गणित

अध्याय-14: प्रायिकता

भूमिका (Introduction)-

प्रायिकता के सिद्धान्त की उत्पत्ति जुआरियों और सटोरियों की प्रेरणा से हुई थी। 17वीं शताब्दी में यूरोप के जुआरियों और सटोरियों ने अपने खेलों से सम्बन्धित समस्याओं को तात्कालिक गणितज्ञों गैलीलियो, पास्कल, फर्मा, कारडेनो आदि के सम्मुख रखा। उनके गणितीय अध्ययन के फलस्वरूप ही प्रायिकता सिद्धान्त की उत्पत्ति हुई। 18वीं और 19वीं शताब्दी में प्रमुख गणितज्ञों लाप्लास, गॉस और बरनौली ने इस सिद्धान्त का विकास किया। 20वीं शताब्दी में प्रायिकता सिद्धान्त पर आधारित प्रतिचयन सिद्धान्त, क्रीड़ा सिद्धान्त, निर्णय सिद्धान्त आदि का प्रतिपादन हुआ, जिनका श्रेय आर. एस. फिशर तथा कार्ल पियर्सन आदि को जाता है।

आजकल प्रायिकता सिद्धान्त प्राकृतिक तथा भौतिक विज्ञानों, अर्थशास्त्र, व्यवसाय-प्रबन्ध, बीमा व्यवसाय, संयोग पर आधारित खेलों में होता है। सर्वाधिक उपयोग बीमा कंपनियों द्वारा किया जा रहा है।

प्रायिकता का अर्थ (Meaning of Probability)-

अभी तक हमने गणित में ऐसे प्रश्नों का हल ढूँढा है जिनका निश्चित उत्तर होता है। जैसे-(i) त्रिज्या ज्ञात होने पर वृत्त की परिधि तथा क्षेत्रफल ज्ञात करना, (ii) एक निश्चित ऊँचाई पर स्थित वस्तु की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करना, (iii) n वस्तुओं में से। वस्तुओं को लेकर संचयों की संख्या ज्ञात करना।

अब निम्न प्रश्नों पर विचार कीजिए-

1. क्या आज वर्षा होगी?
2. क्या मेरा भाई कल आयेगा?
3. क्या तुम परीक्षा में उत्तीर्ण होगे?
4. क्या तुम्हें नौकरी मिल जायेगी?

इन प्रश्नों का एक निश्चित उत्तर नहीं हो सकता।

प्रश्न (1) का उत्तर हाँ या नहीं दोनों हो सकता है जो एक अनिश्चितता को दर्शाता है; उपर्युक्त अन्य प्रश्नों के भी उत्तर देने में अनिश्चितता है।

प्रायिकता सिद्धान्त ऐसी ही घटनाओं की अनिश्चितता के माप का अध्ययन करता है, जिनके केवल एक ही परिणाम न होकर अनेक संभव परिणाम हों। वे परिणाम पूर्णतया संयोग (Chance) पर आधारित होते हैं।

यादृच्छिक प्रयोग एवं प्रतिदर्श समष्टि (Random Experiment and Sample Space) -

1. **यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment)-** अनेक संभव परिणामों वाला प्रयोग जिसमें से एक और केवल एक परिणाम का एकल परीक्षण में आना निश्चित हो लेकिन परिणाम का सही पूर्वानुमान न हो, यादृच्छिक प्रयोग कहलाता है।

   यादृच्छिक प्रयोग के परिणाम पूर्णतः संयोग (Chance) पर निर्भर करते हैं।

   उदाहरणार्थ- एक साधारण सिक्के को उछाला जाय तो यह तो ज्ञात है कि शीर्ष (Head) या पुच्छ (Tail) आयेगा लेकिन सिक्के को उछालने से पहले यह निश्चित रूप से कहा नहीं जा सकता कि शीर्ष ही आयेगा या पुच्छ ही आयेगा।

2. **प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space) -** यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभव परिणामों का समुच्चय प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है। इसे S से दर्शाया जाता है।

   उदाहरणार्थ- अगर ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी हुई गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाये, तो एक संभावित प्रतिदर्श समष्टि सभी रैंकों (इक्का से बादशाह तक) का समूह, जबकि एक अन्य किसी पत्ते का सूट (ईंट, चिड़ी, पान या हुकुम) हो सकता है।

प्रतिदर्श बिन्दु (Sample Point)-

प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक अवयव उसका एक प्रतिदर्श बिन्दु कहलाता है। प्रतिदर्श बिन्दुओं को संकेत W_1, W_2: ...., W_n, से दर्शाया जाता है।

स्पष्टतया $S = \{W_1, W_2, W_3, ..., w.\}$

कुछ यादृच्छिक प्रयोग व उनके प्रतिदर्श समष्टि निम्न हैं:

यादृच्छिक प्रयोग	**प्रतिदर्श समष्टि**
(i) एक सिक्के को उछालना	S = {H, T}

(ii) एक पासे को फेंकना	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
(iii) दो अनभिनत सिक्कों को एक साथ उछालना	S = {HH, HT, TH, TT}

नोट:

i. प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक अवयव यादृच्छिक प्रयोग के संभव परिणामों में से एक होता है।
ii. एक समय में एक ही परिणाम सम्भव होता है।
iii. संभव परिणामों में से एक का आना निश्चित होता है।

प्रतिदर्श समष्टि के प्रकार (Types of Sample Space)-

प्रतिदर्श समष्टि चार प्रकार के होते हैं-

1. **परिमित प्रतिदर्श समष्टि (Finite Sample Space)-** यदि प्रतिदर्श समष्टि में बिन्दुओं की संख्या परिमित हो तो वह परिमित प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है।

   उदाहरणार्थ- एक सिक्के की उछाल में दो ही प्रतिदर्श बिन्दु होते हैं। एक पासे की फेंक में केवल 6 प्रतिदर्श बिन्दु होते हैं तथा ताश की गड्डी में से एक पत्ता खींचने पर प्रतिदर्श बिन्दु 52 होते हैं। ये सभी परिमित प्रतिदर्श समष्टि हैं।

2. **अपरिमित प्रतिदर्श समष्टि (Non-finite Sample Space)-** यदि प्रतिदर्श समष्टि में प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या अपरिमित हो तो उसे अपरिमित प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं।

   उदाहरणार्थ-

   i. वायुमण्डल में उपस्थित ऑक्सीजन गैस के अणु अपरिमित हैं तथा बाँध में पानी की बूंदें अपरिमित होती हैं।
   ii. किसी पौध नर्सरी जहाँ पौधों की संख्या सीमित हो सकती है, फिर भी वह अपरिमित प्रतिदर्श समष्टि होता है।

   किसी पासे को अनन्त बार फेंका जाय जब तक कि वह घिस न जाय यह भी अपरिमित प्रतिदर्श समष्टि बनाता है।

3. **संतत प्रतिदर्श समष्टि (Continuous Sample Space)-** यदि यादृच्छिक चर दिये गये अन्तराल में प्रत्येक मान ग्रहण कर सके तथा उसमें से किसी मान पर विचार किया जाय तो वह संतत प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है।

   उदाहरणार्थ- किसी बर्तन में गैस के अणुओं का वेग संतत प्रतिदर्श समष्टि होता है जो न्यूनतम व अधिकतम वेग के मध्य कोई भी मान ग्रहण कर सकता है।

4. **विविक्त प्रतिदर्श समष्टि (Discrete Sample Space)-** यदि यादृच्छिक चर केवल पूर्णांक मान ग्रहण करे तो उसके मानों को विविक्त प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं।

   उदाहरणार्थ- चार पासों की उछाल में सभी पासों पर समान संख्या आने को दर्शाने वाले बिन्दु विविक्त समष्टि को दर्शाते हैं।

5. **विविक्त प्रतिदर्श समष्टि-** विविक्त प्रतिदर्श समष्टि में अवयवों की संख्या परिमित या अपरिमित (गणनीय) हो सकती है जिन्हें धन पूर्णांकों के संगत क्रमानुसार लिखा जा सकता है।

   उदाहरणार्थ-

   i. एक पासे तथा एक सिक्के को साथ-साथ उछालने से प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि में 12 प्रतिदर्श बिन्दु हैं।

   S = {(1, H), (1, T), (2, H), (2, T), (3, H), (3, T), (4, H), (4, T), (5, H), (5, T), (6, H), (6, T)}

   ii. एक सिक्के को तब तक उछाला जाय जब तक शीर्ष न प्राप्त हो तो

   S = {H, TH, TTH, TTTH, ...}

इसमें प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या अपरिमित है लेकिन इन्हें 1, 2, 3, 4, ... करके गिना जा सकता है।

घटना और उसका घटित होना (Event and Occurrence of an Event)

1. **घटना (Event)-** प्रतिदर्श समष्टि s के किसी उपसमुच्चय को घटना कहते हैं। इसे अंग्रेजी के केपिटल अक्षरों E, A, B, C, ... से निरूपित करते हैं।

2. **घटनाका घटित होना (Occurrence ofan Event)**- यदि याद्दच्छिक प्रयोग का परिणाम किसी घटना को दर्शाने वाले उपसमुच्चय का एक अवयव है तो घटना होती हुई कही जाती है अन्यथा नहीं।

गणितीय रूप में, घटना $E \subseteq S$ घटित होती हुई कही जाती है, यदि याद्दच्छिक प्रयोग से प्राप्त परिणाम w ऐसा है कि $W \in E$.

यदि $W \notin E$ तो हम कहते हैं कि घटना घटित नहीं हुई है।

उदाहरणार्थ- दो सिक्कों को उछालने के प्रयोग में, माना E दोनों सिक्कों पर एक ही परिणाम आने की घटना को प्रदर्शित करता है। तब घटना E घटती हुई कही जाती है, यदि दोनों सिक्के समान परिणाम H, H या T, T देते हैं। घटना E घटती हुई नहीं कही जाती है, यदि एक सिक्के पर शीर्ष आता है तथा दूसरे पर पुच्छ।

i. एक सिक्के को उछालना एक याद्दच्छिक प्रयोग है तथा H और T क्रमश: शीर्ष तथा पुच्छ को व्यक्त करते हैं, तब प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{H,T\}$

यहाँ शीर्ष ऊपर आने की घटना $E_1 = \{H\}$

और पुच्छ ऊपर आने की घटना $E_2, = \{T\}$

स्पष्टत: $E_1 \subset S$ तथा $E_2 \subset S$

ii. मान लीजिए कि दो सिक्के एक बार उछाले जाते हैं।

तब प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$.

घटनायें:

i. दोनों शीर्ष ऊपर एक साथ आने की घटना

$E_1 = \{HH\}$

ii. दोनों पुच्छ ऊपर एक साथ आने की घटना

$E_2 = \{TT)$

iii. एक शीर्ष तथा एक पुच्छ ऊपर एक साथ आने की घटना

$E_3 = \{HT, TH\}$

स्पष्ट है कि E_1, E_2, E_3, सभी के उपसमुच्चय हैं।

iv. जब दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं, तब 1, 2, 3, 4, 5, 6 अंकों के ऊपर आने की परिणामों का समुच्चय

S = {(1, 1), (1, 2), (1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(2, 1), (2, 2), (2, 3),(2, 4),(2, 5),(2, 6),

(3, 1),(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5),(4, 6),

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),

(6,1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

उपर्युक्त में से प्रत्येक युग्म एक घटना है, कुल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या 36 है।

कुछ घटनायें निम्नलिखित हैं :

1. दो अंकों का योग 7 आने की घटना

E_1 = {(1, 6), (2, 5), (3, 4)(4, 3), (5, 2), (6, 1)}

2. दो अंकों का योग 10 आने की घटना

E_2 = {(4, 6), (5, 5),(6, 4)}

नोट: किसी यादृच्छिक प्रयोग से सभी घटनाओं की संख्या प्रतिदर्श समष्टि S के सम्भव उपसमुच्चयों की कुल संख्या होती है। यदि n(S) = N तो S के 2^N उपसमुच्चय होते हैं अर्थात् कुल 2^N घटनाएं होती हैं।

घटनाओं के प्रकार (Types of Events)-

1. **सरल घटनाएँ (Simple or Elementary Events)-** प्रतिदर्श समष्टि का ऐसा उपसमुच्चय जिसमें केवल एक अवयव हो, सरल घटना कहलाती है।

अनुच्छेद 6(B)-6 के उदाहरण (i) में E_1 व E_2, उदाहरण (i) में E_1 व E_2, सरल घटनाएँ हैं।

2. **यौगिक घटनाएँ (Composite Events)-** वह घटना जिसे प्रदर्शित करने वाले उपसमुच्चय में सम्बन्धित प्रतिदर्श समष्टि के एक से अधिक अवयव हों, यौगिक घटना कहलाती है।

   अनुच्छेद 6(B)-6 के उदाहरण (iii) में E_1 व E_2 यौगिक घटनाएँ हैं।

3. **निश्चित घटना (Sure of Certain Event)-** किसी याद्दच्छिक प्रयोग से प्राप्त प्रतिदर्श समुच्चय S निश्चित घटना कहलाती है। चूंकि स्वयं अपना उपसमुच्चय होती है एवं प्रयोग का प्रत्येक परिणाम S का अवयव होता है अतः S एक निश्चित घटन होती है।

   उदाहरण: एक पासे की उछाल में ऊपरी तल पर छः या' उससे छोटी प्राकृत संख्या आना निश्चित घटना है। दी गई घटना = {1, 2, 3, 4, 5, 6) जो कि S ही है।

4. **असंभव घटना (Impossible Event)-** वह घटना जिसमें प्रतिदर्श समष्टि का कोई भी अवयव नहीं होता अर्थात् रिक्त समुच्चय असम्भव घटना कहलाती है।

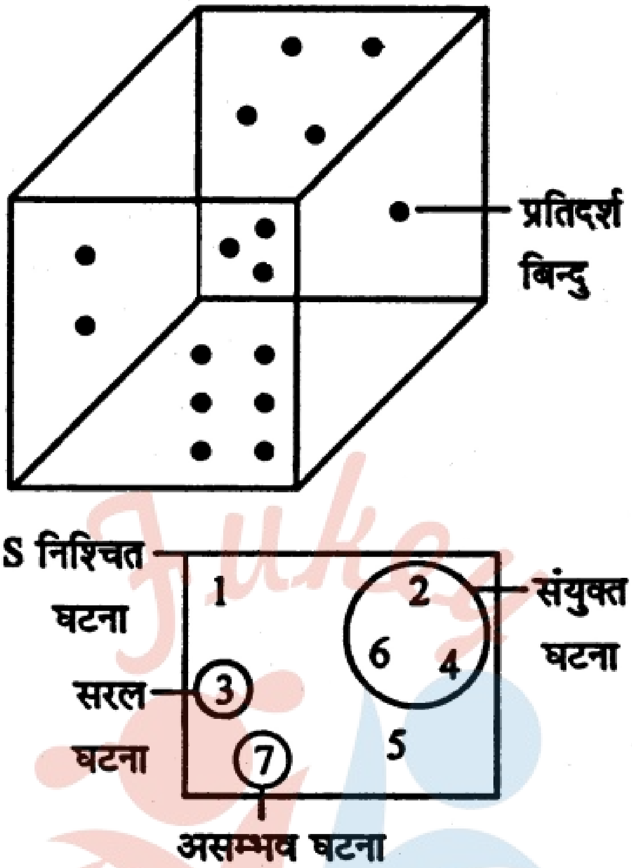
   रिक्त समुच्चय ϕ या { } प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है।

   उदाहरणार्थ: एक पासे की फेंक में ऊपरी तल पर संख्या 8 का आना एक असम्भव घटना है।

5. **समसंभावी घटनाएँ (Equally Likely Events)-** जब दो या अधिक घटनाओं में से प्रत्येक के घटित होने की संभावना समान हो तो ऐसी घटनाएँ समसंभावी घटनाएँ कहलाती हैं।

   उदाहरणार्थ: एक सिक्के की एक उछाल में शीर्ष का आना और पुच्छ का आना ये दो समसंभावी घटनाएँ हैं।

   एक पासे की एक फेंक में 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से किसी भी एक अंक का आना समसंभावी घटनाएँ हैं।



6. **मिश्र या संयुक्त घटनाएँ (Compound Events)-** जब दो या दो से अधिक घटनाओं का घटित होना एक-दूसरे से सम्बन्धित होता है तो उनके एक साथ घटित होने की घटना मिश्र या संयुक्त घटना कहलाती है।

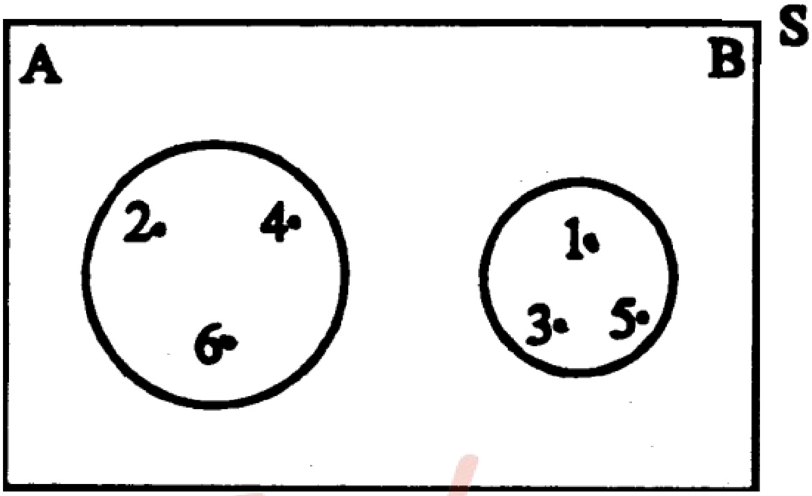
   यदि A तथा B किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ हैं तो A व B की मिश्र घटना दोनों घटनाओं का सर्वनिष्ठ होती है।

   मिश्र घटना को A और B या $A \cap B$ से दर्शाते हैं।

   उदाहरणार्थ: एक पासे की एक फेंक में A = सम संख्या आना तथा B = 4 से बड़ी संख्या का आना हो तो A व B की संयुक्त घटना होगी: $A \cap B$ = 4 से बड़ी सम संख्या का आना।

   अत: A = {2, 4, 6,}, B = {6} तो $A \cap B = \{G\}$

7. **परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (Mutually Exclusive Events)-** किसी यादृच्छिक प्रयोग से सम्बन्धित प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कहलाती हैं यदि दोनों घटनाएँ एक साथ घटित न हों अर्थात् $A \cap B = \emptyset$.



उदाहरणार्थ: एक पासे की एक फेंक में S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

तथा

A = सम अंक ऊपर आना = {2, 4, 6}

B = विषम अंक ऊपर आना = {1, 3, 5}

$\because A \cap B = \emptyset$. अतएव A व B परस्पर अपवर्जी हैं।

जैसा कि वेन-चित्र (Venn Diagram) में निरूपित है। इसी प्रकार यदि A_1, A_2,A_3,........, A_n n घटनाएँ हैं तो उनके परस्पर अपवर्जी होने का अर्थ है कि उनमें से दो-दो, तीन-तीन या अधिक को लेने पर उनका सर्वनिष्ठ $\emptyset$ हो।

8. **पूरक घटनाएँ (Complementary Events)-** यदि किसी याद्दच्छिक प्रयोग से सम्बद्ध प्रतिदर्श समष्टि S हो तथा उससे सम्बद्ध एक घटना A हो तो s के सापेक्ष A का पूरक समुच्चय A' या A^c भी एक घटना है जो की पूरक घटना कहलाती है।

उदाहरणार्थ: ऊपर के उदाहरण में A = {2, 4, 6} तथा B = {1, 3, 5} परस्पर पूरक घटनाएं हैं।

स्पष्ट है कि दो परस्पर पूरक घटनाएँ हमेशा परस्पर अपवर्जी होती हैं लेकिन दो अपवर्जी घटनाएँ हमेशा एक-दूसरे की परक नहीं होतीं। चित्र में रेखांकित भाग A की पूरक घटना A' को दर्शाता है।

9. **सर्वांगपूर्ण या निःशेषी घटनाएँ (Exhautive Events)-** किसी याद्दच्छिक प्रयोग के समस्त संभव परिणामों की घटनाओं को जबकि प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक बिन्दु कमसे-कम किसी एक घटना का अवयव हो, निःशेषी घटनाएँ कहते है।

उदाहरणार्थः यदि तीन सिक्के एक साथ एक बार उछाले जायें,

तो S = {HHH, HHT, HTH, HTT, TTT, THT, TTH, THH)

तथा A = {HHH, HTH}

B = {HHT, TTH, HTH}

C = {HTT, THH, THT, TTT, TTH}

ये तीनों घटनाएँ A, B व C निःशेषी हैं क्योंकि प्रतिदर्श समष्टि S का प्रत्येक अवयव कम-से-कम एक घटना का अवयव है।

10. **निःशेषी तथा परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (Exhaustive and Mutually Exclusive Events)-** प्रतिदर्श समष्टि S से सम्बद्ध n घटनाएँ परस्पर अपवर्जी तथा निःशेषी कहलाती हैं, यदि उनमें से एक समय में एक और केवल एक ही हो सकती है।

उदाहरणार्थः दो सिक्कों की एक बार एक साथ उछाल में S = {HH, HT, TT)} तथा A = {HH}, B = {TT),C = {HT, TH) है, तो A, B, C निःशेषी व परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं। स्पष्ट है $A \cup B \cup C = S$ तथा $A \cap B \cap C = \emptyset$.

अनुकूल समसंभावी सरल घटनाएँ (Favourable Equally likely Events)

अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दु (Favourable Sample Points)-

जब किसी याद्दच्छिक प्रयोग का परिणाम किसी घटना A का अवयव होता है तो कहा जाता है कि घटना A घटित हुई है। प्रतिदर्श समष्टि S के वे प्रतिदर्श बिन्दु जो A के अवयव होते हैं, A के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दु कहलाते हैं। चूँकि प्रत्येक प्रतिदर्श बिन्दु समसंभावी सरल घटना होती है अतः S के वे प्रतिदर्श बिन्दु जो A के भी अवयव हैं, A के अनुकूल समसंभावी सरल घटनाएँ कहलाती हैं।

उदाहरणार्थः एक अनभिनत पासे की उछाल में S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} है। पुनः घटना A = पासे की ऊपरी फलक पर विषम संख्या आना है तो घटनाएँ {1}, {3}, {5) अर्थात् ऊपरी फलक पर

एक का आना, तीन का आना, पाँच का आना ये तीनों A के संगत अनुकूल समसंभावी सरल घटनाएँ हैं।

नोट: प्रतिदर्श समष्टि 5 के वे अवयव जो घटना A के अवयव नहीं हैं,

A के प्रतिकूल प्रतिदर्श बिन्दु (Unfavourable Sample Points) कहलाते हैं।

उपर्युक्त उदाहरण में A के प्रतिकूल प्रतिदर्श बिन्दु 2,4 व 6 हैं। स्पष्ट है कि A के प्रतिकूल प्रतिदर्श बिन्दु 4 के पूरक घटना के अवयव होते हैं।

संयोगानुपात (Odds)-

किसी यादृच्छिक प्रयोग के संगत प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या n(S) है तथा किसी घटना A के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या = n(A) व A के प्रतिकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या = n(A') हो तो

A के अनुकूल संयोगानुपात $= \frac{n(A)}{n(A')}$

तथा A के प्रतिकूल संयोगानुपात $= \frac{n(A')}{n(A)}$

उदाहरणार्थ 1: एक थैले में 3 काली व 4 लाल गेंदें मौजूद हैं। उसमें से एक गेंद यदृच्छया निकालने पर, $S = \{B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4\}$

जहाँ B काली गेंद व R लाल गेंद का संकेत है।

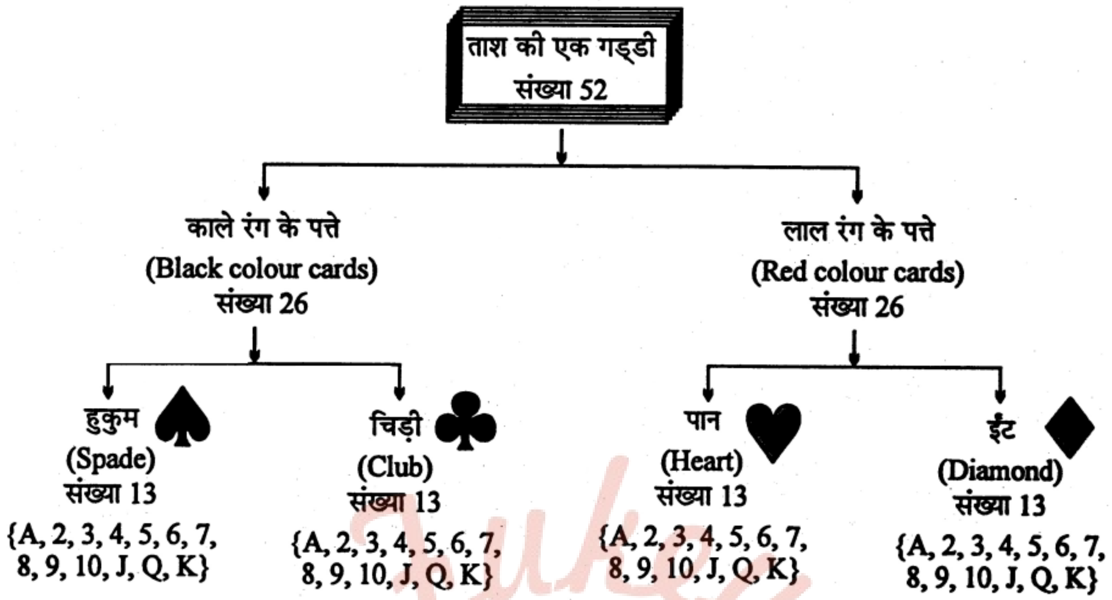
पुन: घटना A = गेंद का लाल होना = $\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$

तो A के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या = n(A) = 4

व A के प्रतिकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या =n(A') = 3

$\therefore$ A के अनुकूल संयोगानुपात $= \frac{4}{3}$

तथा A के प्रतिकूल संयोगानुपात $= \frac{3}{4}$



1. रंग (Colours)- दो रंग के (काले और लाल) पत्ते होते हैं।
2. प्रकार(Suits) ताश की एक गड्डी में चार प्रकार (Suits) के पत्ते होते हैं, ये
   - (हुकुम (Spade)
   - चिड़ी (Club)
   - पान (Heart)
   - ईंट (Diamond).
3. चेहरे वाले पत्ते (Face cards)-3 होते हैं
   - गुलाम (Jack),
   - बेगम (Qucen),
   - बादशाह (King).

   संख्या 12(4 गुलाम, 4 बेगम,4 बादशाह)।
4. पत्तों का ऑनर (Honours)-4 इक्के (Ace) तथा 12 चेहरे वाले पत्तों को मिलाकर कुल 16 पत्तों का एक ऑनर कहलाता है।
5. प्रत्येक प्रकार (Suit) में कुल 13 पत्ते होते हैं।

पत्ते / प्रकार (Suit)	J गुलाम (Jack)	Q बेगम (Queen)	K बादशाह (King)	A इक्का (Ace)
♠ हुकुम (Spade)	1	1	1	1
♣ चिड़ी (Club)	1	1	1	1
♥ पान (Heart)	1	1	1	1
♦ ईंट (Diamond)	1	1	1	1
योग	4	4	4	4

प्रायिकता की परिभाषा (Definition of Probability)-

किसी यादृच्छिक प्रयोग के संगत प्रतिदर्श समष्टि S के अवयवों की संख्या n(S) तथा किसी घटना A के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या n(A) हो तो घटना A की प्रायिकता,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \dots (1)$$

अर्थात्

$$P(A) = \frac{\text{घटना } A \text{ में प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या}}{\text{प्रतिदर्श समष्टि } S \text{ में प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या}}$$

$$\text{या } P(A) = \frac{A \text{ के अनुकूल सरल घटनाओं की संख्या}}{\text{समसंभावी सरल घटनाओं की कुल संख्या}} \quad \dots (2)$$

उदाहरण 1. एक परीक्षण में 2 बच्चों वाले परिवारों में से प्रत्येक में लड़के-लड़कियों की संख्याओं को लिखा जाता हैं।

1. यदि हमारी रुचि इस बात को जानने में है कि जन्म के क्रम में बच्चा लड़का या लड़की है तो प्रतिदर्श समष्टि क्या होगी?
2. यदि हमारी रुचि किसी परिवार में लड़कियों की संख्या जानने में है तो प्रतिदर्श समष्टि क्या होगी?

हल:

माना B_1, तथा B_2 क्रमशः पहला और दूसरा लड़का प्रदर्शित करते हैं तथा G_1 तथा G_2 क्रमशः पहली तथा दूसरी लड़की को प्रदर्शित करते हैं।

1. माना प्रतिदर्श समष्टि S है तब

   $S = \{B_1B_2, B_1G_2, G_1B_2, G_1G_2)$

2. कोई लड़की नहीं को 0 से, एक लड़की को 1 से तथा 2 लड़की को 2 से प्रदर्शित करते हैं।

   प्रतिदर्श समष्टि S = {0, 1, 2}.

उदाहरण 2. एक सिक्का उछाला जाता है। यदि परिणाम चित हो तो एक पासा फेंका जाता है। यदि पासे पर एक सम संख्या प्राप्त होती है तो पासे को पुनः फेंका जाता है। उस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

हल:

माना प्रतिदर्श समष्टि S है तब

S = {H21, H22, H23, H24, 125, H26, 641, H42, H43, 144, H45, 146, H61, H62, H63, H64, H65, H66}.

उदाहरण 3. कागज की चार पर्चियों पर संख्याएँ 1, 2, 3 और 4 अलग-अलग लिखी गई है। इन पर्चियों को एक डिब्बे में रखकर भली-भाँति मिलाया गया है। एक व्यक्ति डिब्बे में से दो पर्चियों एक के बाद दूसरी बिना प्रतिस्थापित किए निकालता है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

हल:

माना प्रतिदर्श समष्टि S है तब S = {(1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 10 (2, 3) (2, 4) (3, 1) (3, 2) (3, 4) (4, 10) (4, 2) (4, 3)}.

प्रायिकता की गणितीय परिभाषा (Mathematical Definition of Probability)-

यदि कुल a + b प्रयासों में कोई घटना A, a विधियों से घटित हो सकती है तथा b विधियों से घटित नहीं हो सकती और इन a + bविधियों में से प्रत्येक विधि समसंभावी है, तो घटना A के घटित होने की प्रायिकता $P(A) = \frac{a}{a+b}$ तथा घटना A के घटित न होने की प्रायिकता $P(\bar{A}) = \frac{b}{a+b}$

नोट: $P(\bar{A})$ को P(A - नहीं) या P(not - A) भी लिखते हैं।

उदाहरणार्थ: यदि एक लाटरी में 6 इनाम की टिकटें व 24 रिक्त टिकटें हैं (अर्थात् 30 टिकटों पर 6 इनाम दिया जाना है) तो एक व्यक्ति जिसके पास एक टिकट है, के इनाम प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{6}{6+24} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ तथा इनाम न प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{24}{6+24} + \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$ है।

पुनः $P(A)+P(\bar{A}) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b}$

या $P(A)+P(\bar{A}) = 1$

पुनः स्पष्ट है कि $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

या $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

संयोगानुपात और प्रायिकता (Odds and Probability)-

यदि कोई घटना A,a प्रकार से घटित होती है तथा b प्रकार से घटित नहीं होती तो A के अनुकूल संयोगानुपात = a : b तथा A के प्रतिकूल संयोगानुपात = b : a

$$\text{तथा } P(A) = \frac{a}{a+b} \text{ एवं } P(\bar{A}) = \frac{b}{a+b}.$$

नोट : चूँकि किसी घटना के अनुकूल सरल घटनाओं की संख्या,

प्रतिदर्श समष्टि S की कुल सरल घटनाओं की संख्या से अधिक नहीं हो सकती,

अतः $0 \le P(A) \le 1$

उदाहरण 1. एक घटना के घटने के अनुकूल संयोगानुपात (Odds in favour of the event) 2 : 3 है। उसके घटने और न घटने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। घटना के प्रतिकूल संयोगानुपात भी ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है:

घटना के अनुकूल संयोगानुपात a : b = 2 : 3

∴ घटना के घटने की प्रायिकता $P(A) = \frac{a}{a+b}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$

और घटना के न घटने की प्रायिकता $P = (\bar{A})\frac{b}{a+b}$

$$= \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$$

पुनः चूँकि घटना के अनुकूल संयोगानुपात

= a : b = 2 : 3

अत: घटना के प्रतिकूल संयोगानुपात = b : a = 3 : 2

उदाहरण 2. दो घटनाओं में से एक घटना अवश्य घटित होती है। दिया है कि पहली घटना की प्रायिकता दूसरी की $\frac{2}{3}$ है। दूसरी घटना के अनुकूल संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।

हल:

माना दो घटनायें A व B हैं जिनकी प्रायिकतायें क्रमश: P(A) व P(B) हैं। चूँकि दोनों घटनाओं में से एक घटना अवश्य घटित होती है, अतएव

P(A) + P(B) = 1 .....(1)

प्रश्नानुसार, $P(A) = \frac{2}{3}P(B)$

∴ समीकरण (1) से,

$$\frac{2}{3}P(B) + P(B) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{3}P(B) = 1 \Rightarrow P(B) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \quad P(B) = \frac{3}{3+2}$$

अत: दूसरी घटना के अनुकूल संयोगानुपात 3 : 2 है।

घटनाओं पर संक्रियाएँ (Operations on Events)-

1. **घटनाओं का संघ (Union of Events)-** यदि प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ A तथा B हैं तो A व B का संघ वह घटना होती है जिसमें वे बिन्दु शामिल होते हैं जो A में हो या B में हो या दोनों A और B में हों। इसे $A \cup B$ अथवा (A या B) से दर्शाते हैं।

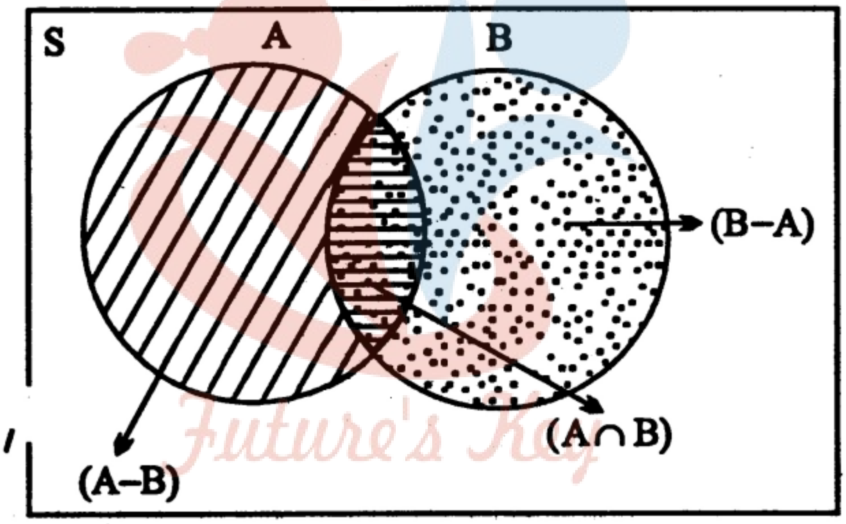
   $A \cup B = \{w : w \in A$ या $w \in B\}$.

2. **घटनाओं का सर्वनिष्ठ (Intersection of Events)-** यदि प्रतिदर्श समष्टि के संगत दो घटनाओं A व B का सर्वनिष्ठ उन प्रतिदर्श बिन्दुओं का समुच्चय होता है जो A व B दोनों में उभयनिष्ठ होते हैं।

   $A \cap B = \{w : w \in A$ और $w \in B\}$

3. **घटनाओं का अन्तर (Difference of Events)-**

   (i) A - B वह घटना होती है जिसमें A के वे अवयव होते हैं जो B के अवयव नहीं है।



   (ii) घटना B - A में B के वे अवयव होते हैं, जो A के अवयव नहीं हैं।

   वेन-चित्र (Venn-diagram) द्वारा उपर्युक्त संक्रियाओं को आसानी से समझा जा सकता है।

प्रायिकता का योग का नियम (Additive Law of Probability)

या

प्रायिकता के योग का प्रमेय (Theorem of Total Probability)

या

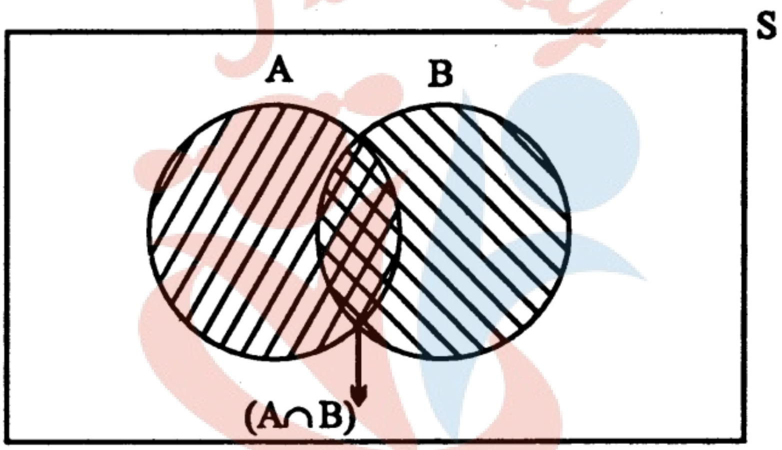
प्रायिकता PKA या B) का प्रमेय

प्रमेय- यदि प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ A तथा B हों तो P(A + B) = P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

अथवा

P(A या B) = P(A) + P(B) - P(A और B)

उपपत्ति- चूँकि प्रतिदर्श समष्टि S के दो उपसमुच्चय A तथा B हैं तथा n(A), n(B), n(A∪B), n(A∩B) क्रमशः समुच्चयों A, B, A∪B, A∩B में अवयवों की संख्या को दर्शाते हैं, अतः समुच्चय सिद्धान्त से,



(A∪B) = n(A) + n(B) - n(A∩B)

दोनों पक्षों में n(S) का भाग देने पर,

$$\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

अतः प्रायिकता की परिभाषा से, P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)

अथवा

P(A या B) = P(A) + P(B) - P(A और B) ...(1)

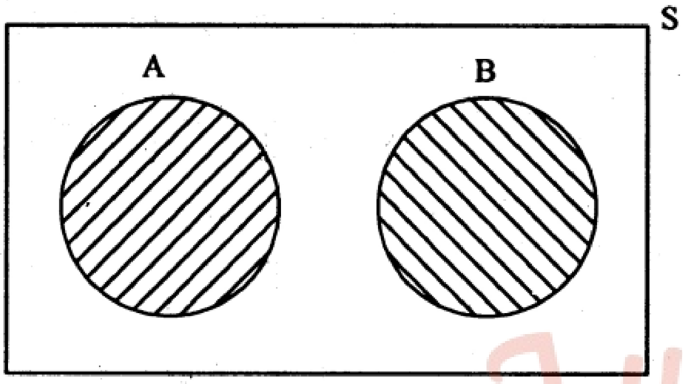
उपप्रमेय 1. यदि A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (Mutually Exclusive Events) हों, तो

P(A या B) = P(A) + P(B) या P(A∪B) = P(A) + P(B)

उपपत्ति- ∵ A व B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं,

अत: $A \cap B = \emptyset$

$\therefore P(A \cap B) = P(A$ और $B) = P(\emptyset) = 0$



$(A \cap B) = \phi$

$\therefore$ समी. (1) से मान रखने पर,

$P(A \cup B) = P(A$ या $B) = P(A) + P(B)$ ...(2)

उपप्रमेय 2. यदि प्रतिदर्श समष्टि S से सम्बन्धित n परस्पर अपवर्जी घटनाएँ $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, हों, तो $P(A_1$ या A_2 या ...... या $A_n.)$

$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n)$

या

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ..... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$

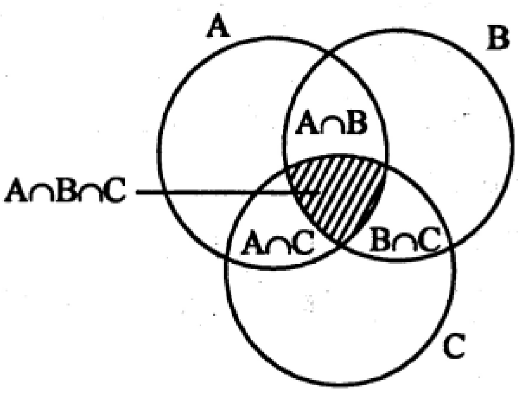
नोट: यह प्रमेय उपर्युक्त उपप्रमेय I का व्यापीकरण (Generalization) है।

1. P(A या B), घटना A या घटना B में से किसी एक के घटने की प्रायिकता है। इसे $P(A + B)$ या $P(A \cup B)$ से भी दर्शाते हैं।
2. P(A और B), घटना A और घटना B के साथ-साथ घटने की प्रायिकता है। इसे $P(A \cap B)$ या $P(AB)$ से भी दर्शाते हैं।

उपप्रमेय 3. यदि A, B और C कोई तीन घटनाएँ किसी यदृच्छया प्रयोग से संलग्न हो, तो घटना A या B या C के घटित होने की प्रायिकता है

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap)$

प्रमाण: $P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C]$



= P(A∪ B) + P(C) – P[(A∪B) ∩C]

$$= P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)$$
$$-P[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$$
$$= P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-[P(A\cap C)$$
$$+P(B\cap C)]-P[(A\cap C)\cap(B\cap C)]$$
$$= P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)$$
$$-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$
$$= P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)$$
$$-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C).$$

उदाहरण 1. किसी दौड़ में A घोड़े के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{7}$ तथा B घोड़े के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है तो दोनों घोड़ों में से किसी एक के जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल:

चूँकि A का जीतना और B का जीतना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (Mutually Exclusive Events) हैं तथा $P(A) = \frac{1}{7}$ और $P(B) = \frac{1}{4}$

$\therefore P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

$$= \frac{1}{7} + \frac{1}{4} = \frac{11}{28}$$

उदाहरण 2. एक पासे को एक बार उछाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि सम अंकया 5 से कम अंक प्राप्त हो।

हल:

एक पासे की एक उछाल में प्रतिदर्श समष्टि

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

तथा घटना A = सम अंक आना = (2, 4, 6}

तथा घटना B = 5 से कम अंक आना = {1, 2, 3, 4}

$$A \cap B = \{2,4\}$$

$$P(A) = \frac{3}{6}, P(B) = \frac{4}{6}, P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

$$\therefore\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6}$$

$$= \frac{7-2}{6}$$

$$\therefore\ P(A \cup B) = \frac{5}{6}.$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 16.1 (पृष्ठ संख्या 408-409)

प्रश्न 1 निम्नलिखित प्रश्न में निर्दिष्ट परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है।

उत्तर- एक सिक्के को 3 बार उछालने से प्रतिदर्श समष्टि।

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TIT}

प्रश्न 2 निम्नलिखित प्रश्न में निर्दिष्ट परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

एक पासा दो बार फेंका गया है।

उत्तर- एक पासे को दो बार फेंकने से जो घटनाएँ घटी उनका प्रतिदर्श समष्टि।

S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4,3), (4, 4), (4,5), (4,6),

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5,5), (5, 6),

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), 6, 5), (6, 6)}

प्रश्न 3 निम्नलिखित प्रश्न में निर्दिष्ट परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

एक सिक्का चार बार उछाला गया है।

उत्तर- एक सिक्के को 4 बार उछालने से घटनाओं का प्रतिदर्श समष्टि इस प्रकार है।

S = {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, HTTH, HTHT, HHTT, HTTT, THHH, THHT, THTH, TTHH, TTTH, TTHT, THTT, TTTT}

प्रश्न 4 निम्नलिखित प्रश्न में निर्दिष्ट परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

एक सिक्का उछाला गया है और एक पासा फेंका गया है।

उत्तर- एक सिक्का व एक पासा उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि।

S = {H, 1}, {H, 2}, {H, 3}, {H, 4}, {H, 5}, {H, 6}, {T, 1}, {T, 2}, {T, 3}, {T, 4}, {T, 5}, {T, 6}

प्रश्न 5 निम्नलिखित प्रश्न में निर्दिष्ट परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

एक सिक्का उछाला गया है और केवल उस दशा में, जब सिक्के पर चित्त प्रकट होता है एक पास फेंका जाता है।

उत्तर- सिक्के पर चित्त आने से एक पासा फेंका जाता है अन्यथा नहीं की प्रतिदर्श समष्टि।

S = {H, 1}, {H, 2}, {H, 3}, {H, 4}, {H, 2}, {H, 6}, {T}

प्रश्न 6 निम्नलिखित प्रश्न में निर्दिष्ट परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

X कमरे में 2 लड़के और 2 लड़कियाँ तथा Y कमरे में 1 लड़का और 3 लड़कियाँ हैं। उस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए जिसमें पहले एक कमरा चुना जाता है और फिर एक बच्चा चुना जाता है।

उत्तर- माना X कमरे के लड़के व लड़कियों को B_1, B_2, G_1, G_2, और Y कमरे के लड़के व लड़कियों को B_3, G_3, G_4, G_5 से दर्शाया गया है। एक कमरे को चुनना और फिर एक बच्चे को चुने जाने की प्रतिदर्श समष्टि।

$S = \{XB_1, XB_2, XG_1, XG_2, YB_3, YG_3, YG_4, YG_5\}$

प्रश्न 7 निम्नलिखित प्रश्न में निर्दिष्ट परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

एक पासा लाल रंग का, एक सफेद रंग का और एक अन्य पासा नीले रंग का एक थैले में रखे हैं। एक पासा यादृच्छया चुना गया और उसे फेंका गया है। पासे का रंग और इसके ऊपर के फलक पर प्राप्त संख्या को लिखा गया है। प्रतिदर्श समष्टि का वर्णन कीजिए।

उत्तर- माना लाल रंग को R से, सफेद रंग को W से तथा नीले रंग को B से दर्शाया गया हो तो पासे को चुन कर अंकों को प्राप्त करने की प्रतिदर्श समष्टि।

$S = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$

प्रश्न 8 एक परीक्षण में 2 बच्चों वाले परिवारों में से प्रत्येक में लड़के-लड़कियों की संख्या को लिखा जाता है।

(i) यदि हमारी रूचि इस बात को जानने में है कि जन्म के क्रम में बच्चा लड़का है या लड़की है तो प्रतिदर्श समष्टि क्या होगी?
(ii) यदि हमारी रूचि किसी परिवार में लड़कियों की संख्या जानने में है तो प्रतिदर्श समष्टि क्या होगी?

उत्तर-

(i) परिवार में दो बच्चे हैं वे लड़के, लड़की हो सकते हैं। इनकी प्रतिदर्श समष्टि ={BB, BG, GB, GG} है।
(ii) एक परिवार में कोई लड़की न हो या एक या दो लड़कियाँ होगी। अतः प्रतिदर्श समष्टि {0, 1, 2}

प्रश्न 9 एक डिब्बे में 1 लाल और एक जैसी 3 सफेद गेंद रखी गई हैं। दो गेंद उत्तरोत्तर (In succession) बिना प्रतिस्थापित किए यादृच्छया निकाली जाती है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

उत्तर- डिब्बे में एक लाल व 3 सफेद गेंद हैं। यदि लाल को R से, सफेद को W से निरूपित किया जाए तो इस प्रशिक्षण का प्रतिदर्श समष्टि।

S = {RW, WR, WW}

प्रश्न 10 एक परीक्षण में एक सिक्के को उछाला जाता है और यदि उस पर चित्त प्रकट होता है तो उसे पुनः उछाला जाता है। यदि पहली बार उछालने पर पट् प्राप्त होता है तो एक पासा फेंका जाता है। प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

उत्तर- यदि एक सिक्का उछाला जाता है और चित्त प्रकट होता है तो दुबारा उछालने पर चित्त या पट् आ सकता है। इस प्रकार घटना HH या HT होगी। पट् आने पर पासा फेंका जाता है। पासा फेंकने से संख्या 1, 2, 3, 4, 5, 6 आ सकती है।

∴ प्रतिदर्श समष्टि = {HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

प्रश्न 11 मान लीजिए कि बल्बों के एक ढेर में से 3 बल्ब यादृच्छया निकाले जाते हैं। प्रत्येक बल्ब को जाँचा जाता है और उसे खराब (D) या ठीक (N) में वर्गीकृत करते हैं। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

उत्तर- खराब के लिए D और ठीक बल्ब को N द्वारा निरूपित करते हैं। तीन बल्बों से बना प्रतिदर्श समष्टि इस प्रकार है।

{DDD, DDN, DND, NDD, NND, NDN, DNN, NNN}

प्रश्न 12 एक सिक्का उछाला जाता है। यदि परिणाम चित्त हो तो एक पासा फेंका जाता है। यदि पासे पर एक सम संख्या प्रकट होती है, तो पासे को पुनः फेंका जाता है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

उत्तर- एक सिक्का उछालने पर यदि चित्त को H से और पट को T से दर्शाया जाए और चित्त आने पर पासा फेंका जाता है H1, H2, H3, H4, H5, H6 की घटनाएं हो सकती हैं। H2, H4, H6 आने की अवस्था में पासा दुबारा फेंका जाता है जिससे प्रत्येक की 1, 2, 3, 4, 5, 6 की छः घटनाएं हो सकती हैं।

इस प्रकार प्रतिदर्श समष्टि है।

{T, 1}, H, 2}, {H, 3}, {H, 5}, {H, 21}, {H, 22}, {H, 23}, {H, 24}, {H, 25}, {H, 26}, {H, 41}, {H, 42}, {H, 43}, {H, 44}, {H, 45}, {H, 46}, {H, 61}, {H, 62}, {H, 63}, {H, 64}, {H, 65}, {H, 66}

प्रश्न 13 कागज की चार पर्चियों पर संख्याएँ 1, 2, 3, 4 अलग-अलग लिखी गई हैं। इन पर्चियों को एक डिब्बे में रख कर भली-भाँति मिलाया गया है। एक व्यक्ति डिब्बे में से दो पर्चियाँ एक के बाद दूसरी बिना प्रतिस्थापित किए निकालता है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

उत्तर- एक डिब्बे में चार पर्चियाँ हैं। जिन पर 1, 2, 3, 4 लिखा है। यदि पर्ची सं. 1 पहली पर्ची हो दूसरी पर्ची पर सं. 2, 3, 4 लिखा होगा। इसी प्रकार पहली पर्ची पर 2 लिखा हो तो शेष पर्ची पर 1, 3, 4 लिखा होगा।

इस प्रकार प्रतिदर्श समष्टि है।

{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4,3)}

प्रश्न 14 एक परीक्षण में एक पासा फेंका जाता है और यदि पासे पर प्राप्त संख्या सम है तो एक सिक्का एक बार उछाला जाता है। यदि पासे पर प्राप्त संख्या विषम है तो सिक्के को दो बार उछालते हैं। प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

उत्तर- पासा फेंकने से यदि सम संख्या प्राप्त होती है तो सिक्का उछालने पर H या T की घटना होगी। यदि पासे पर विषम संख्या आती है तो सिक्का दो बार उछाला जाता है जिससे HH, HT, TH, TT घटनाएँ हो सकती हैं।

इस प्रकार प्रतिदर्श समष्टि इस प्रकार है।

{2H, 2T, 4H, 4T, 6H, 6T, 1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 5HH, SHT, 5TH, 5TT}

प्रश्न 15 एक सिक्का उछाला गया यदि उस पर पद प्रकट होता है तो एक डिब्बे में से जिसमें 2 लाल और 3 काली गेंदे रखी हैं, एक गेंद निकालते हैं। यदि सिक्के पर चित्त प्रकट होता है तो एक पासा फेंका जाता है। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

उत्तर- यदि लाल रंग की गेंद को R_1, R_2, से तथा काले रंग की गेंद को B_1, B_2, B_3 से दर्शाया जाए तो सिक्का उछालने पर यदि पट् आता है तो R_1, R_2, B_1, B_2, B_3, में से एक घटना होगी। यदि सिक्के पर चित्त आता है तो पासा फेंकने से 1, 2, 3, 4, 5, 6 आते हैं।

तो प्रतिदर्श समष्टि इस प्रकार है।

$\{TR_1, TR_2, TB_1, TB_2, TB3, H1, H2, H3, H4, H5, H6\}$

प्रश्न 16 एक पासे को बार-बार तब तक फेंका जाता है जब तक उस पर 6 प्रकट न हो जाए। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि क्या है?

उत्तर- 6 आने पर पासा दुबारा नहीं फेंका जाएगा। यदि 1, 2, 3, 4, 5 में से कोई संख्या प्रकट होती है तो पासा दुबारा नहीं फेंका जाता।

इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है।

{6, (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (1, 1, 6), (1, 2, 6),... (1, 5, 6), (2, 1, 6), (2, 2, 6), ..., (2, 5, 6),... (3, 1, 6), (3, 2, 6), ..., (3, 5, 6), (4, 1, 6), (4, 2, 6), ... (4, 5, 6), (5, 1, 6), (5, 2, 6),..., (5, 5, 6)....}

प्रश्नावली 16.2 (पृष्ठ संख्या 415-416)

प्रश्न 1 एक पासा फेंका जाता है। मान लीजिए घटना E 'पासे पर संख्या 4' दर्शाता है और घटना F 'पासे पर सम संख्या' दर्शाता है। क्या E और F परस्पर अपवर्जी हैं?

उत्तर- पासा फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि

= {1, 2, 3, 4, 5, 6}

E (संख्या 4 दर्शाता है) = {4}

F (सम संख्या) = {2, 4, 6}

$E \cap F = 4, 2, 4, 6 = 4 \neq \phi$

अत: E और F परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

प्रश्न 2 एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटना का वर्णन कीजिए।

(i) A : संख्या 7 से कम है।

(ii) B : संख्या 7 से बड़ी है।

(iii) C : संख्या 3 का गुणज है।

(iv) D : संख्या 4 से कम है।

(v) E : 4 से बड़ी सम संख्या है।

(vi) F : संख्या 3 से कम नहीं है।

$A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $F \cup F$, $D \cap E$,

$A - C$, $D - E$, F', $E \cap F'$ भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A : संख्या 7 से कम है $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ii) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

B : संख्या 7 से बड़ी है = पासे में कोई संख्या 7 से बड़ी नहीं है। $= \phi$

(iii) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

C : संख्या 3 का गुणज है $= \{3, 6\}$

(iv) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

D : संख्या 4 से कम है $= \{1, 2, 3\}$

(v) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E : 4 से बड़ी सम संख्या है = {6}

(vi) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

F = संख्या 3 से कम नहीं है = {3, 4, 5, 6}

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} - {3, 4, 5, 6} = {1, 2}

E ∩ F' $= 6 \cap 3, 4, 5, 6 = 6 \cap 1, 2 = \emptyset$

प्रश्न 3 एक परीक्षण में पासे के एक जोड़े को फेंकते हैं और उन पर प्रकट संख्याओं को लिखते हैं। निम्नलिखित संख्याओं का वर्णन कीजिए।

A : प्राप्त संख्याओं का योग 8 से अधिक है।

B : दोनों पासों पर संख्या 2 प्रकट होती है।

C : प्रकट संख्याओं का योग कम से कम 7 है और 3 का गुणज है।

इन घटनाओं के कौन-कौन से युग्म परस्पर अपवर्जी हैं?

उत्तर- जब दो पासे फेंके जाते हैं, तो कुल संभावित परिणामों की संख्या = 6 × 6 = 36

A= प्राप्त संख्याओं का योग 8 से अधिक है।

= {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)}

B = कम से कम एक पासे पर संख्या 2 प्रकट होती है

= {(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)}

C = प्रकट संख्याओं का योग कम से कम 7 है और 3 का गुणज है।

प्रकट संख्याओं का योग 9 और 12 है जो कि 3 का गुणज है।

= {(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)}

$A \cap C$ = {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)} $\cap$ {(3, 6), (6, 3), (5, 4), (6, 6)}

= {(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)}

$A \cap B$ = {(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6) $\cap$ {(1, 2), (3, 2), (2, 1), (2, 3), (4, 2), (2, 4), (5, 2), (2, 5), (2, 6), (6, 2)} = ϕ

$B \cap C$ = {(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 2), (2, 6), (6, 2)} $\cap$ {(3, 6), (6, 3), (4,5), (5, 4), (6, 6)} = ϕ

$A \cap B = \phi$, $B \cap C = \phi$ अर्थात् A और B, B और C परस्पर अपवर्जी हैं।

परन्तु $A \cap C \neq \phi$ अत: A और C परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

प्रश्न 4 तीन सिक्कों को एक बार उछाला जाता है। मान लीजिए कि घटना "तीन चिल दिखना" को A से, घटना 2 चित्त और 1 पट दिखना' को B से, घटना "3 पट लिखना" को C से और घटना 'पहले सिक्के पर चित्त दिखना' को D से निरूपित किया गया है। बताइए कि इनमें से कौन-सी घटनाएँ।

(i) परस्पर अपवर्जी हैं?
(ii) सरल हैं।
(iii) मिश्र हैं?

उत्तर- जब तीन सिक्के उछाले जाते हैं तो प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TIT}

A : तीन चित्त दिखना = {HHH}

B : दो चित्त और एक पट दिखना = {HHT, HTH, THH}

C : तीन पट दिखना = {TTT}

D : पहले सिक्के पर चित्त दिखना = {HHH, HHT, HTH, HTT}

(i) $A \cap B$ = {HHH} ∩ {HHT, HTH, THH} = ϕ

$A \cap C$ = {HHH} ∩ {TIT} = ϕ

$A \cap D$ = {HHH} {HHH, HHT, HTH, HTT} = {HHH} =ϕ=ϕ

$B \cap C$ = {HHT, HTH, THH} ∩ {TTT} = ϕ = $B \cap D$= {HHT, HTH, THH) ∩ {HHH, HHT, HTH, HTT} = (HHT, HTH} = ϕ

$C \cap D$ = {TTT} {HHH, HHT, HTH, HTT} = ϕ

$A \cap B \cap C$ = {HHH} ∩ {HHT, HTH, THH} ∩ {TTT) = ϕ

अतः परस्पर अपवर्जी घटनाएँ।

A और B, A और C, B और C, C और D, A, B और C

(ii) सरल घटनाएँ: A और C

(iii) मिश्र घटनाएँ: B और D

प्रश्न 5 तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं। वर्णन कीजिए।

(i) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं।
(ii) तीन घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी और निःशेष हैं।
(iii) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।
(iv) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं किन्तु निःशेष नहीं हैं।
(v) तीन घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं किन्तु निःशेष नहीं हैं।

उत्तर-

(i) दो घटनाएँ जो परस्पर अपवर्जी हैं।

A = कम से कम दो चित्त प्राप्त करना = {HHH, HHT, HTH, THH}

B = कम से कम दो पेर्ट प्राप्त करना = {TTT, TTH, THT, HTT}

(ii) तीन घटनाएँ A, B, C जो परस्पर अपवर्जी और निःशेष हैं।

A = अधिक से अधिक एक चित्त प्राप्त करना = {TIT, TTH, THT, HTT}

B = तथ्यत, 2 चित्त प्राप्त करना = {HHT, HTH, THH}

C = तथ्यतः, 3 चित्त प्राप्त करना = {HHH}

(iii) दो घटनाएँ A और B जो परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

A : अधिकतम 2 पट प्राप्त करना = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT}

B : तथ्यतः 2 चित्त प्राप्त करना = {HHT, HTH, THH}

A ∩ B = {HHT, HTH, THH} ≠ ϕ

(iv) दो घटनाएँ A और B जो परस्पर अपवर्जी हैं किन्तु निःशेष नहीं हैं।

A : तथ्यतः एक चित्त प्राप्त करना

= {TTH, THT, HTT}

B : तथ्यतः 2 चित्त प्राप्त करना {HHT, HTH, THH)

(v) तीन घटनाएँ A, B, C जो परस्पर उपवर्जी हैं किन्तु निःशेष नहीं हैं।

A : तथ्यतः एक पट प्राप्त करना = {HHT, THT, THH}

B : तथ्यतः 2 पट प्राप्त करना = {TTH, THT, HTT}

C : तथ्यतः 3 पट प्राप्त करना = {TTT}

[**नोट**- घटनाएँ भिन्न-भिन्न भी हो सकती हैं।

प्रश्न 6 दो पासे फेंके जाते हैं। घटनाएँ A, B और C निम्नलिखित प्रकार से हैं।

A : पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होना।

B : पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना।

C : पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग $\leq$ 5 होना।

निम्नलिखित घटना का वर्णन कीजिए।

(i) 'A'
(ii) B – नही
(iii) A या B
(iv) A और B
(v) A किन्तु C नही
(vi) B या C
(vii) B और C
(viii) $A \cap B' \cap C'$

उत्तर-

(i) दो सिक्के फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि

S = {(1, 1), (1, 2), ...(1, 6), (2, 1), (2, 2), ... (2, 6), (3, 1), (3, 2), ... (3, 6), (4, 1), (4, 2), ... (4, 6), (5, 1), (5, 2), ... (5, 6), (6, 1), ... (6, 6)}

A= पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होगा।

= {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4,5), (4, 6),

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} = A

B = पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना।

= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)}

C = पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤5 होना।

= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}

A' = S - A = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)} = B

(ii) दो सिक्के फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि

S = {(1, 1), (1, 2), ...(1, 6), (2, 1), (2, 2), ... (2, 6), (3, 1), (3, 2), ... (3, 6), (4, 1), (4, 2), ... (4, 6), (5, 1), (5, 2), ... (5, 6), (6, 1), ... (6, 6)}

A = पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होगा। = {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4,5), (4, 6),

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} = A

B = पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)}

C = पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤5 होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}

B - नहीं = B = पहले पासे पर विषम संख्या का न होना = {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} = A

(iii) दो सिक्के फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि

S = {(1, 1), (1, 2), ...(1, 6), (2, 1), (2, 2), ... (2, 6), (3, 1), (3, 2), ... (3, 6), (4, 1), (4, 2), ... (4, 6), (5, 1), (5, 2),... (5, 6), (6, 1), ... (6, 6)}

A= पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होगा। = {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4,5), (4, 6),

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} = A

B = पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)}

C = पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤5 होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}

या B = A ∪ B = {x : x पहले पासे पर सम संख्या का होना} ∪ {पहले पासे पर विषम संख्या का होना} = S

(iv) दो सिक्के फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि

S = {(1, 1), (1, 2), ...(1, 6), (2, 1), (2, 2), ... (2, 6), (3, 1), (3, 2), ... (3, 6), (4, 1), (4, 2), ... (4, 6), (5, 1), (5, 2),... (5, 6), (6, 1), ... (6, 6)}

A= पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होगा। = {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4,5), (4, 6),

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} = A

B = पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)}

C = पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤5 होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}

A और B = A ∩ B

= {x : x पहले पासे पर सम संख्या का होना} ∩ {पहले पासे पर विषम संख्या का होना} = ϕ

(v) दो सिक्के फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि

S = {(1, 1), (1, 2), ...(1, 6), (2, 1), (2, 2), ... (2, 6), (3, 1), (3, 2), ... (3, 6), (4, 1), (4, 2), ... (4, 6), (5, 1), (5, 2), ... (5, 6), (6, 1), ... (6, 6)}

A = पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होगा। = {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4,5), (4, 6),

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} = A

B = पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)}

C = पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤5 होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}

A किन्तु C - नहीं = {x : x पहले पासे पर सम संख्या का होना} – {पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤5}

A - C = {(2, 1), (2, 2), ..., (2, 6),

(4, 1), (4, 2), ... (4, 2), ... (4, 6),

(6, 1), (6, 2), ... (6,6)} – {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1,4),

(2, 1), (2, 2), (2, 3),

(3, 1), (3, 2), (4, 1)}

= {(2, 4), (2, 5), (2, 6),

(4, 2), (4, 3),...(4, 6),

(6, 1), (6, 2), ... (6, 6)}

(vi) दो सिक्के फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि

S = {(1, 1), (1, 2), ... (1, 6), (2, 1), (2, 2), ... (2, 6), (3, 1), (3, 2), ... (3, 6), (4, 1), (4, 2), ... (4, 6), (5, 1), (5, 2), ... (5, 6), (6, 1), ... (6, 6)}

A = पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होगा। = {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4,5), (4, 6),

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} = A

B = पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)}

C = पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤5 होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}

B या C = B ∪ C = {x : x, पहले पासे पर विषम संख्या होगा} ∪ {पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤5} = {(1, 1), (1, 2), ... (1, 6), (3, 1), (3, 2), ... (3, 6), (5, 1), (5, 2), ... (5, 6)} ∪ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

= {(1, 1), (1, 2), ... (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), ... (3, 6), (4, 1), (5, 1), (5, 2), (5, 3), ... (5, 6).

(vii) दो सिक्के फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि

S = {(1, 1), (1, 2), ...(1, 6), (2, 1), (2, 2), ... (2, 6), (3, 1), (3, 2), ... (3, 6), (4, 1), (4, 2), ... (4, 6), (5, 1), (5, 2), ... (5, 6), (6, 1), ... (6, 6)}

A = पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होगा। = {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4,5), (4, 6),

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} = A

B = पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)}

C = पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤5 होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}

B और C अर्थात् B ∩ C = {(1, 1), ... (1, 6), (3, 1), (3, 2), ... (3, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), ... (5, 6) ∩ {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2) (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}

= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 2)}

(viii) दो सिक्के फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि

S = {(1, 1), (1, 2), ...(1, 6), (2, 1), (2, 2), ... (2, 6), (3, 1), (3, 2), ... (3, 6), (4, 1), (4, 2), ... (4, 6), (5, 1), (5, 2), ... (5, 6), (6, 1), ... (6, 6)}

A = पहले पासे पर सम संख्या प्राप्त होगा। = {(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4,5), (4, 6),

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} = A

B = पहले पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)}

C = पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≤5 होना। = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}

यहाँ B’ = A

∴ A ∩ B’ = A ∩ A = A

∴ A ∩ B’ ∩ C = {(2, 1), (2, 2), ... (2, 6),(4, 1), (4, 2), ...(4, 6), (6, 1), (6, 2), ... (6, 6)} ∩ {(1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 2), (4, 3), ...(4, 6), (5, 1), (5, 2), ... (5, 6), (6, 1), (6, 2), ... (6, 5)}

= {(2, 4), (2, 5), (2, 6),

(4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

प्रश्न 7 निम्नलिखित में सत्य या असत्य बताइए अपने उत्तर का कारण दीजिए।

(i) A और B परस्पर अपवर्जी हैं।

(ii) A और B परस्पर अपवर्जी और निःशेष हैं।

(iii) $A = B'$

(iv) A और C परस्पर अपवर्जी हैं।

(v) A और B' परस्पर अपवर्जी हैं।

(vi) A, B, C परस्पर अपवर्जी और निःशेष घटनाएँ हैं।

उत्तर-

(i) सत्य

कारण-

A : पहले पासे पर सम संख्या का होना

B : पहले पासे पर विषम संख्या का होना

A और B में कोई भी घटना समान नहीं है।

$A \cap B = \phi \Rightarrow$ A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

(ii) सत्य

कारण-

A = पहले पासे पर सम संख्या होना

B : पहले पासे पर विषम संख्या होना

$A \cup B$ = पहले पासे पर सम या विषम कोई भी संख्या हो सकती है, दूसरे पासे पर 1 से 6 तक कोई भी संख्या हो सकती है।

अर्थात् A और B परस्पर अपवर्जी और निःशेष घटनाएँ हैं।

(iii) सत्य

कारण-

B' = {पहले पासे पर विषम संख्या होना।

= पहले पासे पर विषम संख्या न होना

= पहले पासे पर सम संख्या होना

= A

(iv) असत्य

कारण-

A = पहले पासे पर सम संख्या होना

C = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1}}

A और C में (2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 1) समान घटनाएँ हैं।

$\therefore A \cap C \neq \phi$

अत: A और C परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

(v) असत्य

कारण-

B'= A

$\therefore A \cap B' = A \cap A = A \neq \phi$

A तथा B’ परस्पर अपवर्जी नहीं हैं।

(vi) असत्य

कारण-

A’ = B, B’ = A

∴ A’ ∩ B’ = B ∩ A = ∅

परन्तु A’ ∩ C = B ∩ C = {x : x पहले पासे पर विषम संख्या होना} {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}

= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 1), (3, 2)} = ϕ

B’ ∩ C = A ∩ C[∵ B’ = A]

= {x : x, पहले पासे पर सम संख्या का होना} ∩ {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 1), A और C दोनों में समान घटनाएँ हैं।

B’ ∩ C ≠ ∅

अर्थात् A, B, और C परस्पर अपवर्जी नहीं हैं और न ही नि:शेष हैं।

प्रश्नावली 16.3 (पृष्ठ संख्या 426-429)

प्रश्न 1 प्रतिदर्श समष्टि $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ के परिणामों के लिए निम्नलिखित में से कौन से प्रायिकता निर्धारण वैध नहीं हैं।

परिणाम	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
(i)	0.1	0.01	0.05	0.03	0.01	0.2	$0-6$
(ii)	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
(iii)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
(iv)	-0.1	0.2	0.3	0.4	-0.2	0.1	0.3
(v)	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{15}{14}$

उत्तर-

(i) 0.1 + 0.01 + 0.05 + 0.03 + 0.01 + 0.2 + 0.6 = 1.00

घटनाओं की दी गयी प्रायिकता को योगफल 1 है।

अतः निर्धारित प्रायिकता वैध है।

(ii) दी गयी प्रायिकताओं का योगफल

$$= \frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{7}{7}=1$$

दी गयी प्रायिकता वैध है।

(iii) दी हुई प्रायिकताओं का योग' = 0.1 + 0.1 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 + 0.7 = 2.7

यह एक से अधिक है।

अतः दी गयी प्रायिकता वैध नहीं है।

(iv) किसी भी घटना की प्रायिकता ऋणात्मक नहीं हो सकती। यहाँ पर दो प्रायिकताएँ - 0.1 और - 0.2 ऋणात्मक हैं।

अतः दी गयी प्रायिकता वैध नहीं है।

(v) दी गयी प्रायिकताओं का योगफल

$$= \frac{1}{14} + \frac{2}{14} + \frac{3}{14} + \frac{5}{14} + \frac{6}{14} + \frac{15}{14} = \frac{36}{14} = \frac{18}{7}$$

जो कि एक से अधिक है।

अतः दी गयी प्रायिकता वैध नहीं है।

प्रश्न 2 एक सिक्का दो बार उछाला जाता है। कम से कम एक पट् प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है?

उत्तर- दिए हुए परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S = {HH, HT, TH, TT}

कुल सम्भावित परिणामों की संख्या = 4

कम से कम एक पट् प्राप्त करने के तरीके TH, HT, TT = 3

एक सिक्के को दो बार उछालने से कम से कम 1 पट् प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{3}{4}$

प्रश्न 3 एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) एक अभाज्य संख्या प्रकट होना।
(ii) 3 या 3 से बड़ी संख्या प्रकट होना।
(iii) 1 या 1 से छोटी संख्या प्रकट होना।
(iv) छः से बड़ी संख्या प्रकट होना
(v) छः से छोटी संख्या प्रकट होना।

उत्तर-

(i) एक पासे को फेंकने में परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

अर्थात् कुल सम्भावित परिणाम

$n(S) = 6$

अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5 हैं।

$n(A) = 3$

अतः एक अभाज्य संख्या प्रकट होने की प्रायिकता

$$= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) एक पासे को फेंकने में परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

अर्थात् कुल सम्भावित परिणाम

$n(S) = 6$

अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5 हैं।

माना घटना 3 या 3 से बड़ी संख्या को B से दर्शाया गया है, 3 या 3 से बड़ी संख्याएँ 3, 4, 5, 6 हैं।

$n(B) = 4$

अतः प्रायिकता, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(iii) एक पासे को फेंकने में परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

अर्थात् कुल सम्भावित परिणाम

$n(S) = 6$

अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5 हैं।

माना घटना 1 या 1 से छोटी संख्या को C से दर्शाया गया है।

1 या 1 से छोटी संख्याएँ = 1

$\therefore n(C) = 1$

अतः प्रायिकता, $P(C) = \frac{1}{6}$

(iv) एक पासे को फेंकने में परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

अर्थात् कुल सम्भावित परिणाम

$n(S) = 6$

अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5 हैं।

एक पासे पर 6 से बड़ी कोई संख्या नहीं होती है, अर्थात् इसकी प्रायिकता

$= \frac{0}{6} = 0$

(v) एक पासे को फेंकने में परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

अर्थात् कुल सम्भावित परिणाम

$n(S) = 6$

अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5 हैं।

6 से छोटी संख्याएँ : 1, 2, 3, 4, 5 हैं। यदि इसे E से दर्शाया गया हो, तब

$n(E) = 5$

अतः प्रायिकता, $P(E) = \frac{5}{6}$

प्रश्न 4 ताश की एक गड्डी के 52 पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छया निकाला गया है।

(i) प्रतिदर्श समष्टि में कितने बिन्दु हैं?

(ii) पत्ते का हुकुम का इक्का होने की प्रायिकता क्या है?

(iii) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पत्ता।

- इक्का है।
- काले रंग का है।

उत्तर-

(i) ताश की गड्डी में कुल 52 पत्ते होते हैं। जब एक पत्ता निकाला जाता है तो इसके प्रतिदर्श समष्टि में 52 बिन्दु होते हैं।

(ii) ताश को गड्डी में हुकुम का एक इक्का होता है। यदि एक पत्ता निकालने की घटना को A से दर्शाया जाए तो

$n(A) = 1, n(S) = 52$

$P(A) = P(\text{हुकुम का इक्का}) = \frac{1}{52}$

(iii)

- यदि B इक्का निकालने को दर्शाता हो तो

  $n(B) = 4n$ [$\because$ ताश की गड्डी में 4 इक्के होते हैं।]

  $n(S) = 52$

  $\therefore P(B) = \frac{1}{13}$

- C काले रंग हुकुम की पत्ते आने की घटना को दर्शाता है।

n(C) = 26 [∵ ताश की गड्डी में 26 काले पत्ते होते हैं।]

n(C) = 52

$\therefore P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

प्रश्न 5 एक अनभिनत (unbiased) सिक्का जिसके एक तल पर 1 और दूसरे तल पर 6 अंकित है तथा एक अनभिनत पासा दोनों को उछाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्रकट संख्याओं का योग (i) 3 है (ii) 12 है।

उत्तर- एक पासे पर 1 व 6 अंकित है और दूसरे पर 1, 2, 3, 4, 5, 6

प्रतिदर्श समष्टि = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

(i) दी गयी संख्याओं का योग 3 घटना (1, 2) से प्राप्त होता है।

अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

यिकता जब प्राप्त संख्याओं का योग 3 है $= \frac{1}{12}$

(ii) दी गयी संख्याओं का योग घटना (6, 6) से प्राप्त होता है।

यहाँ अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

प्रायिकता जब प्राप्त संख्याओं का योग 12 है $= \frac{1}{12}$

प्रश्न 6 नगर परिषद् में चार पुरुष व छः स्त्रियाँ हैं। यदि एक समिति के लिए यादृच्छया एक परिषद् सदस्य चुना गया है तो एक स्त्री के चुने जाने की कितनी सम्भावना है?

उत्तर-नगर परिषद् में चार पुरुष व छः स्त्रियाँ हैं।

उनमें से किसी एक को चुनने के तरीके = $10C_1$

कुल सम्भावित परिणामों की संख्या = 10

कुल 6 स्त्रियाँ हैं। उनमें से एक स्त्री को चुनने के तरीके = 6

अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

एक स्त्री को चुने जाने की प्रायिकता $= \frac{6}{10} = \frac{6}{5}$

प्रश्न 7 नगर परिषद् में चार पुरुष व छः स्त्रियाँ हैं। यदि एक समिति के लिए यादृच्छया एक परिषद् सदस्य चुना गया है तो एक स्त्री के चुने जाने की कितनी सम्भावना है?

उत्तर- सिक्के की उछाल में पाँच तरीकों से चित्त प्राप्त कर सकते हैं। जो निम्न प्रकार हैं।

कुल संभावित परिणाम = {HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT}

(i) कोई भी चित्त प्राप्त नहीं होता या चारों पट प्राप्त होते हैं।

चारों पट् के आने पर हानि = 4 × 1.50 = 6 रुपए

चार पट प्राप्त करने के तरीके (TTTT) = 1

कुल सम्भावित परिणाम = 16

चार पट प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{1}{16}$

(ii) जब एक चित्त और 3 पट प्राप्त होते हैं।

हानि = 3 × 1.50 - 1 × 1 = 4.50 - 1.00 = 3.50 रुपए

एक चित्त और 3 पट इस प्रकार आ सकते हैं

{TTTH, TTHT, THTT, HTTT}

4 तरीकों से एक चित्त और 3 पट प्राप्त हो सकते हैं।

कुल सम्भावित परिणाम = 16

एक चित्त प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

(iii) जब 2 चित्त और 2 पट् प्रकट होते हैं

हानि = 2 × 1.5 - 1 × 2 = 3 - 2 = 1 रुपए

2 चित्त और 2 पट् इस प्रकार प्राप्त हो सकते हैं।

{HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH}

छः तरीकों से 2 चित्त और 2 पट प्राप्त हो सकते हैं।

कुल सम्भावित परिणाम = 16

2 चित्त प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

(iv) जब 3 चित्त और 1 पट् प्रकट होता है, तब

लाभ = 3 × 1 - 1 × 1.5

= 3 – 1.50 = 1.50 रुपए

3 चित्त प्राप्त करने के तरीके = {HHHT, HHHH, HTHH, THHH}

चार तरीकों से 3 चित्त और 1 पट प्राप्त होता है।

कुल सम्भावित परिणाम = 16

3 चित्त प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

(v) चारों चित्त एक तरीके से प्राप्त कर सकते हैं, तब

लाभ = 4 × 1 = 4 रुपए

कुल सम्भावित परिणाम = 16

चार चित्त प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

प्रश्न 8 तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं। निम्नलिखित की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) तीन चित्त प्रकट होना।
(ii) 2 चित्त प्रकट होना।
(iii) न्यूनतम 2 चित्त प्रकट होना।
(iv) अधिकतम 2 चित्त प्रकट होना।
(v) एक भी चित्त प्रकट न होना।
(vi) 3 पट प्रकट होना।
(vii) तथ्यतः 2 पट् प्रकट होना।
(viii) कोई भी पट प्रकट न होना।
(ix) अधिकतम 2 पट् प्रकट होना।

उत्तर-

(i) यदि 3 सिक्के उछाले जाते हैं तो परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}

कुल सम्भावित परिणाम = 8

तीन चित्त {HHH} एक तरीके से प्रकट होता है।

अतः 3 चित्त प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{1}{8}$

(ii) यदि 3 सिक्के उछाले जाते हैं तो परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}

कुल सम्भावित परिणाम = 8

2 चित्त या 2 चित्त 1 पट प्राप्त करने के HHT, HTH, THH तीन तरीके हैं।

कुल सम्भावित परिणाम = 8

2 चित्त प्रकट होने की प्रायिकता $= \frac{3}{8}$

(iii) यदि 3 सिक्के उछाले जाते हैं तो परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}

कुल सम्भावित परिणाम = 8

न्यूनतम 2 चित्त प्राप्त करने के लिए 2 चित्त 1 पट् या 3 चित्त आएंगे

न्यूनतम 2 चित्त HHT, HTH, THH, HHH, चार तरीकों से प्रकट हो सकते हैं।

अतः न्यूनतम 2 चित्त प्रकट होने की प्रायिकता $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(iv) यदि 3 सिक्के उछाले जाते हैं तो परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}

कुल सम्भावित परिणाम = 8

अधिकतम 2 चित्त, इस प्रकार प्रकट होंगे।

- कोई चित्त नहीं या तीन पट्
- एक चित्त 2 पट्
- 2 चित्त 1 पट्

यह {TIT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH} सात तरीकों से प्रकट हो सकते हैं।

कुल संभावित परिणाम = 8

अधिकतम 2 चित्त प्रकट होने की प्रायिकता $= \frac{7}{8}$

(v) यदि 3 सिक्के उछाले जाते हैं तो परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}

कुल सम्भावित परिणाम = 8

एक भी चित्त न आने का अर्थ है तीन पट प्रकट होना जो (TTT) एक तरीके से हो सकता है।

कुल संभावित परिणाम = 8

अतः एक भी चित्त न आने की प्रायिकता $= \frac{1}{8}$

(vi) यदि 3 सिक्के उछाले जाते हैं तो परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}

कुल सम्भावित परिणाम = 8

तीन पट (TIT) एक तरीके से प्रकट हो सकते हैं।

तीन पट् प्रकट होने की प्रायिकता $= \frac{1}{8}$

(vii) यदि 3 सिक्के उछाले जाते हैं तो परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}

कुल सम्भावित परिणाम = 8

तथ्यतः 2 पट् (TTH, THT, HTT) तीन तरीकों से प्राप्त हो सकते हैं।

कुल संभावित परिणाम = 8

दो पट् प्रकट होने की प्रायिकता $= \frac{1}{8}$

(viii) यदि 3 सिक्के उछाले जाते हैं तो परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}

कुल सम्भावित परिणाम = 8

कोई पट् नहीं का अर्थ है तीनों चित्त प्रकट होते हैं तो (HHH) 1 तरीके से ही हो सकता है।

कुल संभावित परिणाम = 8

कोई पट् प्रकट न होने की प्रायिकता $= \frac{1}{8}$

(ix) यदि 3 सिक्के उछाले जाते हैं तो परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}

कुल सम्भावित परिणाम = 8

अधिकतम दो पट् प्रकट होना

$\Rightarrow$ तीनों पट् प्रकट नहीं होते।

तीनों पट् प्रकट होने की प्रायिकता $= \frac{1}{8}$

अधिकतम दो पट् प्रकट होने की प्रायिकता = 1 - (तीनों पट् प्रकट होने की प्रायिकता)

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

प्रश्न 9 यदि किसी घटना A की प्रायिकता $\frac{2}{11}$ है तो घटना 'A - नहीं' की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$P(A) = \frac{2}{11}$$

P(A - नहीं) = P (A′) = 1 - P(A)

$$= 1 - \frac{2}{11} = \frac{9}{11}$$

प्रश्न 10 शब्द 'ASSASSINATION' से एक अक्षर यादृच्छया चुना जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुना गया अक्षर

(i) एक स्वर (vowel) है।

(ii) एक व्यंजन (consonant) है।

उत्तर- शब्द ASSASSINATION में कुल 13 अक्षर हैं जिसमें (AAAIIO) 6 स्वर और (SSSSNNT) 7 व्यंजन है।

n(S) = 13

(i) स्वरों की संख्या = 6

एक स्वर चुनने की प्रायिकता $= \frac{6}{13}$

(ii) व्यंजनों की संख्या = 7

n(S) = 13

एक व्यंजन चुनने की प्रायिकता $= \frac{7}{13}$

प्रश्न 11 एक लाटरी में एक व्यक्ति 1 से 20 तक की संख्याओं में से छः भिन्न-भिन्न संख्याएँ यादृच्छया चुनता है और यदि ये चुनी गई छः संख्याएँ उन छः संख्याओं से मेल खाती हैं जिन्हें लाटरी समिति ने पूर्व निर्धारित कर रखा है, तो वह व्यक्ति इनाम जीत जाता है। लाटरी के खेल में इनाम जीतने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर- 1 से 20 तक की प्राकृत संख्याओं में से 6 संख्या चुनने के तरीके

$= 20C_6 = \dfrac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$

= 38760

केवल एक ही अनुकूल परिणाम है।

अतः लाटरी जीतने की प्रायिकता $= \frac{1}{38760}$

प्रश्न 12 जाँच कीजिए कि निम्न प्रायिकताएँ P(A) और P(B) युक्ति संगत (consistently) परिभाषित की गई हैं।

i. $P(A) = 0.5, P(B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.6$

ii. $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$

उत्तर-

i. दिया है- $P(A) = 0.5, P(B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.6$

यहाँ $P(A \cap B) = 0.6 > P(A)$

अत: P(A) और (B) युक्ति संगत नहीं है।

ii. यहाँ पर $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$

अब $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$= 0.5 + 0.4 - 0.8$

$P(A \cap B) = 0.1$

अतः P(A) और P(B) युक्ति संगत है।

प्रश्न 13 निम्नलिखित सारणी में खाली स्थान भरिए।

क्रमांक	P(A)	P(B)	$P(A \cap B)$	$P(A \cup B)$
(i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\ldots$
(ii)	0.35	$\ldots$	0.25	0.6
(iii)	0.5	0.35	$\ldots$	0.7

उत्तर-

i. $P(A) = \frac{1}{13}, P(B) = \frac{1}{15}, P(A \cap B) = \frac{1}{15}, P(A \cup B) = ?$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15}$$

$$= \frac{8}{15} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$$

ii. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$0.6 = 0.35 + P(B) - 0.25$$

$$P(B) = 0.6 - 0.35 + 0.25 = 0.5$$

iii. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$0.7 = 0.5 + 0.35 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap 5B) = 0.5 + 0.35 - 0.7 = 0.15$$

प्रश्न 14 $P(A) = \frac{3}{5}$ और $P(B) = \frac{1}{5}$ दिया गया है। यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो P(A या B) ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तब

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{1}{5}$$

$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} - 0 = 3$$

प्रश्न 15 यदि E और F घटनाएँ इस प्रकार की हैं कि $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$, और P(E और F) $= \frac{1}{8}$ तो ज्ञात कीजिए।

(i) P(E या F)

(ii) P(E - नहीं और F – नहीं)।

उत्तर-

i. $P(E) = \frac{1}{4}, P(F) = \frac{1}{2}, P(E \text{ and } F) = P(E \cap B) = \frac{1}{8}$

$$P(E) \text{ or } F) = P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{2+4-1}{8} = \frac{5}{8}$$

ii. P(E नहीं और F – नहीं) $= P(E \cap F)$

$$= P[(E \cup F)]' = 1 - P(E \cup F)$$

$$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

प्रश्न 16 घटनाएँ E और F इस प्रकार हैं कि P(E – नहीं और F - नहीं) = 0.25, बताइए कि E और F परस्पर अपवर्जी हैं या नहीं।

उत्तर-

P(E - नहीं और F - नहीं) $= \mathrm{P}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F})$

$= \mathrm{P}[(\mathrm{E} \cup \mathrm{F})]'$

अर्थात् $= 1 - \mathrm{P}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = 0.25$

$\mathrm{P}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = 1 - 0.25 = 0.75$

$\mathrm{P}(\mathrm{E}) \cup \mathrm{F}) \neq 0$ इसलिए E और F परस्पर अपवर्जी नहीं है।

प्रश्न 17 घटनाएँ A और B इस प्रकार हैं कि P(A) = 0.42, P(B) = 0.48 और P(A और B) = 0.16, ज्ञात कीजिए।

(i) P(A – नहीं)

(ii) P (B – नहीं)

(iii) P(A या B)

उत्तर-

$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0.42, \mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0.48$

P(A और B) $= \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.16$

i. P(A – नहीं) = P(A′) = 1 – P(A) = 1 – 0.42 = 0.58
ii. P(B – नहीं) = P(B′) = 1 – P(B) = 1 – 0.48 = 0.52
iii. P(A या B) $= \mathrm{P}\ (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

= 0.42 + 0.48 - 0.16

= 0.90 - 0.16 = 0.74

प्रश्न 18 एक पाठशाला की कक्षा XI के 40% विद्यार्थी गणित पढ़ते हैं और 30% जीव विज्ञान पढ़ते हैं। कक्षा के 10% विद्यार्थी गणित और जीव विज्ञान दोनों पढ़ते हैं। यदि कक्षा का एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह गणित या जीव विज्ञान पढ़ता होगा।

उत्तर- एक पाठशाला के 40% विद्यार्थी गणित पढ़ते हैं।

गणित पढ़ने वाले विद्यार्थी की प्रायिकता $P(M) = \frac{40}{100} = 0.4$

30% विद्यार्थी जीव विज्ञान पढ़ते हैं।

जीव विज्ञान पढ़ने वाले विद्यार्थी की प्रायिकता $P(B) = \frac{30}{100} = 0.3$

10% विद्यार्थी गणित और जीव विज्ञान दोनों पढ़ते हैं।

गणित और जीव विज्ञान वाले विद्यार्थियों की प्रायिकता, $P(M \cap B) = \frac{10}{100} = 0.1$

अब एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना गया हो, तब उस विद्यार्थी द्वारा गणित या जीव विज्ञान लिए गए विषय की प्रायिकता

$P(M \cup B) = P(M) + P(B) - P(M \cap B)$

$= 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.6$

प्रश्न 19 एक प्रवेश परीक्षा की दो परीक्षणों (Tests) के आधार पर श्रेणीबद्ध किया जाता है। किसी यादृच्छया चुने गए विद्यार्थी की पहले परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.8 है और दूसरे परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.7 है। दोनों में से कम से कम एक परीक्षण उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.95 है। दोनों परीक्षणों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर- माना A और B क्रमशः पहले और दूसरे परीक्षण में उत्तीर्ण होने को दर्शाते हैं।

$P(A) = 0.8,\ P(B) = 0.7$

कम से कम एक परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता

$$= 1 - P(A' \cap B)' = 0.95$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.95 = 0.05$$

परन्तु $A' \cap B' = (A' \cup B')$ (डी-मोर्गन नियम से)

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$$

$$= 1 - P(A \cup B) = 0.05$$

$$P(A \cup B) = 1 - 0.05 = 0.95$$

अब $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$0.95 = 0.8 + 0.7 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 1.5 - 0.95 = 0.55$$

इस प्रकार दोनों परीक्षणों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता = 0.55

प्रश्न 20 एक विद्यार्थी के अंतिम परीक्षा के अंग्रेजी और हिन्दी दोनों विषयों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.5 है और दोनों में से कोई भी विषय उत्तीर्ण न करने की प्रायिकता 0.1 है। यदि अंग्रेजी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.75 हो तो हिन्दी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर- माना E और H क्रमशः अंग्रेजी और हिन्दी में पास करने को दर्शाते हैं।

तब अंग्रेजी और हिन्दी दोनों परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता

$P(E \cap H) = 0.5$

दोनों में से कोई परीक्षा उत्तीर्ण न करने की प्रायिकता

$$= P(E' \cap H)' = 0.1$$

या $P[(E \cup H)]' = 1 - P(E \cup H) = 0.1$

$$\Rightarrow P(E \cup H) = 1 - 0.1 = 0.9$$

अंग्रेजी परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता $= P(E) = 0.75$

अतः $P(E \cup H) = 0.9, P(E) = 0.75, P(E \cap H) = 0.5$

$$P(E \cup H) = P(E) + P(H) - P(E \cap H)$$

$$0.9 = 0.75 + P(H) - 0.5$$

$$P(H) = 0.9 + 0.5 - 0.75$$

$$= 1.4 - 0.75 = 0.65$$

अतः हिन्दी परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता = 0.65

प्रश्न 21 एक कक्षा के 60 विद्यार्थियों में से 30 ने एन.सी.सी. (NCC), 32 ने एन.एस.एस. (NSS) और 24 ने दोनों को चुना है। यदि इनमें से एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना गया है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि-

(i) विद्यार्थी ने एन.सी.सी. या एन.एस.एस. को चुना है।
(ii) विद्यार्थी ने न तो एन.सी.सी. और न ही एन.एस.एस. को चुना है।
(iii) विद्यार्थी ने एन.एस.एस. को चुना है किन्तु एन.सी.सी को नहीं चुना है।

उत्तर- माना A और B क्रमशः एन.सी.सी. और एन.एस.एस. चुनने की घटना को दर्शाते हैं।

विद्यार्थियों की कुल संख्या = 60

एन.सी.सी. चुनने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 30

एन.सी.सी. चुनने की प्रायिकता $P(A) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

एन.एस.एस. चुनने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 32

एन.एस.एस. चुने जाने की प्रायिकता P(B) $= \frac{60}{32}$

एन.सी.सी. और एन.एस.एस. चुनने वालों की संख्या = 24

एन.सी.सी. और एन.एस.एस. चुनने की प्रायिकता $= \frac{24}{60}$

(i) एन.सी.सी. और एन.एस.एस. चुने जाने की प्रायिकता

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{30}{60} + \frac{32}{60} - \frac{24}{60} = \frac{38}{60} = \frac{19}{30}$$

(ii) एन.सी.सी. और एन.एस.एस. में से कोई भी विषय न चुने जाने की प्रायिकता

$$P(A' \cap B)' = P[(A \cup B)]'$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$$

(iii) विद्यार्थी ने एन.एस.एस. को चुना है परन्तु एन.सी.सी. को नहीं

इसकी प्रायिकता $= P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$$\frac{32}{60} - \frac{24}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 431-433)

प्रश्न 1 एक डिब्बे में 10 लाल, 20 नीली व 30 हरी गोलियाँ रखी हैं। डिब्बे से 5 गोलियाँ यादृच्छया निकाली जाती हैं। प्रायिकता क्या है कि

(i) सभी गोलियाँ नीली हैं?

(ii) कम से कम एक गोली हरी है?

उत्तर- एक डिब्बे में 10 लाल, 20 नीली तथा 30 हरी कुल 60 गोलियाँ हैं।

(i) 60 गोलियों में से 5 गोलियाँ निकालने के तरीके = ${}^{60}C_5$

$\therefore n(S) = {}^{60}C_5$

20 नीली गोलियाँ हैं इनमें से 5 गोलियाँ चुनने के तरीके = ${}^{20}C_5$

5 नीली गोलियाँ निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{{}^{20}C_5}{{}^{60}C_5} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56}$$

$$= \frac{34}{11977}$$

(ii) P (कम से कम एक गोली हरी गोली है)

= 1 - P (पाँचो गोलियाँ नीली या लाला है)

$$= 1 - \frac{{}^{30}C_5}{{}^{60}C_5} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26}{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56}$$

$$= 1 - \frac{117}{4484} = \frac{4367}{4484}$$

प्रश्न 2 ताश के 52 पत्तों की एक अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी से 4 पत्ते निकाले जाते हैं। इस बात की क्या प्रायिकता है कि निकाले गए पत्तों में 3 ईंट और एक हुकम का पत्ता है?

उत्तर- कुल 52 पत्तों की ताश की गड्डी में से 4 पत्ते निकालने के तरीके = ${}^{52}C_4$

$\therefore n(S) = {}^{52}C_4$

3 ईट के पत्ते निकालने के तरीके = ${}^{13}C_3$

एक हुकुम का पत्ता निकालने के तरीके = ${}^{13}C_1$

∴ 3 ईट और 1 हुकुम का पत्ता निकालने के तरीके = $^{13}C_3 \times {}^{13}C_1$

अनुकूल परिणामों की कुल संख्या = $^{13}C_3 \times {}^{13}C_1$

अतः 3 ईंट और एक हुकुम के पत्ते निकालने की प्रायिकता $= \frac{^{13}C_3 \times {}^{13}C_1}{^{52}C_4}$

प्रश्न 3 एक पासे के दो फलकों में से प्रत्येक पर संख्या 1 अंकित है। तीन फलकों में प्रत्येक पर संख्या 2 अंकित है और एक फलक पर संख्या 3 अंकित है। यदि पासा एक बार फेंका जाता है, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

(i) P(2)

(ii) P(1 या 3)

(iii) P(3 - नहीं)

उत्तर-

(i) पासे पर कुल संभावित परिणाम = 6

2 अंक 3 फलकों पर अंकित है

2 प्राप्त करने के 3 तरीके हैं

$P(2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) पासे पर कुल संभावित परिणाम = 6

दो फलकों पर 1 है।

∴ 1 प्राप्त करने के तरीके, $P(1) = \frac{2}{6}$

3 एक फलक पर अंकित है। अतः 3 एक तरीके से मिल सकता है, $P(3) = \frac{1}{6}$

∴ $P(1 \text{ या } 3) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(iii) पासे पर कुल संभावित परिणाम = 6

फलकों में 3 केवल एक फलक पर है।

अतः 3 प्राप्त न करने के तरीके = 6 – 1 = 5

$\therefore$ P(3 – नहीं) $= \frac{5}{6}$

प्रश्न 4 एक लाटरी में 10000 टिकट बेचे गए जिनमें दस समान इनाम दिए जाने हैं। कोई भी इनाम न मिलने की प्रायिकता क्या है यदि आप-

एक टिकट खरीदते हैं।

दो टिकट खरीदते हैं।

10 टिकट खरीदते हैं?

उत्तर- टिकटों की संख्या जिन पर इनाम नहीं है

= 10000 - 10 = 9990

जबकि कुल टिकटों की संख्या = 10,000

(i) एक टिकट जिससे कोई इनाम नहीं मिलेगा ऐसे कुल तरीके = $9990C_1$ = 9990

जबकि कुल संभावी परिणाम = 10,000

एक टिकट के साथ इनाम न मिलने की प्रायिकता $= \frac{9990}{10000} = \frac{999}{1000}$

(ii) बिना इनाम वाले 9990 में से 2 टिकट मिलने के तरीके = $9990C_2$

कुल 10000 टिकट हैं। उनमें से 2 टिकट पाने के तरीके =$10000C_2$

दो टिकट के साथ इनाम न मिलने की प्रायिकता $= \frac{9990C_2}{10000C_2}$

(iii) इसी प्रकार 9990 में बिना इनाम वाले 10 टिकट को पाने के तरीके = $9990C_{10}$

10000 में से 10 टिकट पाने के तरीके = $10000C_{10}$

अतः 10 टिकट के साथ इनाम न मिलने की प्रायिकता

प्रश्न 5 100 विद्यार्थियों में से 40 और 60 विद्यार्थियों के दो वर्ग बनाए गए हैं। यदि आप और आपकाएक मित्र 100 विद्यार्थियों में हैं तो प्रायिकता क्या है कि-

(i) आप दोनों एक ही वर्ग में हों।
(ii) आप दोनों अलग-अलग वर्गों में हों।

उत्तर- माना दो वर्ग A और B हैं जिनमें क्रमशः 40 और 60 विद्यार्थी हैं।

(i) मान लीजिए दोनों विद्यार्थी वर्ग A में आते हैं।

98 विद्यार्थियों में से 38 विद्यार्थी चुने जाते हैं।

98 विद्यार्थियों में से 38 विद्यार्थी चुनने के तरीके = $^{98}C_{38}$

बिना किसी शर्त के, 100 में से 40 विद्याथीं चुनने के तरीके n(S) = $100C_{40}$

दोनों विद्यार्थी (वह और उसका मित्र) एक ही वर्ग A में प्रवेश करने की प्रायिकता

$$= \frac{98C_{38}}{100C_{40}}$$

$$= \frac{98!}{100!60!} \times \frac{40!60!}{100!}$$

$$= \frac{98! \times 40!60!}{38!60! \times 100.99(98!)}$$

$$= \frac{40.39}{100 \times 99} = \frac{26}{165}$$

(ii) यदि दोनों विद्यार्थी वर्ग B में प्रवेश करते हैं। तब 98 विद्यार्थियों में से 58 विद्यार्थी चुनने के तरीके = $^{98}C_{58}$

100 विद्यार्थियों में से 60 विद्यार्थी चुनने के तरीके = $^{100}C_{60}$

अतः यदि वे विद्यार्थी वर्ग B में प्रवेश पाते हैं तो उसकी प्रायिकता

$$= {}^{98}C_{58} \div {}^{100}C_{60}$$

$$= \frac{98!}{58!40!} \div \frac{100!}{60!40!}$$

$$= \frac{98!}{58!40!} \times \frac{60.59.(58!)\times(40!)}{100.99.98!}$$

$$= \frac{60.59}{100.99} = \frac{59}{5\times33} = \frac{59}{165}$$

दोनों विद्यार्थी वर्ग A या वर्ग B में प्रवेश पाते हैं तो उसकी प्रायिकता

$$= \frac{26}{165} + \frac{59}{165} = \frac{85}{165} = \frac{17}{33}$$

दोनों विद्यार्थियों के विभिन्न वर्गों में प्रवेश पाने की प्रायिकता

$$= 1 - \frac{17}{33} + \frac{33-17}{33} = \frac{16}{33}$$

प्रश्न 6 तीन व्यक्तियों के लिए तीन पत्र लिखवाए गए हैं और प्रत्येक के लिए पता लिखा एक लिफाफा है। पत्रों को लिफाफों में यादृच्छया इस प्रकार डाला गया कि प्रत्येक लिफाफे में एक ही पत्र है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि कम से कम एक पत्र अपने सही लिफाफे में डाला गया है।

उत्तर- मान लीजिए लिफाफों को A, B, C और संगत पत्रों को क्रमशः a, b, c से निरूपित किया गया है।

(i) एक पत्र उसके संगत लिफाफे में और दूसरे दो गलत लिफाफे में रखने के तरीक (Aa, Bc, Cb), (Ac, Bb, Ca), (Ab, Ba, Cc)

(ii) यदि दो पत्र संगत (ठीक) लिफाफों में रखे गए हैं तो तीसरा भी संगत (ठीक) लिफाफे में होगा।

(iii) तीनों पत्र उनके संगत (ठीक) लिफाफों में रखे जाए (Aa, Bb, Cc) एक तरीका है। पत्र कम से कम एक संगत लिफाफे में रखे जाने के तरीके

3 + 1 = 4

तीन पत्रों को तीन लिफाफा में रखने के कुल तरीके = 3! = 6

कम से कम एक पत्र संगत लिफाफे में रखे जाने की प्रायिकता $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

प्रश्न 7 A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि P(A) = 0.54, P(B) = 0.69 और P(A ∩ B') = 0.35 ज्ञात कीजिए।

i. $P(A \cup B)$

ii. $P(A' \cap B)$

iii. $P(A \cap B')$

iv. $P(B' \cap A)$

उत्तर-

$$P(A) = 0.54, P(B) = 0.69, P(A \cap B) = 0.35$$

i. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (A \cap B)$

$= 0.54 + 0.69 - 0.35 = 0.88$

ii. $P(A' \cap B)' = P[(A \cup B)]' = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - 0.88 = 0.12.$

iii. $P(A \cap B)' = P(A) - P(A \cap B)$

$= 0.54 - 0.35 = 0.19.$

iv. $P(B \cap A)' = P(B) - P(B \cap A)$

$= 0.69 - 0.35 = 0.34$

प्रश्न 8 एक संस्था के कर्मचारियों में से 5 कर्मचारियों का चयन प्रबन्ध समिति के लिए किया गया है। पाँच कर्मचारियों का ब्यौरा निम्नलिखित है।

क्रमांक	नाम	लिंग	आयु (वर्षों में)
1.	हरीश	M	30
2.	रोहन	M	33
3.	शीतल	F	46
4.	ऐलिस	F	28
5.	सलीम	M	21

इस समूह से प्रवक्ता पद के लिए यादृच्छया एक व्यक्ति का चयन किया गया। प्रवक्ता के पुरुष या 35 वर्ष से अधिक आयु का होने की प्रायिकता क्या है?

उत्तर- माना A पुरुष के चयन और B व्यक्ति की आयु 35 वर्ष से अधिक को दर्शाते हैं।

पुरुषों की कुल संख्या = 3

35 वर्ष से अधिक आयु के कुल लोग = 2

35 वर्ष से अधिक आयु का पुरुष 1 है।

कुल व्यक्ति 5 है। उनमे से एक को चुनने के तरिके = $^5C_1 = 5$

3 पुरूषों में से 1 पुरुष चुनने के तरीके = $^3C_1 = 3$

$$P(A)\frac{^3C_1=3}{^5C_1=5}$$

5 वर्ष से अधिक आयु का एक व्यक्ति चुनने तरिके = $^2C_1 = 2$

$$P(B)\frac{^2C_1}{^5C_1} = \frac{1}{5}$$

$$P(A\cap B)\frac{^2C_1}{^5C_1} = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cup B) = P \text{ (पुरुष या 35 वर्ष से अधिक व्यक्ति)}$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

प्रश्न 9 यदि 0, 1, 3, 5 और 7 अंकों द्वारा 5000 से बड़ी चार अंकों की संख्या का यादृच्छया निर्माण किया गया हो तो पाँच से भाज्य संख्या के निर्माण की क्या प्रायिकता है जब।

(i) अंकों की पुनरावृत्ति नहीं की जाए?

(ii) अंकों की पुनरावृत्ति की जाए?

उत्तर-

(i) जब अंकों की पुनरावृत्ति नहीं होती।

मान लीजिए अंकों के स्थानों को I, II, III, IV से निरूपित किया गया हैं।

5000 से बड़ी संख्या बनाने के लिए स्थान I पर 5 या 7 रखना होगा अर्थात स्थान I को भरने के तरीके = 2

अब 5 अंक शेष रह जाते हैं।

स्थान II, III और IV को 4, 3 व 2 तरीकों से भर सकते हैं।

5000 से बड़ी संख्याएँ = 4 × 4 × 3 × 2 = 48 = n(S)

5 से भाज्य संख्याएँ वे हैं जब इकाई (स्थान IV) पर 0 या 5 हो। 5 को स्थान I पर तथा 0 को स्थान IV पर रखने के बाद 3 अंक बचते हैं। स्थान II और III, को 2 × 3 = 6 तरीकों से भरा जा सकता है। इस प्रकार स्थान I पर जब 5 हो और IV पर 0 हो तो 6 संख्याएँ बनती हैं।

जब स्थान I पर 7 और स्थान IV पर 5 हो तो भी 6 संख्याएँ बनेंगी।

5000 से बड़ी और 5 से भाज्य संख्याएँ = 6 + 6 + 6 = 18

अत: 5000 से बड़ी और 5 से भाज्य संख्याओं के बनने की प्रायिकता $= \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

(ii) जब पुनरावृत्ति की जा सकती है।

स्थान I पर 5 या 7 रख सकते है जिससे संख्या 5000 से बड़ी बन सके।

स्थान I को 2 तरीकों से भर सकते हैं।

क्योंकि पुनरावृत्ति की अनुमति है तो प्रत्येक स्थान II, III, IV को 5 तरीकों से भर सकते हैं।

चारों स्थानों को भरने के तरीके या 5000 से बड़ी संख्याएँ

= 2 × 5 × 5 × 5 = 250 = n(S)

संख्या यदि 5 से भाज्य है तो इकाई (IV) स्थान पर 0 या 5 रखना होगा।

इसलिए इकाई के स्थान को 2 तरीकों से भर सकते हैं।

बीच के स्थान II और III को 5 × 5 तरीकों से भर सकते हैं।

इस प्रकार 5000 से बड़ी और 5 से भाज्य संख्याएँ = 2 × 5 × 5 × 2 = 100

5000 से बड़ी और 5 से भाज्य बनाने वाली संख्याओं की प्रायिकता

$$= \frac{100}{250} = \frac{2}{5}$$

प्रश्न 10 किसी अटैची के ताले में चार चक्र लगे हैं। जिनमें प्रत्येक पर 0 से 9 तक 10 अंक अंकित हैं। ताला चार अंकों के एक विशेष क्रम (अंकों की पुनरावृत्ति नहीं) द्वारा ही खुलता है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि कोई व्यक्ति अटैची खोलने के लिए सही क्रम का पता लगा ले।

उत्तर- प्रथम स्थान पर कोई अंक 10 तरीकों से ही लाया जा सकता है। यहाँ 0, 1, 2, ... 9 में से कोई भी अंक 'हो सकता है।

दूसरे, तीसरे व चौथे स्थान को 9 × 8 × 7 तरीकों से भरा जा सकता है।

इस प्रकार चार अंकों की संख्या (जबकि पुनरावृत्ति नहीं की गई है) बनने के तरीके

$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

ताले को खोलने के लिए सही संख्या केवल एक ही है।

अटैची को खोलने का सही क्रम ज्ञात करने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{5040}$$