये हैं और $a \neq 0$ है।

बीजीय बहुपद (Algebraic Polynomial)

चर एवं अचर बहुपद को शामिल करने से जो पद प्राप्त होता हैं उसे बीजीय बहुपद कहा जाता हैं।



जैसे :-

- $x + 2$
- $x + 6$
- $y - 4$
- $64 + a$

बीजीय बहुपद दो प्रकार के होते हैं।

1. अचर बहुपद

बहुपद का ऐसा पद जिसका मान हमेशा स्थिर रहता हैं वह अचर बहुपद कहलाता हैं।

जैसे :-

- $4x + 5$,
- $2x - 2$,
- $8y - 5$,
- 2 और 5 अचर बहुपद है क्योंकि इनका मान सदैव स्थिर रहता हैं।

Note :-

- अचर बहुपद वास्तविक या काल्पनिक दोनों संख्या हो सकते हैं।

- अचर बहुपद का घात शून्य होता हैं।

2. चर बहुपद

बहुपद का ऐसा पद जिसका मान हमेशा बदलता रहता हैं वह चर बहुपद कहलाता हैं।

जैसे :-

- $x^2 + 4x + 2$
- $2x^2 + 4x + 8$

Note :-

- चर बहुपद कभी भी काल्पनिक नही होता हैं।

बहुपद का शून्यक

एक वास्तविक संख्या k बहुपद p(x) का शून्यक कहलाती है, यदि P(k) = 0 है।

व्यापक रूप में यदि p(x) = ax + b का एक शून्यक k है तो p(k) = ak + b = 0, अर्थात k = – b/a होगा। अतः रैखिक बहुपद ax + b का शून्यक - b/a = – (आचार पद)/ x का गुणांक है।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. घातों 1, 2 और 3 के बहुपद क्रमशः रैखिक बहुपद, द्विघात बहुपद एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।

2. एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है, के रूप का होता है।

3. एक बहुपद p(x) के शून्यक उन बिदुओं के x-निर्देशांक होते हैं जहाँ y = p(x) का ग्राफ x-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध

किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध को एक उदाहरण के माध्यम से समझने की कोशिश करते हैं।

इसके लिए एक द्विघात बहुपद माना $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ लीजिए। यहाँ हमें मध्य पद "$-8x$" को दो ऐसे पदों के योग के रूप में विभक्त करना है जिनका गुणनफल $6x \times 2x = 12x^2$ हो।

अतः, हम इसको लिख सकते हैं:

$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 2x - 6x + 6$

$= 2x (x - 1) - 6 (x - 1) = (x - 1) (x - 3)$

$= 2 (x - 1) (x - 3)$

इसलिए, $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ का मान $x = 1$ और $x = 3$ के लिए शून्य होगा।

अतः कह सकते हैं कि द्विघात बहुपद $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ के शून्यंक 1 और 3 हैं।

शून्यंकों का योग

$= 1 + 3 = 4 = - (-8)/2$

= – (x का गुणांक)/(x^2 का गुणांक)

शून्यंकों का गुणनफल

शून्यंकों का गुणनफल = $1 \times 3 = 3 = 6/2$ = (अचर पद)/(x^2 का गुणांक)

व्यापक रूप में यदि α, β द्विघात बहुपद $p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के शून्यक हों तो इसके अनुसार $x - \alpha$ और $x - \beta$, $p(x)$ के गुणनखण्ड होंगे।

अतः $ax^2 + bx + c = k (x - \alpha)(x - \beta)$, जहाँ k अचर है।

$= k [x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta]$

$= kx^2 - k (\alpha + \beta) x + k\alpha\beta$

दोनों ओर के x^2, x के गुणांकों तथा अचर पदों की तुलना करने पर, हम पाते हैं:

$a = k$, $b = -k(\alpha + \beta)$ और $c = k\alpha\beta$

इससे प्राप्त होता है $\alpha + \beta = -b/a$

और $\alpha\beta = c/a$

अर्थात शून्यको का योग $\alpha + \beta = -b/a = -$ (x का गुणांक)/ (x^2 का गुणांक)

शून्यंकों का गुणनफल $\alpha\beta = c/a =$ (अचर पद)/(x^2 का गुणांक)

शून्यको के योग और गुणनफल से द्विघात बहुपद ज्ञात करना

इस विधि को एक उदाहरण के माध्यम से समझते हैं:

उदाहरण

एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः -3 और 2 हैं।

हल:

माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α, β हैं।

हम पाते हैं $\alpha + \beta = -b/a = -3$

$\alpha\beta = c/a = 2$

यदि $a = 1$ है तो $b = 3$ और $c = 2$ होगा।

अतः, एक द्विघात बहुपद, जिसमें दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 + 3x + 2$ है।

1. एक द्विघात बहुपद के अधिक से अधिक दो शून्यक हो सकते हैं और एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं।

2. यदि α, β द्विघात बहुपद $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के शून्यक हों तो

$\alpha + \beta = -b/a$

और $\alpha\beta = c/a$

बहुपदों का जोड़

जब हम दो या दो से अधिक बहुपदो को जोड़ते हैं तो केवल समान पद जोड़े जाते हैं इसका अर्थ है कि समान चर और समान घात वाले पद जोड़े जाते हैं। असमान पदों को नहीं जोड़ा जाएगा, वो अपरिवर्तित रहेंगे। जोड़ में, परिणामी बहुपद की घात समान रहती हैं।

Q.1 बहुपद $5x^2 + 4x + 2$ और $8x^2 + 2x + 5$ को जोड़िए?

हल:- $5x^2 + 4x + 2 + 8x^2 + 2x + 5$

$(5x^2 + 8x^2) + (4x + 2x) + (2 + 5)$

$13x^2 + 6x + 7$

Ans. $13x^2 + 6x + 7$

Q.2 बहुपद $3a^2 + 5ab + 2$ और $7a^2 + 6 + 9ab$ को जोड़िए?

हल:- $3a^2 + 5ab + 2 + 7a^2 + 6 + 9ab$

$(3a^2 + 7a^2) + (5ab + 9ab) + (2 + 6)$

$10a^2 + 14ab + 8$

Ans. $10a^2 + 14ab + 8$

Q.3 बहुपद $3ab^3 + 6xy^4 + 4x^2$ और $8x^2 + 12ab^3 + 2xy^4$ को जोड़िए?

हल:- $3ab^3 + 6xy^4 + 4x^2 + 8x^2 + 12ab^3 + 2xy^4$

$(6xy^4 + 2xy^4) + (3ab^3 + 12ab^3) + (4x^2 + 8x^2)$

$8xy^4 + 15ab^3 + 12x^2$

Ans. $8xy^4 + 15ab^3 + 12x^2$

Q.4 बहुपदो $4x^2 + 8xy + 5y^2$ और $8y^2 - 3xy + 3x^2$ को जोड़िए

हल:- $4x^2 + 8xy + 5y^2 + 8y^2 - 3xy + 3x^2$

$(4x^2 + 3x^2) + (8xy - 3xy) + (6y^2 + 8y^2)$

$7x^2 + 5xy + 14y^2$

Ans. $7x^2 + 5xy + 14y^2$

बहुपदो का घटाना

बहुपदों का घटाव बहुपदों के योग के समान ही होता है। इसमें समान पदों को घटाया जाता है और असमान पदों में कोई परिवर्तन नहीं होता है। इसमें भी परिणामी बहुपद की घात वही रहेगी।

Q.1 बहुपद $5xy + 8xy^2 + 6x^2y + 8y^3$ को $3xy + 2xy^2 + x^2y + 2Y^3$ में से घटाएं।

हल:- $(5xy + 8xy^2 + 6x^2y + 8y^3) - (3xy^2 + 2xy^2 + x^2y + 2Y^3)$

$(8y^3 - 2Y^3) + (6x^2y - x^2y) + (8xy^2 - 2xy^2) + (5xy - 3xy)$

$5y^3 + 5x^2y + 6xy^2 + 2xy$

Ans. $5y^3 + 5x^2y + 6xy^2 + 2xy$

बहुपदों का गुणा

जब दो या दो से अधिक बहुपदों को गुणा किया जाता है तो परिणाम हमेशा उच्च घात वाला बहुपद होता है। लेकिन दो बहुपदों में, यदि एक या दोनों बहुपद अचर बहुपद हों तो घात वही रहेगी। बहुपदों के गुणा में, समान चरों की घातो को घातांक के नियमों द्वारा जोड़ा जाता है।

Q.1 बहुपद $2x \times 4y$ का गुणा कीजिए?

हल:-$2x \times 4y$

$= (2 \times 4) \times (x \times y)$

$= 8xy$

Ans. $8xy$

Q.2 बहुपद $5a \times 8b$ का गुणा कीजिए?

हल:- $5a \times 8b$

$= (5 \times 8) \times (a \times b)$

$= 40ab$

Ans. $40ab$

Q.1 बहुपद $7t \times 2s \times 3r$ का गुणा कीजिए?

हल:- $5a \times 2b \times 7c$

$= (5 \times 2 \times 7)\times(a \times b \times c)$

$= 70\ abc$

Ans. $70\ abc$

Q.4 बहुपद $3p^2q^2 \times 12p^3q^3$ का गुणा कीजिए?

हल:- $3p^2q^2 \times 12p^3q^3$

$(3 \times 12) \times (p^2 \times p^3 \times q^2 \times q^3)$

$= 36\ p^5q^5$

Ans. $36\ p^5q^5$

बहुपदों का भाग

बहुपद के विभाजन में, परिणाम कम घात वाला बहुपद होता है और यदि बहुपदों में से एक अचर बहुपद है तो घात वही रहेगी।

Q.1 बहुपद $6a^2 \div 3a$ से भाग कीजिए?

हल:- $6a^2 \div 3a$

$3 \times 2 \times a \times a/3 \times a$

2a

Ans. 2a

Q.2 बहुपद $(2xy + 6x) \div 2x$ से भाग दीजिए?

हल:- $(2xy + 6x) \div 2x$

$= (2xy + 6x)/2x$

$= 2x(y + 3)/2x$

$= y + 3$

Ans. $y + 3$

त्रिघात बहुपद के शून्यक

यदि किसी त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक α, β, γ हों तो यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$\alpha + \beta + \gamma = -b/a$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = c/a$

और $\alpha\beta\gamma = -d/a$

त्रिघात बहुपद का उदाहरण

जांच कीजिए कि त्रिघात बहुपद $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$, के शून्यक 3,-1 और -1/3 हैं। इसके पश्चात् शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

उदाहरण का हल

दिए हुए बहुपद कि तुलना $ax^3 + bx^2 + cx + d$ से करने पर हम पाते हैं कि

$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3$

एक-एक करके शून्यकों के मान रखने पर

$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0$

$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0$

$p(-1/3) = 3 \times (-1/3)^3 - 5 \times (-1/3)^2 - 11 \times (-1/3) - 3 = -1/9 + 5/9 + 11/3 - 3 = -2/3 + 2/3 = 0$

अतः $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ के शून्यक 3,-1 और -1/3 हैं।

इसलिए हम $\alpha = 3$, $\beta = -1$ और $\gamma = -1/3$ लेते हैं अब

$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + (-1/3) = 2 - 1/3 = 5/3 = -b/a$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times (-1/3) + (-1/3) \times 3 = -3 + 1/3 - 1 = -4 + 1/3 = -11/3 = c/a$

और $\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times (-1/3) = 1 = -(-3)/3 = -d/a$ है।

स्मरणीय तथ्य

यदि α, β, γ त्रिघात बहुपद $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हों तो

बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म

आप जानते हैं कि एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं। परंतु, यदि आपको केवल एक शून्यक दिया हो, तो क्या आप अन्य दो शून्यक ज्ञात कर सकते हैं? उदाहरण के लिए, त्रिघात बहुपद $x^3 - 3x^2 - x + 3$ को लेते हैं। माना इसका एक शून्यक 1 है तो $x^3 - 3x^2 - x + 3$ का एक गुणनखंड $x - 1$ है। इसलिए $x^3 - 3x^2 - x + 3$ को $x - 1$ से भाग देकर $x^2 - 2x - 3$ प्राप्त कर सकते हैं।

इस प्राप्त द्विघात बहुपद के गुणनखंड करने के लिए मध्य भाग को विभक्त करके किया जा सकता है।

$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 3x + x - 3$

$= x(x - 3) + 1(x - 3) = (x - 3)(x + 1)$

इसलिए, त्रिघात बहुपद के सभी शून्यक 1, -1 और 3 हैं।

बहुपद को भाग देने की एल्गोरिथ्म (कलन विधि)

एक बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग देने के एल्गोरिथ्म (कलन विधि) के विधिवत चरण निम्न प्रकार से हैं। इसको समझाने के लिए एक उदाहरण पर विचार करते हैं।

यदि p(x) और g(x) कोई दो बहुपद हैं जहाँ g(x) ≠ 0 हो तो हम बहुपद q(x) और r(x) ऐसे प्राप्त कर सकते हैं कि

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$

यह निष्कर्ष बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म कहलाता है।

उदाहरण

$2x^2 + 3x + 1$ को $x + 2$ से भाग दीजिये।

हल:

ध्यान दीजिए कि जब शेषफल या तो शून्य हो जाए या इसकी घात भाजक की घात से कम हो जाए, तो हम भाग देने की प्रक्रिया को रोक देते हैं।

भाजक	भाज्य	भागफल	शेषफल
$x + 2$	$2x^2 + 3x + 1$	$2x - 1$	3

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$2x^2 + 3x + 1 = (x + 2) \times (2x - 1) + 3$

याद रखने योग्य बातें

1. यह प्रक्रिया किसी बहुपद को एक द्विघात बहुपद से भाग देने के लिए भी भी प्रयोग में लाई जा सकती है।

2. विभाजन एल्गोरिथ्म के अनुसार दिए गए बहुपद p(x) और शून्येतर बहुपद g(x) के लिए दो ऐसे बहुपदों q(x) तथा r(x) का अस्तित्व है कि

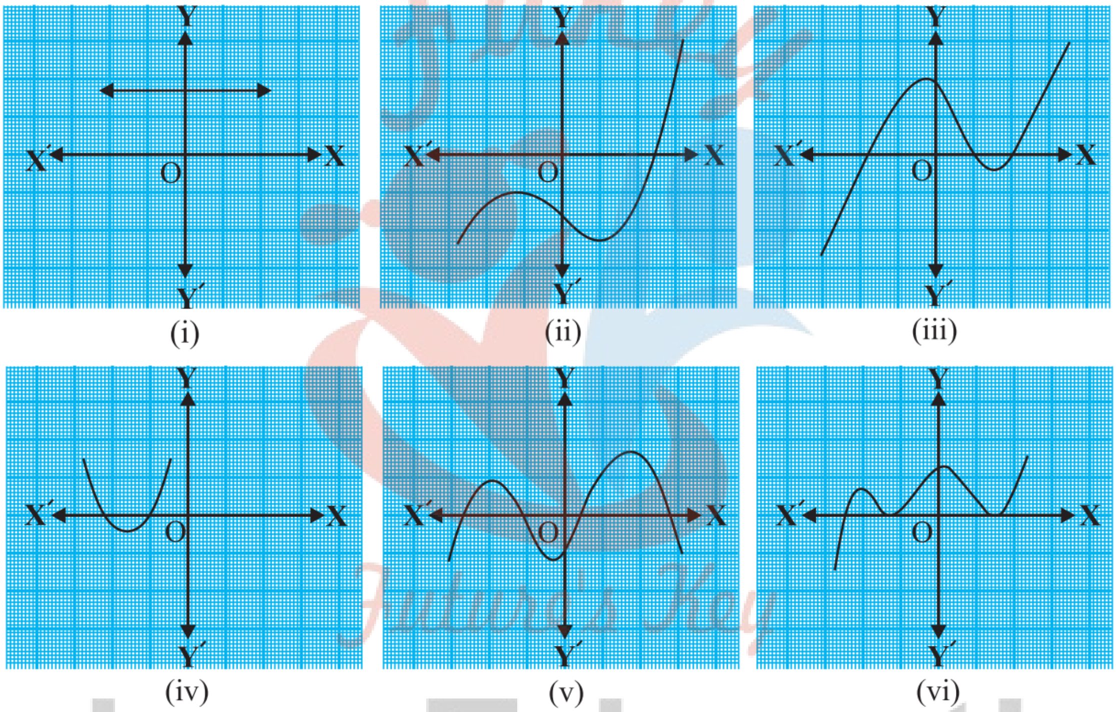
p(x) = g(x) × q(x) + r(x)

जहाँ, r(x) = 0 है या घात r(x) < घात g(x) है।

NCERT SOLUTIONS

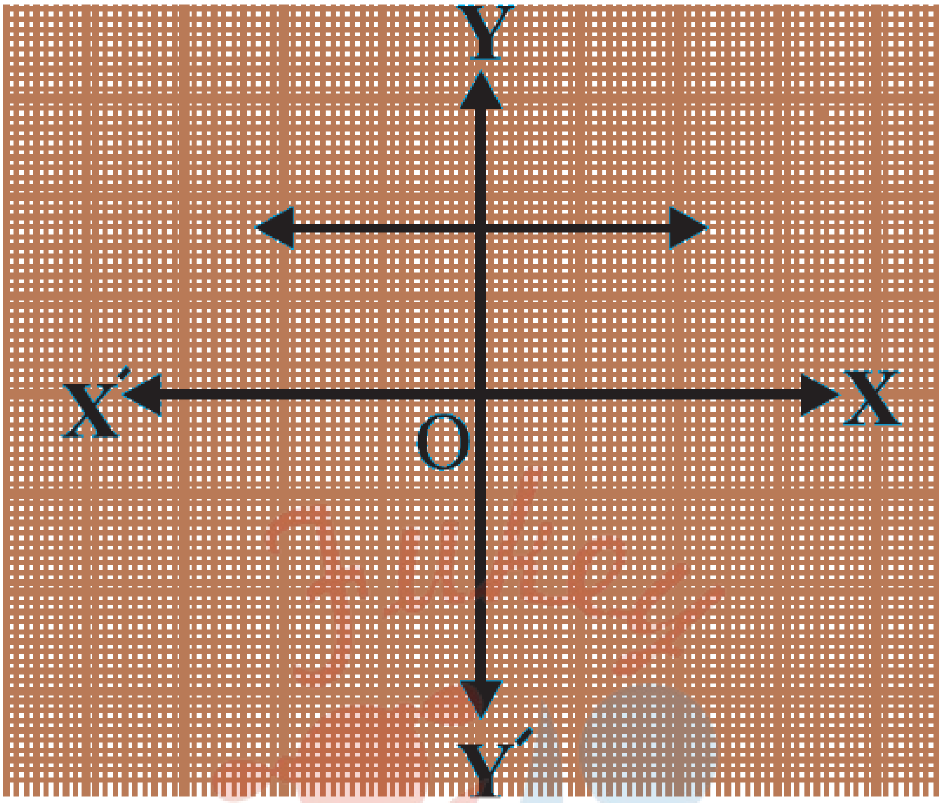
प्रश्नावली 2.1 (पृष्ठ संख्या 31)

प्रश्न 1 किसी बहुपद p(x) के लिए, y = p(x) का ग्राफ नीचे आकृति 2.10 में दिया गया है। प्रत्येक स्थिति में, p(x) के शुन्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए:

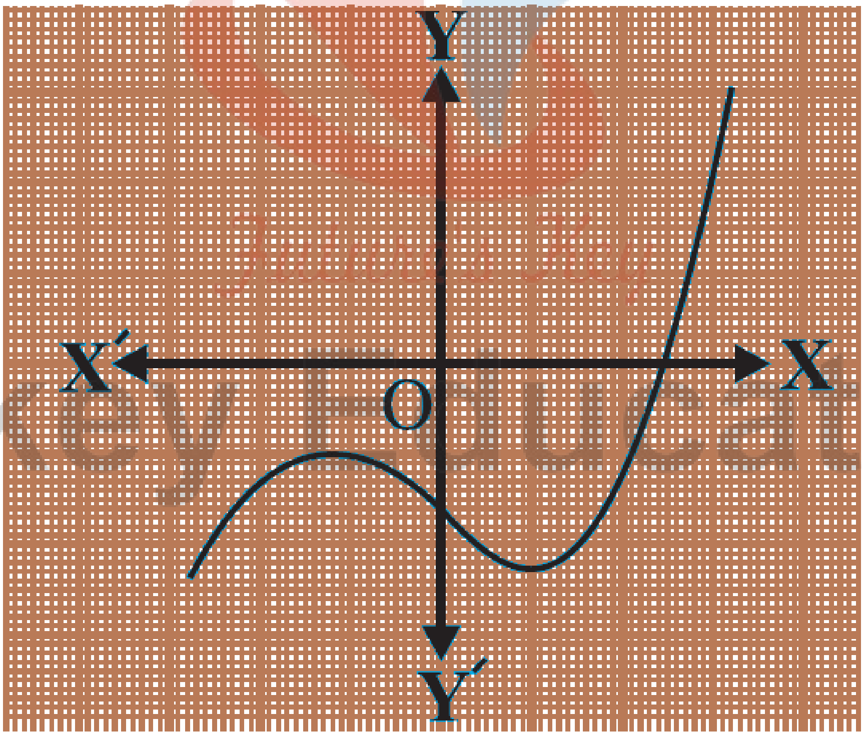


उत्तर-

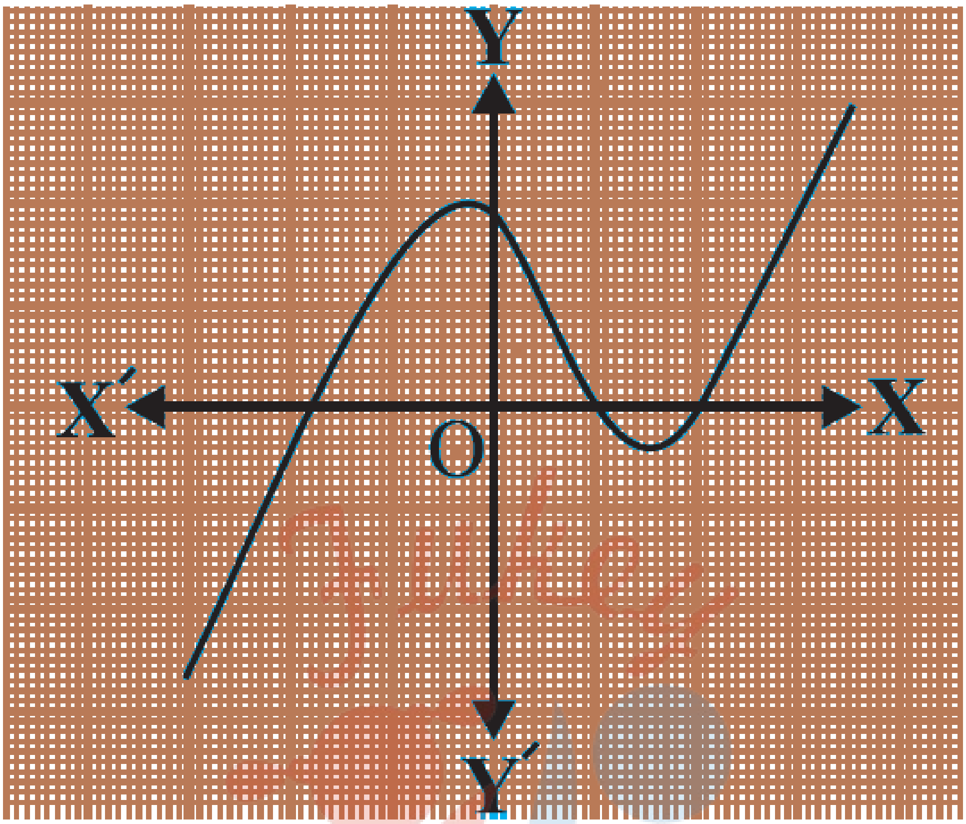
(i) p(x) के शुन्यकों की संख्या = 0 (क्योंकि ग्राफ रेखा x अक्ष को नहीं काटती है)



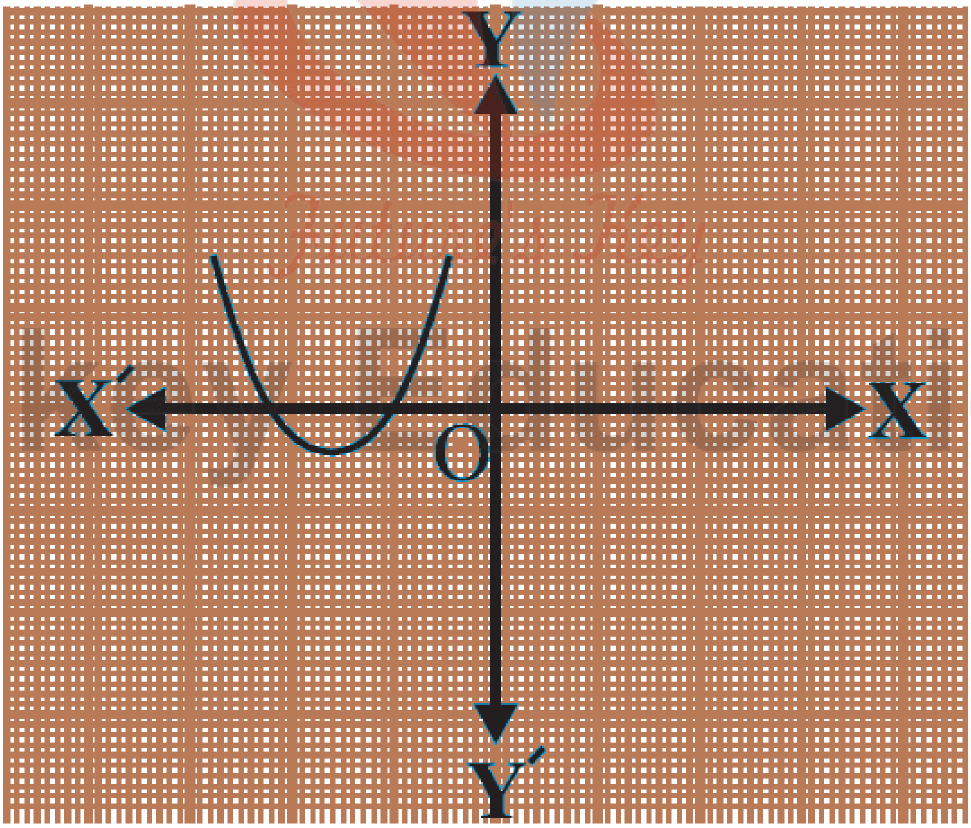
(ii) p(x) के शुन्यकों की संख्या = 1 (क्योंकि ग्राफ x अक्ष को 1 बार काटती है)



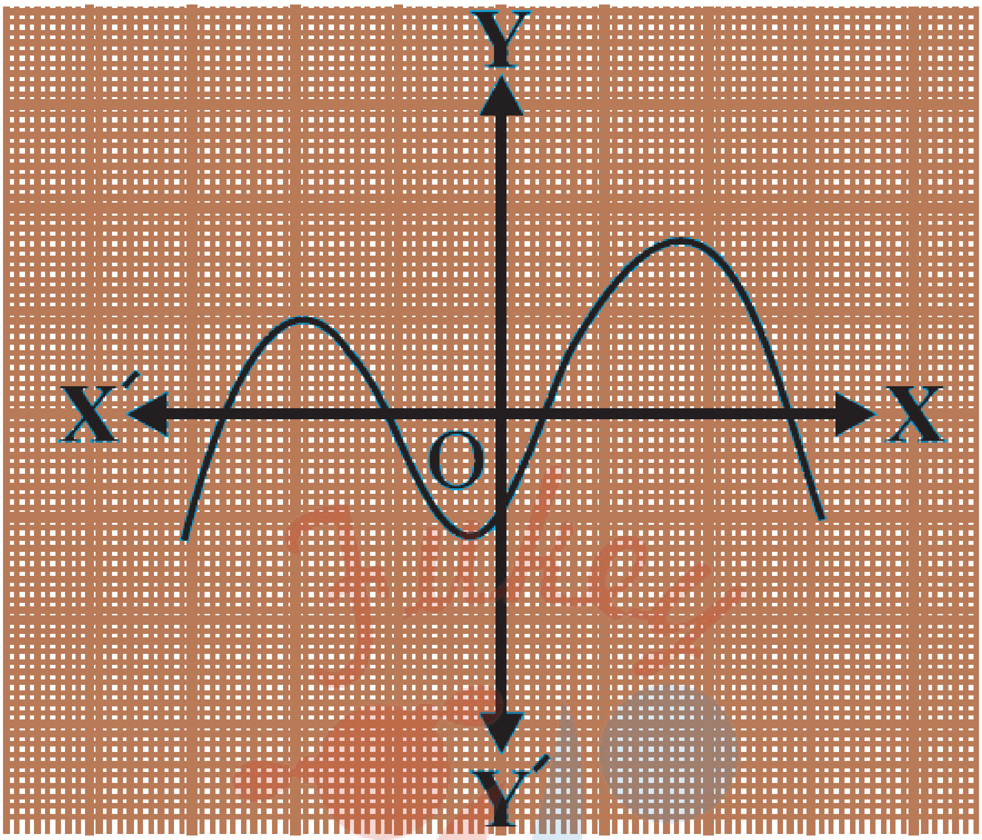
(iii) p(x) के शुन्यकों की संख्या = 3



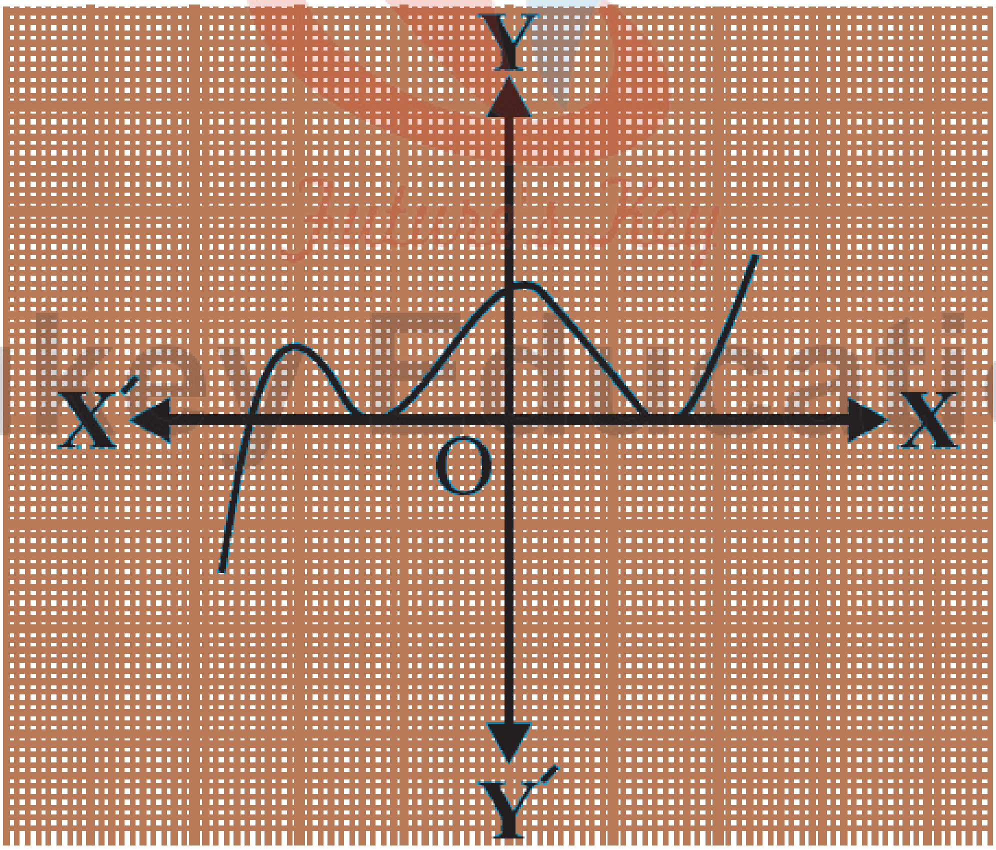
(iv) p(x) के शुन्यकों की संख्या = 2



(v) p(x) के शुन्यकों की संख्या = 4



(vi) p(x) के शुन्यकों की संख्या = 3



प्रश्नावली 2.2 (पृष्ठ संख्या 36)

प्रश्न 1 निम्न द्विघात बहुपदों के शुन्यक ज्ञात कीजिए और शुन्यकों तथा गुणांकों के बीच संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए:

(i) $x^2 - 2x - 8$

(ii) $4s^2 - 4s + 1$

(iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$

(v) $t^2 - 15$

(vi) $3x^2 - x - 4$

उत्तर-

(i) गुणनखंड विधि से:

$x^2 - 2x - 8$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x(x - 4) + 2(x - 4)$

$\Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x - 4 = 0, x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = 4, x = -2$

शून्यक; $\alpha = 4, \beta = -2$

शून्यको तथा गुणांक के बिच संबंध की सत्यता की जाँच:

a = 1, b = -2 और c = -8

शुन्यंको का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$[4 + (-2)] = \frac{-(-2)}{1}$

$2 = 2 \ldots (i)$

शुन्यंको का गुणनखंड $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$[4 + (-2)] = \frac{(-8)}{1}$

$-8 = -8 \ldots (ii)$

दोनों स्तिथतियों में संबंध सत्य है।

(ii) गुणनखंड विधि से:

$4s^2 - 4s + 1$

$\Rightarrow 4s^2 - 2s - 2s + 1 = 0$

$\Rightarrow 2s(2s - 1) - 1(2s - 1) = 0$

$\Rightarrow (2s - 1)(2s - 1) = 0$

$\Rightarrow 2s - 1 = 0, 2s - 1 = 0$

$\Rightarrow 2s = 1, 2s = 1$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2}, s = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{2} \text{ और } \beta = \frac{1}{2}$$

गुणांक a = 4, b = -4 और c =

शुन्यंको तथा गुणांकों के बिच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच:

शुन्यंको का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{-(-4)}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1+1}{2} = \frac{4}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{4}{4}$$

$$\Rightarrow 1 = 1 \ldots (i)$$

शुन्यंको का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \ldots (ii)$$

अतः दोनों (i) और (ii) स्तिथतियों म संबंध सत्य है।

(iii) $6x^2 - 3 - 7x = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 7x - 3 = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 9x + 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow 3x(2x - 3) + 1(2x - 3) = 0$

$\Rightarrow (2x - 3)(3x + 1) = 0$

$\Rightarrow 2x - 3 = 0, 3x + 1 = 0$

$\Rightarrow$ 2x = 3, 3x = -1

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{3}{2}, \mathbf{x} = \frac{-1}{3}$$

अतः $\alpha = \frac{3}{2}$ और $\beta = \frac{-1}{3}$

गुणांक a = 6, b = -7 और c = -3

शून्यांको तथा गुणांकों के बिच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच:

शून्यांको का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2} + \frac{-1}{3}\right) = \frac{-(-7)}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{9-2}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{6} = \frac{7}{6} \ldots (\mathrm{i})$$

शून्यांको का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{-3}{6}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{-1}{3} = \frac{-3}{6}$$

(iv) $4u^2 + 8u = 0$

4u(u + 2) = 0

4u = 0, और u + 2 = 0

u = 0, u = -2

अतः a = 0 और b = -2

गुणांक a = 4, b = 8 और c = 0

शून्यांको तथा गुणांकों के बिच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच;

शून्यांको का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$

$\Rightarrow 0 + (-2) = \frac{-8}{4}$

$\Rightarrow -2 = -2 \ldots (i)$

शून्यांको का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{0}{4}$

$\Rightarrow 0 \times -2 = \frac{0}{4}$

$\Rightarrow 0 = 0 \ldots (ii)$

अतः दोनों (i) और (ii) स्तिथतियों में सम्बन्ध सत्य है।

(v)

$t^2 - 15 = 0$

$\Rightarrow t^2 = 15$

$\Rightarrow t = \sqrt{15} = \pm\sqrt{15}$

$\Rightarrow t = \sqrt{15}, t = -\sqrt{15}$

अतः $\alpha = \sqrt{15}$ और $\beta = -\sqrt{15}$

गुणांक a = 1, b = 0, और c = -15

शून्यांको तथा गुणांकों के बिच संबंध की सत्यता की जाँच:

शुन्यंको का योग $(\alpha+\beta)=\frac{-b}{a}$

$\Rightarrow \sqrt{15}+(-\sqrt{15})=\frac{-(0)}{1}$

$\Rightarrow 0=0\ldots(i)$

शुन्यांको का गुणनफल $(\alpha\beta)=\frac{c}{a}$

$\Rightarrow \sqrt{15}(-\sqrt{15})=\frac{-15}{1}$

$\Rightarrow -15=-15\ldots(ii)$

अतः दोनों (i) और (ii) स्तिथतियों सम्बन्ध सत्य है।

(vi) $\Rightarrow$ $3x^2 - 4x + 3x - 4 = 0$

$\Rightarrow x(3x - 4) + 1(3x - 4) = 0$

$\Rightarrow (3x - 4)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow (3x - 4) = 0$, और $(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x=\frac{4}{3}$, और $x=-1$

अतः $\alpha=\frac{4}{3}$ और $\beta=-1$

गुणांक $a = 3$, $b = -1$ और $c = -1$

शून्यांको तथा गुणांकों के बिच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच:

शून्यांको का योग $(\alpha+\beta)=\frac{-b}{a}$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} + (-1) = \frac{-(-1)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \ldots (\mathrm{i})$$

शून्यांको का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \times (-1) = \frac{(-4)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3} = \frac{-4}{3} \ldots (2)$$

अतः दोनों (i) और (ii) स्थितियों में संबंध सत्य है।

प्रश्न 2 एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शुन्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं:

(i) $\frac{1}{4}, -1$

(ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$

(iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) 1,1

(v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

(vi) 4,1

उत्तर-

(i)

दिया है: $\alpha + \beta = \frac{1}{4}, \alpha\beta = -1$

चूँकि $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = \mathrm{kx}^2 - \mathrm{k}(\alpha + \beta)\mathrm{x} + \mathrm{k}\alpha\beta$

तुलना करने पर,

$\mathrm{a} = \mathrm{k}, \mathrm{b} = -\mathrm{k}(\alpha + \beta)$ और $c = \mathrm{k}\alpha\beta$

$\alpha + \beta = \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = \frac{1}{4}$ और $\alpha\beta = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}} = -1$

$\Rightarrow \mathrm{a} = 4$

$\Rightarrow \mathrm{b} = -4(\alpha + \beta)$

$\Rightarrow \mathrm{c} = \mathrm{k}\alpha\beta = 4(-1)$

अतः $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ के रूप में लिखने पर,

$\Rightarrow 4\mathrm{x}^2 - 4(\alpha + \beta)\mathrm{x} + 4(\alpha\beta)$

$4\mathrm{x}^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)\mathrm{x} + 4(-1)$

$\Rightarrow 4\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 4$

द्विघात बहुपद है: $4\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 4$

(ii)

दूसरी विधि से:

दिया है: $\alpha+\beta=\sqrt{2}, \alpha\beta=\frac{1}{3}$

चूँकि $ax^2+bx+c=kx^2-k(\alpha+\beta)x+k\alpha\beta$

या $ax^2+bx+x=k[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$

या $\frac{ax^2+bx+c}{k}=\left(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{3}\right)$

या $\frac{ax^2+bx+\text{\textbackslash text\{c\}}}{k}=\frac{3x^2-3\sqrt{2}x+1}{3}$

यहाँ k एक अचर पद है, तुलना करने पर k = 3

अतः $ax^2+bx+c=3x^2-3\sqrt{2}+1$

द्विघात बहुपत है: $3x^2-3\sqrt{2}x+1$

(iii)

दिया है: $\alpha+\beta=0, \alpha\beta=\sqrt{5}$

चूँकि $ax^2+bx+c=k[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$

या $\frac{ax^2+bx+c}{k}=\frac{x^2+\sqrt{5}}{1}$

यहाँ k एक अचर पद है, तुलना करने पर k = 1

अतः $ax^2+bx+c=x^2+\sqrt{5}$

द्विघात बहुपत है: $x^2+\sqrt{5}$

(iv)

दिया है: $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$

चूँकि $ax^2 + bx + c = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

या $\frac{ax^2+bx+c}{c} = \frac{x^2-x+1}{1}$

यहाँ k अचर पद है, तुलना करने पर, k = 1

अतः $ax^2 + bx + c = x^2 - x + 1$

द्विघात बहुपद है: $x^2 - x + 1$

(v)

दिया है: $\alpha = \beta = -\frac{1}{4}, \alpha\beta = \frac{1}{4}$

चूँकि $ax^2 + bx + c = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

या $\frac{ax^2+bx+c}{k} = \frac{4x^2+x+1}{4}$

यहाँ k एक अचर पद है, तुलना करने पर k = 4

अतः $ax^2 + bx + c = 4x^2 + 4x + 1$

द्विघात बहुपद है: $4x^2 + 4x + 1$

(vi)

तीसरी विधि:

दिया है: $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 1$

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{4}{1}$ और $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{1}$

तुलना करने पर, a = 1, b = -4 और c = 4

अतः $ax^2 + bx + c$ में मान रखने पर

$ax^2 + bx + c = (1)x^2 = (-4)x + 4$

$= x^2 - 4x + 4$

अतः द्विघात बहुपत है: $x^2 - 4x + 4$

प्रश्नावली 2.3 (पृष्ठ संख्या 39-40)

प्रश्न 1 विभाजन एल्गोरिथम का प्रयोग करके, निम्न में p(x) को g(x) से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए:

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3, g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5, g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6, g(x) = 2 - x^2$

उत्तर-

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3, g(x) = x^2 - 2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & X - 3 \\
\hline
x^2 - 2 & x^2 - 3x^2 + 5x - 3 \\
 & (-y)^3 \quad -2x \\
 & \quad\quad\quad (+) \\
\hline
 & -3x^2 + 7x - 3 \\
 & -3x^2 \quad\quad +6 \\
 & (+) \quad\quad (-) \\
\hline
 & 7x - 9 \\
\hline
\end{array}
$$

भागफल $q(x) = x - 3$ और शेषफल $= 7x - 9$ है।

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$, $g(x) = x^2 + 1 - x$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x - 3 \\
\hline
x^2 - x + 1 & x^4 \quad\quad - 3x^2 + 4x + 5 \\
 & x^4 - x^3 + x^2 \\
 & (-) \quad (+) \quad (-) \\
\hline
 & x^3 - 4x^2 + 4x + 5 \\
 & x^3 - x^2 + x \\
 & (-) \quad (+) \quad (-) \\
\hline
 & -3x^2 + 3x + 5 \\
 & -3x^2 + 3x - 5 \\
 & (+) \quad (-) \quad (+) \\
\hline
 & 8 \\
\hline
\end{array}
$$

भागफल $q(x) = x^2 + x - 3$ और शेषफल $= 8$ है।

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6$, $g(x) = 2 - x^2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & -x^2 - 2 \\
\hline
-x^2 + 2 & x^4 - 5x + 6 \\
 & x^4 - 2x^2 \\
 & (-) \quad (+) \\
\hline
 & 2x^2 - 5x + 6 \\
 & 2x^2 \qquad - 4 \\
 & (-) \qquad (+) \\
\hline
 & -5x + 10 \\
\hline
\end{array}
$$

भागफल $q(x) = -x^2 - 2$ और शेषफल $= -5x + 10$ है।

प्रश्न 2 पहले बहुपद से दुसरे बहुपद को भाग करके, जाँच कीजिए कि क्या प्रथम बहुपद द्वितीय का एक गुणनखंड है:

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

उत्तर-

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2t^2 + 2t + 4 \\
\hline
t^2 - 3 & 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12 \\
 & 2t^4 \qquad - 6t^2 \\
 & (-) \qquad (+) \\
\hline
 & 3t^3 + 4t^2 - 9t - 12 \\
 & 3t^3 \qquad - 9t \\
 & (-) \qquad (+) \\
\hline
 & 4t^2 \qquad - 12 \\
 & 4t^2 \qquad - 12 \\
 & (-) \qquad (+) \\
\hline
 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

चूँकि शेषफल r(x) = 0 है।

अत: $t^2 - 3$, $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$ का एक गुणनखंड है।

(ii) $x^2 + 3x + 1$, $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 - 4x + 2 \\
\hline
x^2 + 3x + 1 & 3x^2 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2 \\
 & 3x^4 + 9x^3 + 3x^2 \\
 & (-) \quad (-) \quad (-) \\
\hline
 & -4x^3 - 10x^2 + 2x + 2 \\
 & -4x^3 - 12x^2 - 4x \\
 & (+) \quad (+) \quad (+) \\
\hline
 & 2x^2 + 6x + 2 \\
 & 2x^2 + 6x + 2 \\
 & (-) \quad (-) \quad (-) \\
\hline
 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

चूँकि शेषफल r(x) = 0 है।

अत: $x^2 + 3x + 1$, $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$ का एक गुणनखंड है।

(iii) $x^3 - 3x + 1$, $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 1 \\
\hline
x^3 - 3x + 1 & x^3 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1 \\
 & x^3 - 3x^2 + x^2 \\
 & (-) \quad (+) \quad (-) \\
\hline
 & -x^3 \qquad + 3x + 1 \\
 & -x^3 \qquad + 3x - 1 \\
 & (+) \qquad (-) \quad (+) \\
\hline
 & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

चूँकि शेषफल $r(x) = 2$ है।

अत: $x^3 - 3x + 1$, $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$ का एक गुणनखंड नहीं है।

प्रश्न 3 $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ है।

उत्तर-

दिया है: $p(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$

और दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ है।

या $x - \sqrt{\frac{5}{3}} = 0, x + \sqrt{\frac{5}{3}} = 0$

या $\left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 0$

या $x^2 - \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 = 0$

या $x^2 - \frac{5}{3} = 0$

या $3x^2 - 5 = 0$

इसलिए, $3x^2 - 5 = 0$ $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

अब $3x^2 - 5$ से $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ में भाग देने पर

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 1 \\
\hline
3x^2 - 5 & 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5 \\
 & 3x^4 \qquad\quad - 5x^2 \\
 & (-) \qquad\quad (+) \\
\cline{2-2}
 & \qquad 6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 \\
 & \qquad 6x^3 \qquad\quad - 10x \\
 & \quad (-) \qquad\quad (+) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 3x^2 - 5 \\
 & \qquad\qquad 3x^2 - 5 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

अत: $p(x) = (3x^2 - 5)(x^2 + 2x + 1)$

अब, $x^2 + 2x + 1$ को गुणनखंड कर शुन्यक ज्ञात करने पर

$= x^2 + x + x + 1 = 0$

$= x(x + 1) + 1(x + 1) = 0$

$= (x + 1)(x + 1) = 0$

या $x + 1 = 0, x + 1 = 0$

या $x = -1, x = -1$

अतः दो अन्य शून्यक -1 और -1 है।

प्रश्न 4 यदि $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर, भागफल और शेषफल क्रमशः $x - 2$ और $-2x + 4$ हैं तो $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है : भाज्य $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

भागफल $q(x) = x - 2$,

शेषफल $r(x) = -2x + 4$

भाजक $g(x) = ?$

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = g(x)\,(x - 2) + (-2x + 4)$

$x^3 - 3x^2 + x + 2 + 2x - 4 = g(x)(x - 2)$

$g(x)(x - 2) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\ \hline
x - 2 & x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & (-) \quad (+) \\ \hline
 & -x^2 + 3x - 2 \\
 & -x^2 + 2x \\
 & (+) \quad (-) \\ \hline
 & x - 2 \\
 & x - 2 \\
 & (-) \quad (+) \\ \hline
 & 0 \\ \hline
\end{array}
$$

अत: भाजक $g(x) = x^2 - x + 1$ है।

प्रश्न 5 बहुपदों $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ और $r(x)$ के ऐसे उदाहरण दीजिए जो विभाजन एल्गोरिथम को संतुष्ट करते हों तथा

(i) घात $p(x)$ = घात $q(x)$ हो

(ii) घात $q(x)$ = घात $r(x)$ हो

(iii) घात $r(x) = 0$ हो

उत्तर-

(i) युक्लिड विभाजन एल्गोरिथम से,

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ जहाँ $q(x) = 0$ हो

घात $p(x)$ = घात $q(x)$ हो

भाज्य $p(x)$ और भागफल $q(x)$ की घात सामान तभी हो सकता है जब भाजक $g(x)$की घात 0 अर्थात कोई संख्या हो।

उदाहरण: माना $p(x) = 2x^2 - 6x + 3$

और माना $g(x) = 2$

भाग देने पर,

$p(x) = 2x^2 - 6x + 2 + 1$

$= 2(x^2 - 3x + 1) + 1$

अब $2(x^2 - 3x + 1) + 1$ को $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ से तुलना करने पर हम पाते हैं।

अत: $q(x) = x^2 - 3x + 1$ और $r(x) = 1$

इससे घात $p(x)$ = घात $q(x)$ प्राप्त होता है।

(ii) युक्लिड विभाजन एल्गोरिथम से,

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ जहाँ $q(x) = 0$ हो,

घात $q(x)$ = घात $r(x)$ हो,

यह स्थिति तब आती है जब $p(x)$ और $g(x)$ का घात सामान हो जैसे-

माना $p(x) = 2x^2 + 6x + 7$ और $g(x) = x^2 + 3x + 2$

भाग देने पर, $q(x) = 2$ और $r(x) = 3$

अतः घात $q(x)$ = घात $r(x)$ है।

(iii) युक्लिड विभाजन एल्गोरिथम से,

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ जहाँ $q(x) = 0$ हो,

घात $r(x) = 0$ हो,

$r(x) = 0$ तब होता है जब $p(x)$, $g(x)$ से पूर्णतः विभाजित हो,

माना, $p(x) = x^2 - 1$ और $g(x) = x + 1$

विभाजित करने पर

$q(x) = x - 1$ और $r(x) = 0$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 2.4 (पृष्ठ संख्या 40)

प्रश्न 1 सत्यापित कीजिए कि निम्न त्रिघात बहुपदों के साथ दी गई संख्याएँ उसकी शून्यक हैं। प्रत्येक स्थिति में शून्यकों और गुणांकों के बीच के संबंध् को भी सत्यापित कीजिए:

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2; \frac{1}{2}, 1, -2;$

(ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2; 2, 1, 1$

उत्तर-

(i) $p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

$$\therefore p\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\tfrac{1}{2}\right) + 2$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + \frac{2}{1}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{+4} \frac{2}{1}\right) - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}$, बहुपद p(x) का एक शून्यक है।

पुनः $p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2$

$= 2 + 1 - 5 + 2$

$= (2 + 2 + 1) - 5 = 5 - 5 = 0$

$\Rightarrow$ 1, बहुपद p(x) का एक शून्यक है।

अब, $p(-2) = 2(-2)^3 + (-2)^2 - 5(-2) + 2$

$= 2(-8) + (4) + 10 + 2$

$= -16 + 4 + 10 + 2$

$= -16 + 16 = 0$

$\Rightarrow$ -2, बहुपद p(x) का एक शून्यक है।

शुन्यंको और गुणांकों के संबंद

$\because p(x) = 2x^3 + x^2 - 5 + 2$

$\therefore$ इसकी तुलना ax3 + bx2 + cx + d से करने पर,

a = 2, b = 1, c = -5 और d = 2

तथा p(x) के लिए दीए गये शून्यक $\frac{1}{2}, -2$ और 1 है।

इसलिए $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ और $\gamma = -2$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} + 1 + (-2) = -\frac{1}{2}$

शून्यको का योगफल $= \frac{-b}{a} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$

दो शून्यको को क्रमानुसार एक साथ लेकर उनके गुणनफल का योगफल:

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{2}(1) + 1(-2) + (-2)\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} - 2 - 1 = \frac{-5}{2} = \frac{c}{a}$

तीनो शून्यको का गुणनफल

$= \alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} \times 1 \times (-2) = -1$

अर्थात्

$\frac{-d}{a} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$

इस प्रकार, p(x) के शून्यको और गुणांकों के संबंध सत्यापित होते है।

(ii) यहाँ,

$p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$p(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 2$

= 8 - 16 + 10 - 2 = 18 - 18 = 0

⇒ 2, बहुपद p(x) का शून्यक है।

पुनः $p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 5(1) - 2$

= 1 - 4 + 5 - 2 = 6 - 6 = 0

⇒ 1 बहुपद p(x) का शून्यक है।

∴ 2, 1 और 1 बहुपद p(x) शून्यक है।

अब, $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ की तुलना $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के साथ करने पर,

a = 1, b = -4, c = 5 और d = -2

∵ 2, 1 और 1 बहुपद p(x) के शून्यक है।

माना $\alpha = 2;\ \beta = 1;\ \gamma = 1$

संबंध: $\alpha + \beta + \gamma = 2 + 1 + 1 = 4$

शून्यको लका योगफल $= \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$

दो शून्यको का क्रमानुसार एक साथ लेकर उनके गुणनफल का योगफल

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2(1) + 1(1) + 1(2)$$

$$= 2 + 1 + 2 = 5$$

तथा $\frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\beta = \frac{c}{a}$$

शुन्यंको का गुणनफल $\alpha\beta\gamma = (2)(1)(1) = 2$

$$\frac{-d}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

इस प्रकार बहुपद p(x) के शून्यको व गुणांकों के संबंध सत्यापित होते है।

प्रश्न 2 एक त्रिघात बहुपद प्राप्त कीजिए जिसके शून्यकों का योग, दो शून्यकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफलों का योग तथा तीनों शून्यकों के गुणनफल क्रमशः 2, -7, -14 हों।

उत्तर- माना अभीष्ठ तरीघाट बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ है और α, β तथा γ इसके शून्यक है।

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \frac{-(\text{x का गुणांक})}{\text{x}^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{\text{x का गुणांक}}{\text{x}^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-\text{ अचर पद}}{\text{x}^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-d}{a}$$

अब, $\alpha + \beta + \gamma = 2 = \frac{-d}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7 = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -14 = \frac{-d}{a}$

यदि a = 1 हो, तो $\frac{-b}{a} = 2 \Rightarrow b = -2$

$\frac{c}{d} = -7 \Rightarrow c = -7$

$\frac{d}{a} = -14 \Rightarrow d = 14$

$\therefore$ अभीष्ठ त्रिघातिय बहुपद

$1x^3 + (-2)x^2 + (-7)x + 14$

$= x^3 - 2x^2 - 7x + 14$

प्रश्न 3 यदि बहुपव $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के शून्यक $a - b, a, a + b$ हों, तो a और b ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया गया है कि: $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

इसकी तुलना $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ से करने पर,

चूँकि p(x) के शुन्यंक (a - b), a और (a + b) है।

$\therefore$ माना $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{B}{A} = -\frac{(-3)}{1} = 3$

$\Rightarrow (a - b) + a(a + b) = 3$

$\Rightarrow 3a = 3$

$\Rightarrow a = \frac{3}{3} = 1$

पुनः $\alpha\beta\gamma = \frac{-D}{A} = -1$

$$\Rightarrow (a-b)\times a\times(a+b)=-1$$

$$\Rightarrow (1-b)\times 1\times 1(1+b)=-1$$

$[\because a=1,$ ऊपर सिद्ध किया गया है।$]$

$$\Rightarrow 1-b^2=-1$$

$$\Rightarrow b^2=1+1=2\Rightarrow b=\pm\sqrt{2}$$

अतः a = 1 और $b=\pm\sqrt{2}$

प्रश्न 4 यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ के दो शून्यक $2 \pm \sqrt{3}$ हों, तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

चूँकि $p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$

चूँकि p(x) के दो शून्यक $= 2\pm\sqrt{3}$ है।

$\therefore [x-(2+\sqrt{3})][x-(2-\sqrt{3})]$ या $[(x-2)-\sqrt{3}][(x-2)+\sqrt{3}]$

या $(x-2)^2-\sqrt{3})^2 \Rightarrow$ या $(x^2+4-4x)-3$

या $x^2-4x+1 \therefore (x^2-4x+1)$ बहुपद p(x)का एक गुणनखंड है।

अब, x2 - 4x + 1 से p(x) को विभाजित करने पर,

$$
\begin{array}{r}
x^2 - 2x - 35 \\
x^2 - 4x + 1 \,\big)\; x^4 - 6x^2 - 26x^2 + 138x - 35 \\
x^4 - 4x^2 + x^2 \qquad\qquad\qquad\; \\
(-)\;(+)\quad(-) \qquad\qquad\qquad\quad \\
\hline
-2x^3 - 27x^3 + 138x - 35 \\
-2x^3 + 8x^2 + 140x - 35 \\
(+)\qquad(-)\qquad(+)\qquad\qquad \\
\hline
-35x^2 + 140x - 35 \\
-35x^2 + 140x - 35 \\
(+)\qquad(-)\qquad(+)\quad \\
\hline
0 \qquad\qquad \\
\hline
\end{array}
$$

$$\therefore (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 35) = p(x)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4x + 1)(x - 7)(x + 5) = p(x)$$

अर्थात् (x - 7) और (x + 5) बहुपद p(x) के गुणनखण्ड है।

$\therefore$ 7 और -5, बहुपद p(x) के अन्य शून्यक है।

प्रश्न 5 यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ को एक अन्य बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाए और शेषफल x + a आता हो, तो k तथा a ज्ञात कीजिए।

उत्तर- बहुपद x4 - 6x3 + 16x2 - 25x + 10 और x2 - 2x + k पर विभाजन एल्गोरिथ्म से हमे प्राप्त होता है:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + (8 - k) \\
x^2 - 2x + k & x^4 - 6x^3 + 16x^3 - 25x + 10 \\
 & x^4 - 2x^3 + kx^2 \\
 & (-) \quad (+) \quad (-) \\
\hline
 & - 4x^2 + (16 - k)x^2 - 25x + 10 \\
 & - 4x^3 + 8x^2 \qquad - 4kx \\
 & (+) \quad (-) \quad (+) \\
\hline
 & [(16 - k) - 8]x^2 + (-25 + 4k)\,x + 10 \\
 & \text{या} \\
 & (8 - k)x^2 + (4k - 25)x + 10 \\
 & (8 - k)x^2 - 2(8 - k)x + k(8 - k) \\
 & (-) \quad (+) \quad (-) \\
\hline
 & [(-25 + 16)+(4k - 2k)]x - k(8-k)+ 10 \\
 & \text{या} \\
 & (-9 + 2k)\,x - k(8-k) + 10 \\
\hline
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ शेषफल $= (2k - 9)x - k(8 - k) + 10$ ...(i)

परन्तु शेषफल $= x + a$ ...(ii)

अतः (i) और (ii) से, $2k - 9 = 1$

$$\Rightarrow 2k = 11 + 9 = 10 \Rightarrow k = \frac{10}{2} = 5$$

और $\alpha = -k(8 - k) + 10 = -5(8 - 5) + 10$

$= -5(3) + 10 = -15 + 10 = -5$

अतः $k = 5$ और $\alpha = -5$