भौतिकी

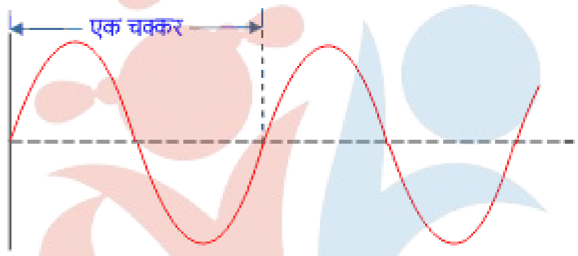
अध्याय-13: दोलन गति

दोलन गति

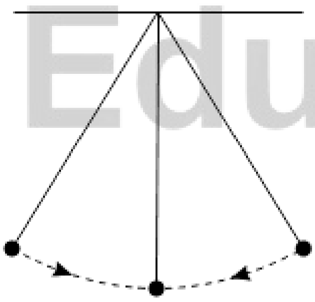
जब कोई पिंड एक निश्चित पथ पर किसी स्थिर बिंदु के इधर-उधर एक नियत समय में अपनी गति को बार-बार दोहराता है तो पिंड की इस गति को दोलन गति (oscillatory motion) कहते है। इसे कंपन गति भी कहते हैं।

दोलन गति के उदाहरण

1. जब हम किसी रस्सी को दीवार से बांधकर रस्सी के दूसरे सिरे को हाथ से हिलाते हैं। तो रस्सी में कंपन उत्पन्न हो जाते हैं। अर्थात् रस्सी एक निश्चित समय में अपनी गति को बार-बार ऊपर-नीचे दोहराती है। अतः रस्सी की यह गति दोलन गति है।



2. जब किसी रस्सी से पत्थर बांधकर उसके दूसरे सिरे को किसी वस्तु से बांध देते हैं। एवं अब पत्थर को हिलाते हैं तो पत्थर एक निश्चित बिंदु के इधर-उधर निश्चित समय में बार-बार अपनी गति को दोहराता रहता है। अतः पत्थर की यह गति दोलन गति है। चित्र सहित स्पष्ट है।



3. अन्य उदाहरण - हमारे घरों में लगे घंटे की सूइयों की गति, सरल लोलक की गति, सिलाई मशीन की सुई की गति आदि।

प्रत्येक दोलन गति आवश्यक रूप से आवर्ती गति होती है। परंतु प्रत्येक आवर्त गति, दोलन गति हो यह आवश्यक नहीं है। जैसे -

पृथ्वी सूर्य के चारों ओर आवर्ती गति करती है। दोलन गति नहीं करती। क्योंकि पृथ्वी की गति किसी निश्चित बिंदु के इधर-उधर नहीं होती है।

आवर्त गति

जब कोई पिंड किसी निश्चित पथ पर अपनी गति को एक निश्चित समयांतराल में बार-बार दोहराता है तो पिंड की इस गति को आवर्त गति (periodic motion) कहते हैं।
आवर्त गति में प्रयोग होने वाले समय अंतराल को आवर्तकाल कहते हैं। अर्थात वह समय अंतराल जिसके बाद वस्तु की गति की पुनरावृत्ति होती है आवर्तकाल कहते हैं।

आवर्त गति उदाहरण

1. सूर्य की परिक्रमा करती हुई पृथ्वी की गति आवर्त गति है जिसका आवर्तकाल 1 वर्ष होता है।
2. घंटे में घूमती सूइयों की गति आवर्त गति है। सेकंड वाली सुई का आवर्तकाल 1 मिनट, मिनट वाली सुई का 1 घंटा तथा घंटे वाली सुई का आवर्तकाल 12 घंटे होता है।
3. पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमा करते चंद्रमा की गति आवर्त गति का उदाहरण है। जिसका आवर्तकाल 27.3 दिन होता है।

सरल आवर्त गति

जब कोई पिंड साम्य स्थिति के इधर-उधर एक सरल रेखा में गति करता है तो पिंड की इस गति को सरल आवर्त गति (simple harmonic motion) कहते हैं।
सरल आवर्त गति में पिंड पर लगने वाला प्रत्यानयन बल प्रत्येक स्थिति में पिंड के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है।
यदि पिंड पर लगने वाला प्रत्यानयन बल F तथा विस्थापन d हो तो
$F \propto d$

$$\boxed{F = -kd}$$

जहां k एक नियतांक है जिसे बल नियतांक कहते हैं ऋणात्मक चिन्ह से पता चलता है कि बल की दिशा सदैव विस्थापन के विपरीत होती है।

एकसमान वृत्तीय गति के रूप में सरल आवर्त गति

जब कोई पिंड किसी वृत्त की परिधि पर एकसमान कोणीय वेग से गति करता है तो पिंड से वृत्त के व्यास पर खींचे गए लंब के पाद की गति को सरल आवर्त गति कहते हैं।

सरल आवर्त गति की विशेषताएं

- पिंड की गति सीधी सरल रेखा में किसी स्थिर बिंदु के इधर-उधर होती है।
- सरल आवर्त गति करते हुए पिंड का वेग अधिकतम होता है।
- पिंड पर लगने वाला प्रत्यानयन बल विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है।
- इन पर लगने वाले बल की दिशा सदैव स्थिर बिंदु की ओर होती है।
- पिंड पर त्वरण शून्य होता है।

सरल आवर्त गति का विस्थापन समीकरण

माना एक कण P , a त्रिज्या के एक वृत्तीय पथ पर चक्कर लगा रहा है। माना कण बिंदु B से चलना प्रारंभ करता है तथा t सेकंड में कण, θ कोण घूम जाता है। यदि कण का कोणीय वेग ω है तो

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

या $\theta = \omega t$

यदि t सेकंड में प्रक्षेप N का मूलबिंदु O से विस्थापन y है तो

$$\sin\theta = \frac{y}{a}$$

या $y = a\sin\theta$

θ का मान प्रस्तुत समीकरण में रखने पर

$$\boxed{y = a\sin\omega t}$$

यह सरल आवर्त गति का विस्थापन समीकरण है।

सरल आवर्त गति संबंधी परिभाषाएं

1. आयाम

सरल आवर्त गति में विस्थापन के अधिकतम मान को उसका आयाम कहते हैं। इसे a से प्रदर्शित करते हैं।

2. आवृत्ति

एक सेकंड में कण द्वारा किए गए कंपनों की संख्या को उसकी आवृत्ति कहते हैं। इसे n से दर्शाया जाता है।

$$\boxed{n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

3. आवर्तकाल

सरल आवर्त गति में सर द्वारा एक कंपन को पूरा करने में लगे समय को उसका आवर्तकाल कहते हैं। इसे T से प्रदर्शित करते हैं।

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

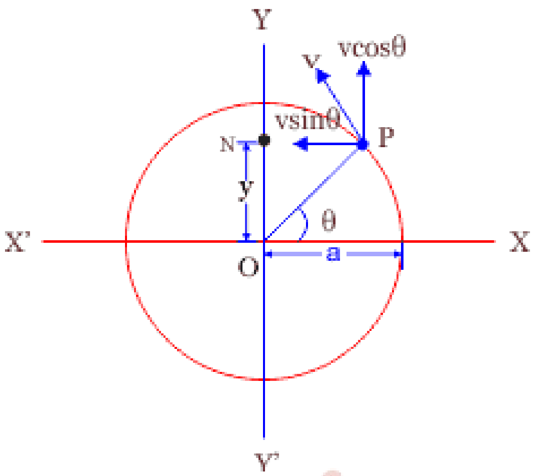
4. सरल आवर्त गति का विस्थापन समीकरण

$y = a\sin(\omega t + \Phi)$

जहां Φ कण की प्रारंभिक कला है।

सरल आवर्त गति में कण का वेग

मानव को एण वृत्त की परिधि पर गति कर रहा है तो उसके वेग v को दो घटकों में वियोजित कर सकते हैं।



सरल आवर्त गति

क्षैतिज घटक = vsinθ

ऊर्ध्वाधर घटक = vcosθ

यह ऊर्ध्वाधर घटक = vcosθ कण की गति N के समांतर है। अतः सरल आवर्त गति में कण का वेग u हो तो

u = vcosθ

θ = ωt तथा v = rω रखने पर

u = aωcosωt

$u = a\omega\sqrt{cos^2\omega t}$

$u = a\omega\sqrt{1 - sin^2\omega t}$

चूंकि y = asinωt तब sinωt = $\frac{y}{a}$ से

$u = a\omega\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}$

$u = a\omega \times \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}$

$$\boxed{u = \omega\sqrt{a^2 - y^2}}$$

यह सरल आवर्त गति करते हुए पिंड के वेग का सूत्र है।

सरल आवर्त गति में कण का त्वरण

जब कोई कण किसी वृत्त की परिधि पर गति करता है तो उस पर एक अभिकेंद्र बल कार्य करता है इस बल को दो घटकों में वियोजित करने पर

क्षैतिज घटक = $\frac{v^2}{a}\cos\theta$

ऊर्ध्वाधर घटक = $\frac{v^2}{a}\sin\theta$

तो $u = -\frac{v^2}{a}\sin\theta$

$y = a\sin\theta$ से $\sin\theta = \frac{y}{a}$ रखने पर

$u = -\frac{v^2}{a} \times \frac{y}{a}\sin\theta$

$u = -\frac{v^2}{a} \times y\sin\theta$

$u = -\omega^2 y$

या $\boxed{\text{त्वरण} \propto \text{विस्थापन}}$

स्प्रिंग

जब किसी पिंड के किसी लटके हुए स्प्रिंग के निचले सिरे से बांध दिया जाता है तो पिंड के भार के कारण वह स्प्रिंग नीचे की ओर झुकने लगता है। अर्थात स्प्रिंग की लंबाई में वृद्धि हो जाती है। तो स्प्रिंग का आवर्तकाल

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

जहां m – वस्तु का द्रव्यमान

k – बल नियतांक

T – आवर्तकाल

चूंकि आवृत्ति $n = \frac{1}{T}$ हो तो

$$\boxed{n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

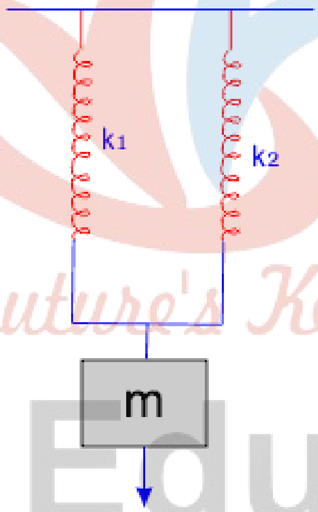
या $2\pi n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

चूंकि $\omega = 2\pi n$ होता है तब

कोणीय वेग $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

स्प्रिंग का समांतर क्रम संयोजन

माना दो स्प्रिंग हैं जिनको समांतर क्रम में जोड़कर उनमें एक पिंड को लटकाया गया है। माना दोनों स्प्रिंग के बल नियतांक k_1 व k_2 हैं जो एक दूसरे से भिन्न होंगे जैसे चित्र में दिखाया गया है।



यदि पिंड पर लगने वाला बल F है तो

$F = - ky$

अतः पहले स्प्रिंग के लिए $F_1 = - k_1y$

तथा दूसरी स्प्रिंग के लिए $F_2 = - k_2y$

अर्थात $F = F_1 + F_2$

या $ky = k_1y + k_2y$

$k = k_1 + k_2$

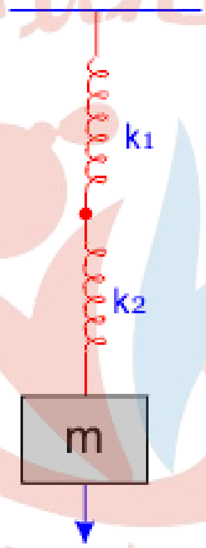
जहां k तुल्य बल नियतांक है तो

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ से

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}}$$

स्प्रिंग का श्रेणीक्रम संयोजन

माना दो स्प्रिंग को श्रेणीक्रम में जोड़कर किसी पिंड से लटकाया गया है। यदि दोनों स्प्रिंग के बल नियतांक k_1 व k_2 हैं एवं यह एक दूसरे से भिन्न-भिन्न होंगे। चित्र से स्पष्ट है



माना पिंड पर लगने वाला बल F तथा दोनों स्प्रिंग पर लगने वाला बल क्रमशः F_1 व F_2 हैं। तब यह बल एक दूसरे के समान होंगे। तो

$F = F_1 = F_2$

यदि पहले स्प्रिंग की लंबाई में वृद्धि y_1 व दूसरी स्प्रिंग की लंबाई में वृद्धि y_2 हो तो

$y = y_1 + y_2$

या $\frac{F}{y} = \frac{F}{y_1} + \frac{F}{y_2}$

$\frac{1}{y} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}$

जहां k तुल्य बल नियतांक है तो

सूत्र $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ से

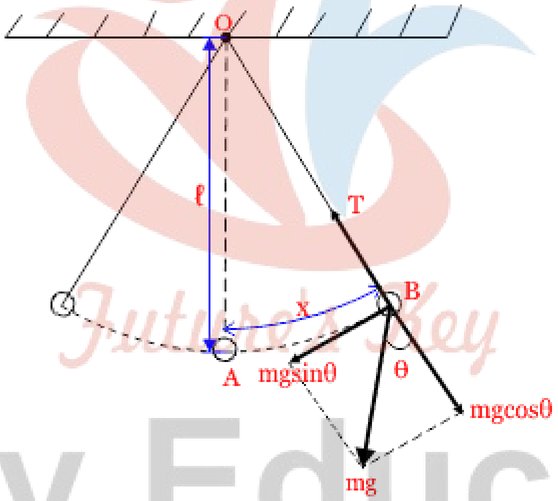
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

सरल लोलक

जब किसी छोटे और भारी पिंड को किसी भारहीन पिंड एवं लम्बाई में न बढ़ने वाले धागे के एक सिरे से पिंड को बांधकर धागे को किसी घर्षण रहित दीवार (छत) से लटका दें। तो इस प्रकार बने समायोजन को सरल लोलक (simple pendulum) कहते हैं।
सरल लोलक की गति सरल आवर्त गति का एक उदाहरण है। व्यवहार में यह समायोजन संभव नहीं है।

सरल लोलक के आवर्तकाल का व्यंजक

माना m द्रव्यमान के किसी गोलक को ℓ लंबाई के धागे के किसी बिंदु से लटकाया गया है।



सरल लोलक का आवर्तकाल

जब इस गोलक को साम्य स्थिति में A से x दूरी विस्थापिन करके छोड़ दिया जाता है तो यह सरल लोलक दोलन करने लगता है।
यदि किसी क्षण बिंदु B पर सरल लोलक की स्थिति में भार mg को दो घटकों में वियोजित करने पर
क्षैतिज घटक = mgcosθ
ऊर्ध्वाधर घटक = mgsinθ
ऊर्ध्वाधर घटक सदैव साम्य स्थिति की ओर होता है अतः इसे प्रत्यानयन बल F कहते हैं।

तो F = – mgsinθ

या ma = – mg$\left(\frac{x}{\ell}\right)$

a = – g$\left(\frac{x}{\ell}\right)$ समी.①

अतः a ∝ – x

या $\boxed{\text{त्वरण} = -\text{विस्थापन}}$

यहां त्वरण सदैव विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है।

अतः सरल लोलक की गति सरल आवर्त गति है।

तो समी.① से

a = g$\left(\frac{x}{\ell}\right)$

$\frac{x}{a} = \frac{\ell}{g}$

चूंकि सरल लोलक का आवर्तकाल T = 2π$\sqrt{\frac{\text{विस्थापन}}{\text{त्वरण}}}$ होता है तो

विस्थापन/त्वरण या $\frac{x}{a}$ का मान रखने पर

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

यह सरल लोलक का आवर्तकाल का सूत्र है। सरल लोलक का आवर्तकाल (time period of simple pendulum) पिंड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

सेकंड लोलक

जब किसी लोलक का आवर्तकाल 2 सेकंड होता है तो इस प्रकार की लोलक को सेकंड लोलक (second's pendulum) कहते हैं।

अतः सरल लोलक का आवर्तकाल के सूत्र से

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

चूंकि आवर्तकाल 2 सेकंड है तो

T = 2 रखने पर

$$\boxed{l = \frac{g}{\pi^2}}$$

माना किसी स्थान पर g = 9.8 मीटर/सेकंड^2, T = 2 सेकंड हो तो

$\ell = \frac{9.8}{(3.14)^2}$

ℓ = 0.992 मीटर

ℓ = 99.2 सेमी

अतः स्पष्ट होता है कि किसी सरल लोलक की लंबाई 99.2 सेमी कर दें। तो उसका आवर्तकाल 2 सेकंड होगा। तब उसे सेकंड लोलक कहते हैं।

अनुनाद

जब किसी वस्तु पर कोई बाह्य आवर्त बल आरोपित किया जाता है तो वस्तु में प्रणोदित दोलन बाह्य बल के अंतर्गत उत्पन्न होते हैं। अर्थात

"यदि बाह्य बल की आवृत्ति वस्तु की स्वभाविक आवृत्ति के बराबर हो तो वस्तु के प्रणोदित दोलनों का आयाम बहुत बड़ा हो जाता है इस क्रिया को अनुनाद (resonance) कहते हैं।

अनुनाद की दशा में बाह्य बल सदैव वस्तु के दोलन की कला में रहता है। अतः आवर्त बल द्वारा वस्तु को प्रदान किए गए आवेग के प्रभाव से दोलनो का आयाम लगातार बढ़ता जाता है लेकिन आयाम के बढ़ने पर घर्षण प्रतिरोध भी बढ़ता जाता है। जिस कारण वस्तु की ऊर्जा की हानि की दर भी बढ़ती जाती है। और अंत में एक ऐसी अवस्था और जाती है जब बाह्य बल द्वारा दी गई ऊर्जा वस्तु द्वारा ऊर्जा हानि की दर के बराबर हो जाती है यह स्थिति संतुलन की होती है। प्रायः आयाम बहुत अधिक बड़ा होने से पहले ही आ जाती है।

अनुनाद की तीक्ष्णता

यदि बाह्य बल की आवृत्ति को वस्तु के दोलनो की स्वभाविक आवृत्ति से थोड़ा कम या ज्यादा करने से वस्तु के दोलनो के आयाम में अत्यधिक कमी हो जाए तो यह प्रक्रिया तीक्ष्ण अनुनाद कहलाती है।
इसके विपरीत यदि वस्तु के दोलनो के आयाम में बहुत कम कमी आती है तो यह प्रक्रिया सपाट अनुनाद कहलाती है।

अनुनाद के उदाहरण

अनुनाद के उदाहरण निम्न तीन प्रकार में मिलते हैं
(1) यांत्रिक अनुनाद
(2) ध्वनि अनुनाद
(3) विद्युत चुंबकीय अनुनाद

1. यांत्रिक अनुनाद

सेना का पुल पार करना
जब कोई सेना किसी पुल को पार करती है तो सैनिक कदम मिलाकर नहीं चलते हैं। क्योंकि अगर सैनिक कदम मिलाकर चलेंगे, तो सैनिकों के कदमों की आवृत्ति, पुल की स्वभाविक आवृत्ति के बराबर हो जाए तो पुल टूटने का खतरा हो जाएगा।

2. ध्वनि अनुनाद

(a) स्वरित्र (अनुनाद बॉक्स)
स्वरित्र की ध्वनि बहुत कम होती है परंतु यदि स्वरित्र को किसी खोखले बॉक्स पर खड़ा कर दिया कर दें तो स्वरित्र की आवृत्ति बॉक्स के भीतर की स्वभाविक आवृत्ति के बराबर हो जाये, तो ध्वनि बहुत तेज सुनाई देती है।
(b) डोरियों में कंपन
यदि समान आवृत्ति की दो डोरियां एक ही वाद्य यंत्र पर बंधी है तो इनमे से किसी एक डोरी को हिलाकर छोड़ दें, तो दूसरी डोरी स्वयं ही कंपन करने लगती है।
(c) वातावरण में कंपन

यदि आप अपने कान पर कोई गिलास रखकर ध्वनि सुनें, तो आपको गुनगुन की आवाज आएगी। इसका कारण है कि जब हम गिलास को कान पर लगाते हैं तो जिन आवृत्ति के कंपन, गिलास के भीतर की स्वभाविक आवृत्ति के बराबर होती है तो वह ध्वनि हमें सुनाई देती है।

3. विद्युत चुंबकीय अनुनाद

जब विद्युत चुंबकीय तरंगों की आवृत्ति परिपथ की स्वभाविक आवृत्ति के बराबर होती है तो परिपथ में अनुनादी दोलन उत्पन्न होने लगते हैं। जिसे विद्युत चुंबकीय अनुनाद कहते हैं।

NCERT SOLUTIONS

अभ्यास (पृष्ठ संख्या 375-379)

प्रश्न 1 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन आवर्ती गति को निरूपित करता है?

a. किसी तैराक द्वारा नदी के एक तट से दूसरे तट तक जाना और अपनी एक वापसी यात्रा पूरी करना।
b. किसी स्वतंत्रतापूर्वक लटकाए गए दंड चुंबक को उसकी N – S दिशा से विस्थापित कर छोड़ देना।
c. अपने द्रव्यमान केन्द्र के परितः घूर्णी गति करता कोई हाइड्रोजन अणु।
d. किसी कमान से छोड़ा गया तीर।

उत्तर-

a. यह आवश्यक नहीं है कि तैराक को प्रत्येक बार वापस लौटने में समान समय लगे। अर्थात् यह गति आवर्ती गति नहीं है।
b. दण्ड चुंबक को N – S दिशा से विस्थापित कर छोड़ने पर उसकी गति आवर्ती गति होगी।
c. यह गति आवर्ती है।
d. तीर छूटने के बाद कभी भी पुनः प्रारम्भिक स्थिति में नहीं लौटता है। अतः यह गति आवर्ती नहीं है।

प्रश्न 2 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन (लगभग) सरल आवर्त गति को तथा कौन आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं निरूपित करते हैं?

a. पृथ्वी की अपने अक्ष के परितः घूर्णन गति।
b. किसी U नली में दोलायमान पारे के स्तंभ की गति।
c. किसी चिकने वक्रीय कटोरे के भीतर एक बॉल बेयरिंग की गति जब उसे निम्नतम बिन्दु से कुछ ऊपर के बिन्दु से मुक्त रूप से छोड़ा जाए।
d. किसी बहुपरमाणुक अणु की अपनी साम्यावस्था की स्थिति के परितः व्यापक कंपन।

उत्तर-

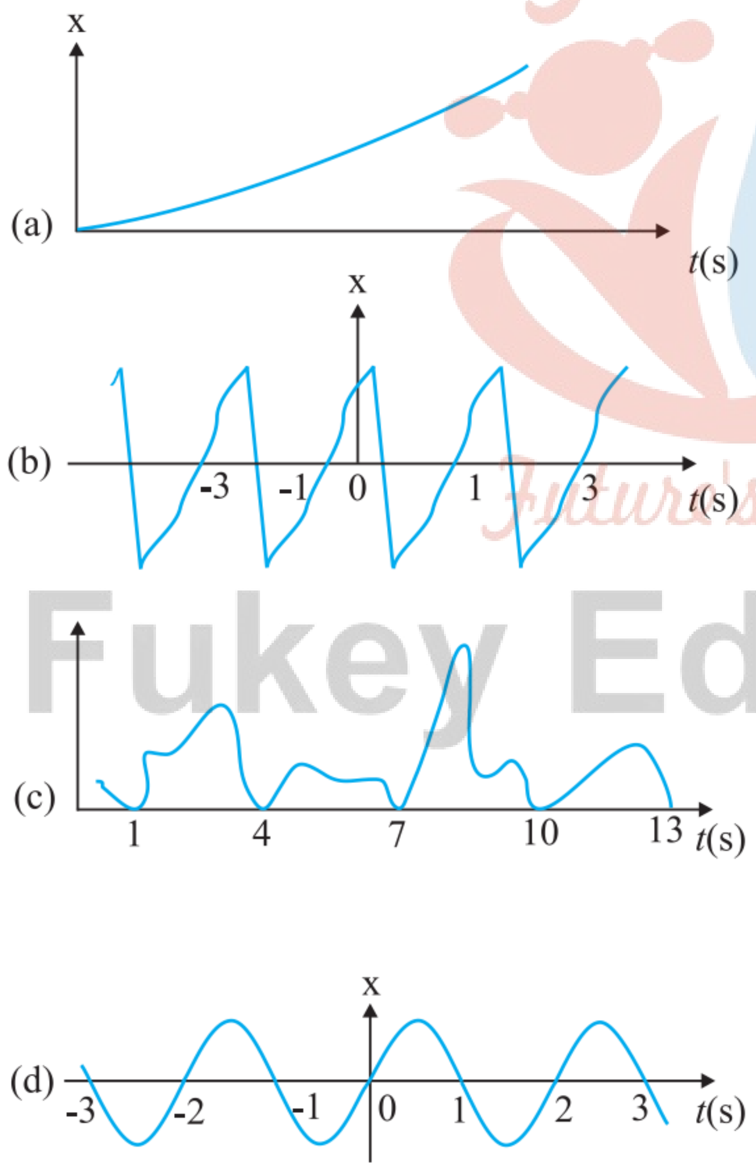
a. आवर्त गति लेकिन सरल आवर्त गति नहीं है।

b. सरल आवर्त गति।

c. सरल आवर्त गति

d. आवर्ती गति लेकिन सरल आवर्त गति नहीं है।

प्रश्न 3 चित्र में किसी कण की रैखिक गति के लिए चार x – t आरेख दिए गए हैं। इनमें से कौन-सा आरेख आवर्ती गति का निरूपण करता है? उस गति का आवर्तकाल क्या है? (आवर्ती गति वाली गति का)।



उत्तर-

a. ग्राफ से स्पष्ट है कि कण कभी भी अपनी गति की पुनरावृत्ति नहीं करता है; अत: यह गति, आवर्ती गति नहीं है।
b. ग्राफ से ज्ञात है कि कण प्रत्येक 2s के बाद अपनी गति की पुनरावृत्ति करता है; अतः यह गति एक आवर्ती गति है जिसका आवर्तकाल 2s है।
c. यद्यपि कण प्रत्येक 3s के बाद अपनी प्रारम्भिक स्थिति में लौट रहा है परन्तु दो क्रमागत प्रारम्भिक स्थितियों के बीच कण अपनी गति की पुनरावृत्ति नहीं करता; अत: यह गति आवर्त गति नहीं है।
d. कण प्रत्येक 2s के बाद अपनी गति को दोहराता है; अत: यह गति एक आवर्ती गति है जिसका आवर्तकाले 2s है।

प्रश्न 4 नीचे दिए गए समय के फलनों में कौन (a) सरल आवर्त गति (b) आवर्ती परन्तु सरल आवर्त गति नहीं, तथा (e) अनावर्ती गति का निरूपण करते हैं। प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए: (ω कोई धनात्मक अचर है)

a. $\sin \omega t - \cos \omega t$

b. $\sin^3 \omega t$

c. $3 \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2\omega t\right)$

d. $\cos \omega t + \cos 3\omega t + \cos 5\omega t$

e. $\exp(-\omega^2 t^2)$

f. $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

उत्तर-

a. दिया गया फलन $x = \sin \omega t - \cos \omega t$

$$= \sqrt{2}\left[\sin\omega t.\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\omega t.\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\sin\omega t\cos\frac{\pi}{4} - \cos\omega t\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{t}{4}\right)$$

स्पष्ट है कि यह फलन $\sqrt{2}$ आयाम की सरल आवर्त गति निरूपित करता है। इस गति का कोणीय वेग $= \omega$

$\therefore$ आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$

b. दिया गया फलन एक आवर्ती गति को निरूपित करता है परन्तु यह सरल आवर्त गति नहीं है।

इसका आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$ है।

c. यह फलन एक सरल आवर्त गति को निरूपित करता है जिसका आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$ है।

d. यह फलन भी आवर्त गति को निरूपित करता है जो कि सरल आवर्त गति नहीं है।

$\because$ फलन $\cos\omega t$ का आवर्तकाल $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$

फलंन $\cos 3\omega t$ का आवर्तकाल $T_3 = \frac{2\pi}{3\omega}$

तथा फलन $\cos 5\omega t$ का आवर्तकाल $T_3 = \frac{2\pi}{5\omega}$

यहाँ $T_1 = 3T_2$ तथा $T_1 = 5T_3$

इसका अर्थ यह हुआ कि जहाँ T_1 समय पश्चात् प्रथम फलन की एक बार, दूसरे की तीन बार तथा तीसरे की पाँच बार पुनरावृत्ति हो चुकेगी।

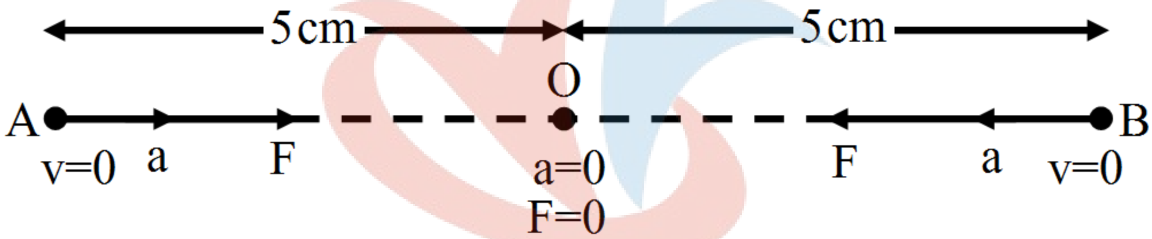
अर्थात् T_1 समय में प्रत्येक फलन की कम-से-कम एक बार पुनरावृत्ति हो चुकेगी; अत: दिए गए फलन का आवर्तकाल $T = T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$

(e) तथा (f) में दिए गए दोनों फलन न तो आवर्त गति निरूपित करते हैं और न ही सरल आवर्त गति निरूपित करते हैं।

प्रश्न 5 कोई कण एक दूसरे से 10 cm दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं A तथा B के बीच रैखिक सरल आवर्त गति कर रहा है। A से B की ओर की दिशा को धनात्मक दिशा मानकर वेग, त्वरण तथा कण पर लगे बल के चिह्न ज्ञात कीजिए जबकि यह कण –

a. A सिरे पर है
b. B सिरे पर है
c. A की ओर जाते हुए AB के मध्य बिन्दु पर है
d. A की ओर जाते हुए B से 2 cm दूर है
e. B की ओर जाते हुए A से 3 cm दूर है तथा
f. A की ओर जाते हुए B से 4 cm दूर है।

उत्तर- स्पष्ट है कि बिन्दु A तथा बिन्दु B अधिकतम विस्थापन की स्थितियाँ हैं तथा इनका मध्य बिन्दु O (माना), सरल आवर्त गति का केन्द्र है।



a. ∴ बिन्दु A पर कण का वेग शून्य होगा।

कण के त्वरण की दिशा बिन्दु A से साम्यावस्था O की ओर होगी; अतः त्वरण धनात्मक होगा।

कण पर बल, त्वरण की ही दिशा में होगा; अत: बल धनात्मक होगा।

b. बिन्दु B पर भी कण का वेग शून्य होगा।

कण का त्वरण B से साम्यावस्था O की ओर दिष्ट होगा; अतः त्वरण ऋणात्मक होगा।

बल भी ऋणात्मक होगा।

c. AB का मध्य बिन्दु 0 सरल आवर्त गति का केन्द्र है।

∴ कण B से A की ओर चलते हुए 0 से गुजरता है; अत: वेग BA के अनुदिश है, अर्थात् वेग ऋणात्मक है।

बिन्दु पर त्वरण तथा बल दोनों शून्य हैं।

d. B से 2cm दूरी पर कण B तथा 0 के बीच होगा।

∴ कण B से A की ओर जा रहा है; अतः वेग ऋणात्मक होगा।

यहाँ त्वरण भी B से O की ओर दिष्ट है; अतः त्वरण भी ऋणात्मक है।

'बल भी ऋणात्मक है।

e. ∴ कण-B की ओर जा रहा है; अतः वेग धनात्मक है।

∴ कण A व O के बीच है; अत: त्वरण A से O की ओर दिष्ट है; अत: त्वरण भी धनात्मक है।

बल भी धनात्मक है।

f. ∴ कण A की ओर जा रहा है; अत: वेग ऋणात्मक है।

कण B तथा O के बीच है तथा त्वरण B से O की ओर (अर्थात् B से A की ओर दिष्ट है; अतः त्वरण ऋणात्मक है। बल भी ऋणात्मक है।)

प्रश्न 6 नीचे दिए गए किसी कण के त्वरण a तथा विस्थापन x के बीच सम्बन्धों में से किससे सरल आवर्त गति सम्बद्ध है:

a. $a = 0.7x$

b. $a = -200x^2$

c. $a = -10$

d. $a = 100x^3$

उत्तर- उपर्युक्त में से केवल सम्बन्ध (c) में $a = -10x$ अर्थात् त्वरण विस्थापन के अनुक्रमानुपाती है तथा विस्थापन के विपरीत दिशा में है; अत: केवल यही सम्बन्ध सरल आवर्त गति को निरूपित करता है।

प्रश्न 7 सरल आवर्त गति करते किसी कण की गति का वर्णन नीचे दिए गए विस्थापन फलन द्वारा किया जाता है,

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

यदि कण की आरम्भिक ($t = 0$) स्थिति 1cm तथा उसका आरम्भिक वेग $\pi cm\ s^{-1}$ है, तो कण का आयाम तथा आरम्भिक कला कोण क्या है? कण की कोणीय आवृत्ति πs^{-1} है। यदि सरल आवर्त गति का वर्णन करने के लिए कोज्या (cos) फलन के स्थान पर हम ज्या (sin) फूलन चुनें; $x = B\sin(\omega t + \alpha)$, तो उपर्युक्त आरम्भिक प्रतिबन्धों में कण का आयाम तथा आरम्भिक कला कोण क्या होगा?

उत्तर-

दिया है: कोणीय आवृत्ति $\omega = r \text{ rad s}^{-1}, t = 0$ पर $x = 1\text{cm}$

तथा प्रारम्भिक वेग $u = \pi \text{cm s}^{-1}$

सरल आवर्त गति की समीकरण $x = A\cos(\omega t + \phi)$

$x = A\cos(\pi t + \phi)$

$t = 0$ तथा $x = 1$ रखने पर, $1 = A\cos\phi \ldots (1)$

समीकरण (1) से, वेग $u = \frac{dx}{dt} = -A\pi\sin(\pi t + \phi)$

$t = 0, u = \pi \text{cm s}^{-1}$ रखने पर,

$\pi = -A\pi\sin\phi$ या $1 = -A\sin\phi \ldots (2)$

समीकरण (1) व (2) के वर्गों का योग करने पर,

$1^2 + 1^2 = A^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{2}\text{cm}$

समीकरण (1) व (2) में A का मान रखने पर,

$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $\sin\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

अब $\cos\phi = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$ या $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ या $\phi = \frac{7\pi}{4}$

तथा $\sin\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ या $\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \phi = \frac{5\pi}{4}$ या $\frac{7\pi}{4}$

अतः उभयनिष्ठ मान $\phi = \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ आयाम $\mathrm{A} = \sqrt{2}\mathrm{cm}$

आरम्भिक कला कोण $\phi = \frac{7\pi}{4}$

यदि सरल आवर्त गति का समीकरण $\mathrm{x} = \mathrm{B}\sin(\omega\mathrm{t} + \phi)$ हो तो

$\omega = \pi \text{ rad s}^{-1}$ रखने पर, $\mathrm{x} = \mathrm{B}\sin(\pi\mathrm{t} + \phi)$

$\mathrm{t} = 0, \mathrm{x} = 1\mathrm{cm}$ रखने पर, $1 = \mathrm{B}\sin\phi \ldots (3)$

तथा वेग $\mathrm{u} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{B}\pi\cos(\pi\mathrm{t} + \phi)$

$\mathrm{u} = \pi \text{ rad s}^{-1}$ तथा $\mathrm{t} = 0$ रखने पर,

$$\pi = B\pi \cos\phi \text{ या } 1 = B\cos\phi \ldots (4)$$

समीकरण (3) व (4) के वर्गों का योग करने पर,

$$B^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow B = \sqrt{2}\text{cm}$$

यह मान समीकरण (3) व (4) में रखने पर,

$$\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ तथा } \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

उक्त दोनों को हल करने पर, $\phi = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ आयाम $B = \sqrt{2}\text{cm}$

आरम्भिक कला कोण $\phi = \frac{\pi}{4}$

प्रश्न 8 किसी कमानीदार तुलां का पैमानी 0 से 50kg तक अंकित है और पैमाने की लम्बाई 20cm है। इस तुला से लटकाया गया कोई पिण्ड, जब विस्थापित करके मुक्त किया जाता है, 0.6s के आवर्तकाल से दोलन करता है। पिण्ड का भार कितना है?

उत्तर-

$$\text{स्प्रिंग का बल नियतांक } k = \frac{\text{अधिकतम बल}}{\text{अधिकतम विस्तार}}$$

$$= \frac{50 \text{ किग्रा-भार}}{20 \text{ सेमी}} = \frac{50 \times 9.8 \text{ न्यूटन}}{0.20 \text{ मीटर}}$$

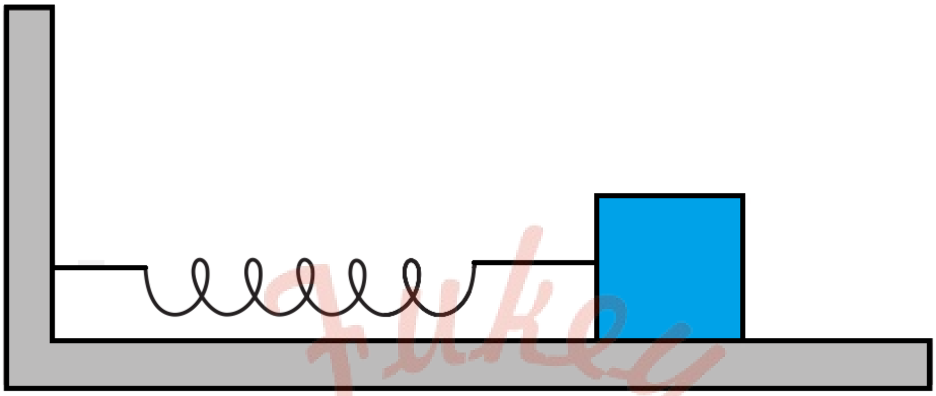
$$= 2450 \text{ न्यूटन मीटर}^{-1}$$

$$\because \text{ आवर्तकाल } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T^2 \frac{m}{k}$$

$$\text{अतः लटकाये गये पिण्ड का द्रव्यमान } m = \frac{T^2 \times k}{4\pi^2}$$

यहाँ $T = 0.6$ सेकण्ड

प्रश्न 9 1200N-m^{-1} कमानी-स्थिरांक की कोई कमानी चित्र में दर्शाए अनुसार किसी क्षैतिज मेज से जड़ी है। कमानी के मुक्त। सिरे से 3kg द्रव्यमान का कोई पिण्ड जुड़ा है। इस पिण्ड को एक ओर 2.0cm दूरी तक खींचकर मुक्त किया जाता है,



i. पिण्ड के दोलन की आवृत्ति।
ii. पिण्ड का अधिकतम त्वरण।
iii. पिण्ड की अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- यहाँ बल नियतांक k = 1200 न्यूटन-मीटर-1, m = 3 किग्रा;

कमानी का अधिकतम विस्तार अर्थात् आयाम a = 2.0 सेमी = 2 × 10^{-2} मीटर

i. पिण्ड के दोलन की आवृत्ति $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} = \frac{1}{2\times3.14}\sqrt{\left(\frac{1200}{3}\right)} \text{ सेकण्ड}^{-1} = \left(\frac{20}{2\times3.14}\right) = 3.2 \text{ सेकण्ड}^{-1}$$

ii. पिण्ड का अधिकतम त्वरण

$$\alpha_{max} = -\omega^2 \times a = -\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 \times a$$

$$= -\left(\frac{k\times a}{m}\right) = -\left[\frac{1200\times2\times10^{-2}}{3}\right] \text{ मी/ से}^2 = -8 \text{ मी/ से.}^{-2}$$

iii. पिण्ड की अधिकतम चाल $u_{max} = \omega \times a = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \times a$

$$= \left[\sqrt{\left(\frac{1200}{3}\right)} \times 2 \times 10^{-2}\right]$$ मी/ से = 0.40 मी/ से.$^{-1}$

प्रश्न 10 अभ्यास प्रश्न 9 में, मान लीजिए जब कमानी अतानित अवस्था में है तब पिण्ड की स्थिति x = 0 है तथा बाएँ से दाएँ की दिशा x-अक्ष की धनात्मक दिशा है। दोलन करते पिण्ड के विस्थापन x को समय के फलन के रूप में दर्शाइए, जबकि विराम घड़ी को आरम्भ (t = 0) करते समय पिण्ड,

a. अपनी माध्य स्थिति।
b. अधिकतम तानित स्थिति।
c. अधिकतम सम्पीडन की स्थिति पर है।

सरल आवर्त गति के लिए ये फलन एक-दूसरे से आवृत्ति में, आयाम में अथवा आरम्भिक कला में किस रूप में भिन्न है?

उत्तर-

उपर्युक्त प्रश्न में आयाम a = 0.20 मीटर = 2 सेमी।

कोणीय आवृत्ति $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1200}{3}} = 20$ रे/ से

a. सरल आवर्त गति के समीकरण $x = a\sin(\omega t + \phi)$

यहाँ $t = 0, x = 0$

अतः समीकरण (1) से $0 = a\sin\phi \Rightarrow \phi = 0$

$\therefore$ समीकरण $x = 2.0\sin 20t$ (सेमी में)

b. t = 0 पर अधिकतम तानित स्थिति में $x + a$

समीकरण (1) से $a = a\sin(\phi) \Rightarrow \sin\phi = 1$ या $\phi = \frac{\pi}{2}$

अतः समीकरण $x = a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ या $x = a\cos\omega t$

अर्थात् $x = 2.0\cos(20t)$ (सेमी में)

c. t = 0 पर अधिकतम सम्पीडन की स्थिति में $x = -a$

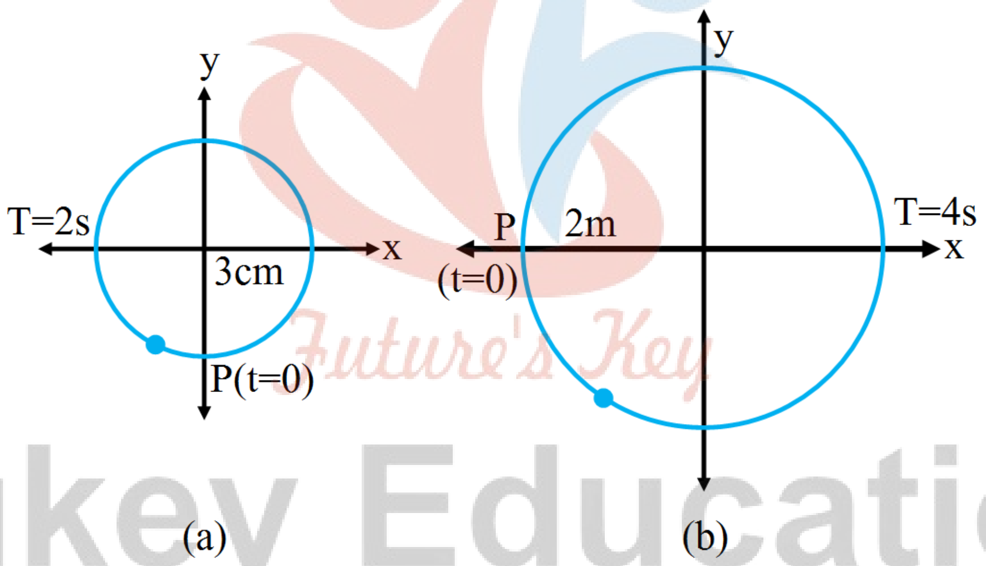
$\therefore$ समीकरण (1) से, $-a = a \sin \phi$

$\Rightarrow \sin \phi = -1$ या $\phi = \frac{3\pi}{2}$

अतः समीकरण $x = a \sin \left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = -a \cos \omega t$

अर्थात् $x = -2.0 \cos 20t$

प्रश्न 11 चित्र में दिए गए दो आरेख दो वर्तुल गतियों के तद्रूपी हैं। प्रत्येक आरेख पर वृत्त की त्रिज्या परिक्रमण-काल, आरम्भिक स्थिति और परिक्रमण की दिशा दर्शाई गई है। प्रत्येक प्रकरण में, परिक्रमण करते कण के त्रिज्य-सदिश के x-अक्ष पर प्रक्षेप की तदनुरूपी सरल आवर्त गति ज्ञात कीजिए।



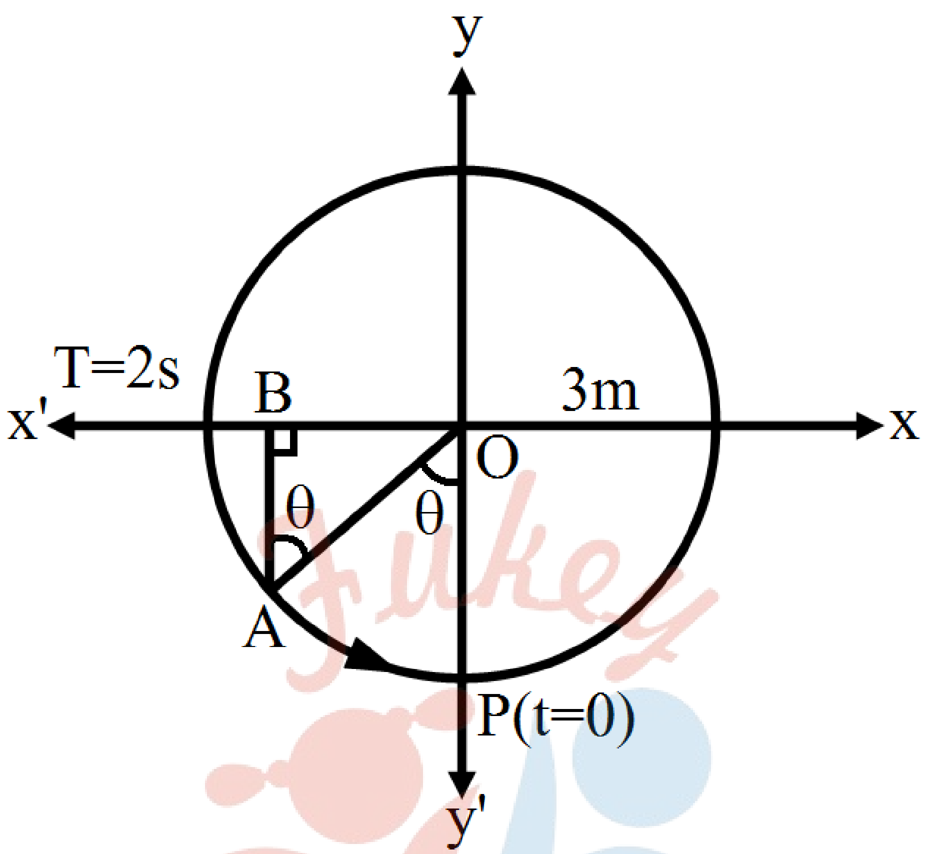
उत्तर- (a) माना वृत्त पर गति करता हुआ कण किसी समय । पर P से स्थिति A में पहुँच जाता है।

माना $\angle POA = \theta$

AB, बिन्दु A से x-अक्ष पर लम्ब है।

तब $\angle BAO = \theta$

आवर्तकाल T = 2s



$\therefore$ कोणीय वेग $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad s}^{-1}$

$\therefore \theta = \omega t = \pi t$

$\triangle OAB$ में, $\sin\theta = \frac{OB}{OA} = \frac{-x}{3}$ [$\because$ मुलबिन्दु के बाईं ओर x, -ve है।]

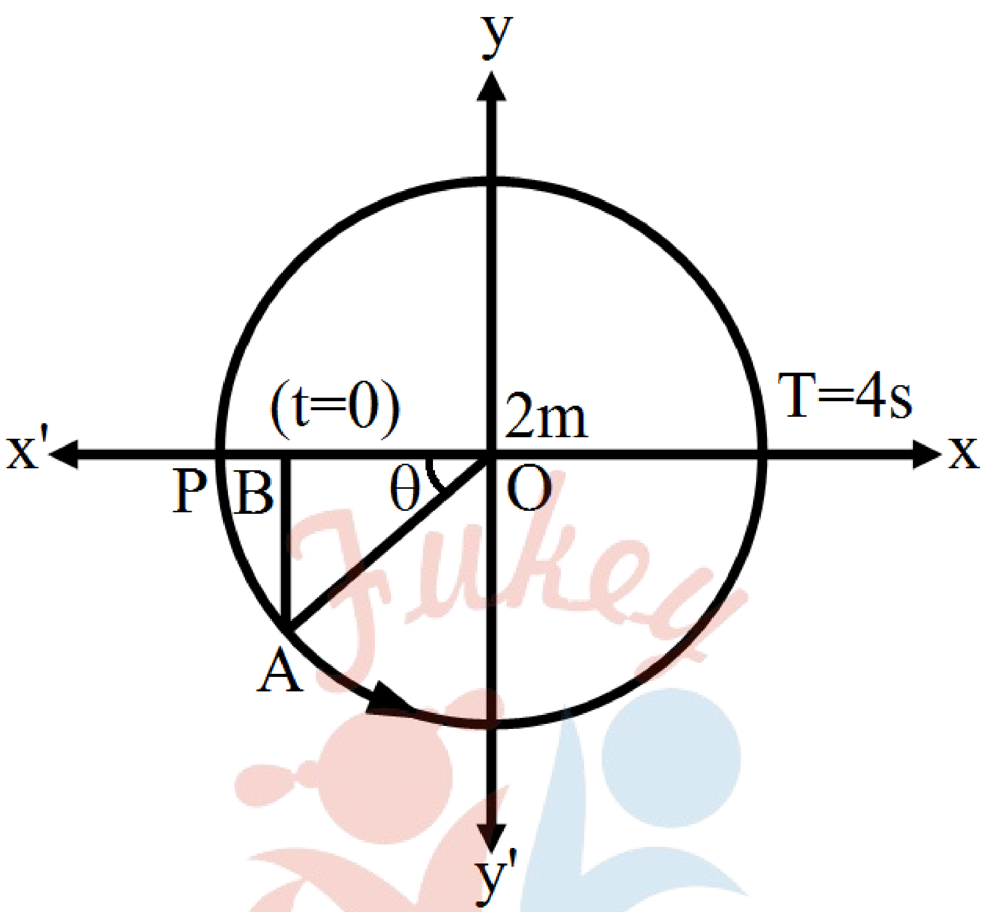
$\therefore x = -3\sin\theta$ या $x = -3\sin\pi t$ यहाँ x, cm में है।

यही सरल आवर्त गति का अभीष्ट समीकरण है।

$\because$ आवर्तकाल $T = 4s$

$\therefore$ कोणीय वेग $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4s} \text{rad s}^{-1}$

माना वर्तुल गति करता हुआ कण t समय में बिन्दु P से चलकर A तक पहुँच जाता है।



AB, बिन्दु A से x-अक्ष पर लम्ब है।

माना $\angle BOA = \theta$ तब $\theta = \omega t = \frac{\pi t}{2}$

$\triangle OAB$ में, $\cos\theta = \frac{OB}{OA} = -\frac{x}{2}$

$\therefore x = -2\cos\theta$

या $x = -2\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$

जहाँ x मीटर में है।

यही सरल आवर्त गति का अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 12 नीचे दी गई प्रत्येक सरल आवर्त गति के लिए तदनुरूपी निर्देश वृत्त का आरेख खींचिएं। घूर्णी कण की आरम्भिक (t = 0) स्थिति, वृत्त की त्रिज्या तथा कोणीय चाल दर्शाइए। सुगमता के लिए प्रत्येक प्रकरण में परिक्रमण की दिशा वामावर्त लीजिए। (x को cm में तथा t को s में लीजिए।)।

a. $x = -2\sin\left(\frac{3t+\pi}{3}\right)$

b. $x = \cos\left(\frac{\pi}{6-t}\right)$

c. $x = 3\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

d. $x = 2\cos\pi t$

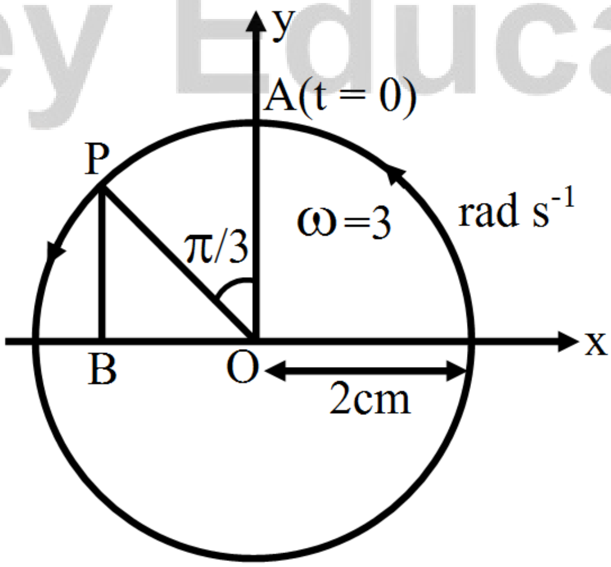
उत्तर-

a. दिया है: सरल आवर्त गति का समीकरण $x = -2\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$

यह गति समय का ज्या (sine) फलन है;

अतः कोणीय विस्थापन, y-अक्ष से नापा जाएगा।

दिए गए समीकरण में t = 0 रखने पर,



$$x = -2\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}\text{cm}$$

अत: कण की प्रारम्भिक स्थिति $\theta = \frac{\pi}{3}, x = -\sqrt{3}\text{cm}$ है।

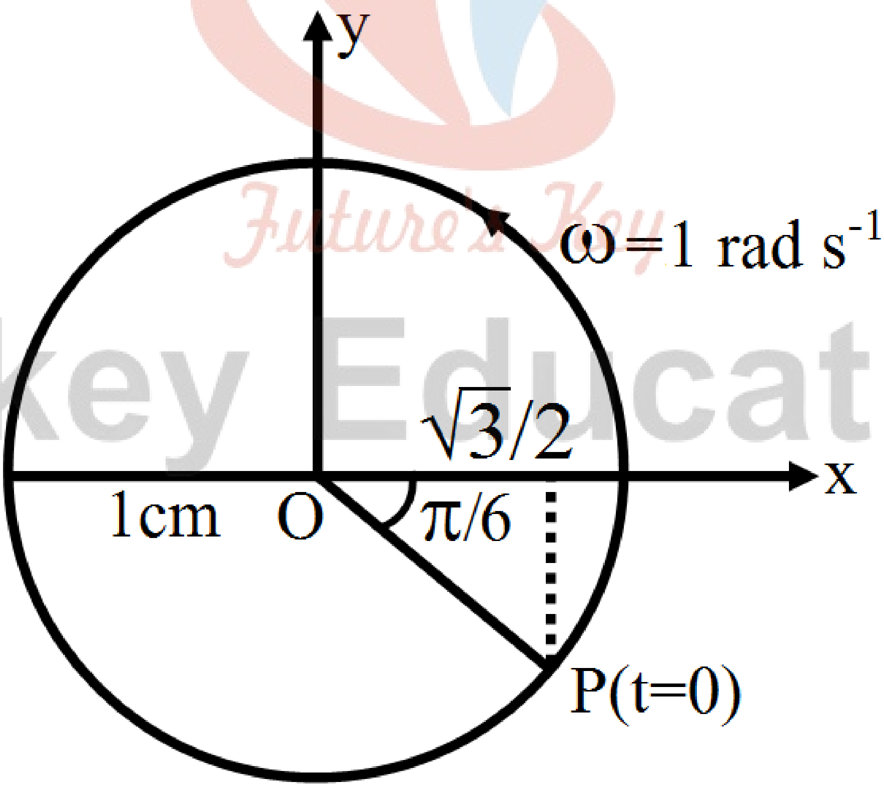
जबकि गति का आयाम A = 2cm

अत: निर्देश वृत्त 2cm त्रिज्या का वृत्त होगा।

x-अक्ष पर बिन्दु $x = -\sqrt{3}\text{cm}$ चिन्हित किया और इस बिन्दु से x-अक्ष पर लम्ब रेखा BP खींची जो वृत्त को बिन्दु P पर काटती है। बिन्दु P कण की प्रारम्भिक स्थिति को व्यक्त करता है।

समीकरण $x = -2\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$ की तुलना $x = A\sin(\omega t + \phi)$ से करने पर,

$\omega t = 3t \therefore \omega = 3\text{ rad s}^{-1}$



b.

दिया गया समीकरण $x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - t\right)$

या $x = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$

यहाँ x, समय t का कोज्या फलन है; अत: कोणीय विस्थापन x-अक्ष से नापा जाएगा।

गति का आयाम A =1cm; अत: निर्देश वृत्त 1cm त्रिज्या का वृत्त होगा।

t = 0 रखने पर, $x = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$

x-अक्ष पर $x = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$ बिन्दु चिन्हित करके इस बिन्दु से x-अक्ष पर लम्ब रेखा खींची जो वृत्त को x-अक्ष के नीचे की ओर बिन्दु P पर काटती है। बिन्दु P कण की प्रारम्भिक स्थिति होगी।

यहाँ $\omega t = t \Rightarrow \omega = 1\text{rad s}^{-1}$

c. दिया गया समीकरण $x = 3sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

यहाँ x, समय t का ज्या फलन है; अतः कोणीय विस्थापन y-अक्ष से नापा जाएगा।

गति का आयाम A = 3cm

अतः निर्देश वृत्त 3cm त्रिज्या का वृत्त होगा।

समीकरण में t = 0 रखने पर,

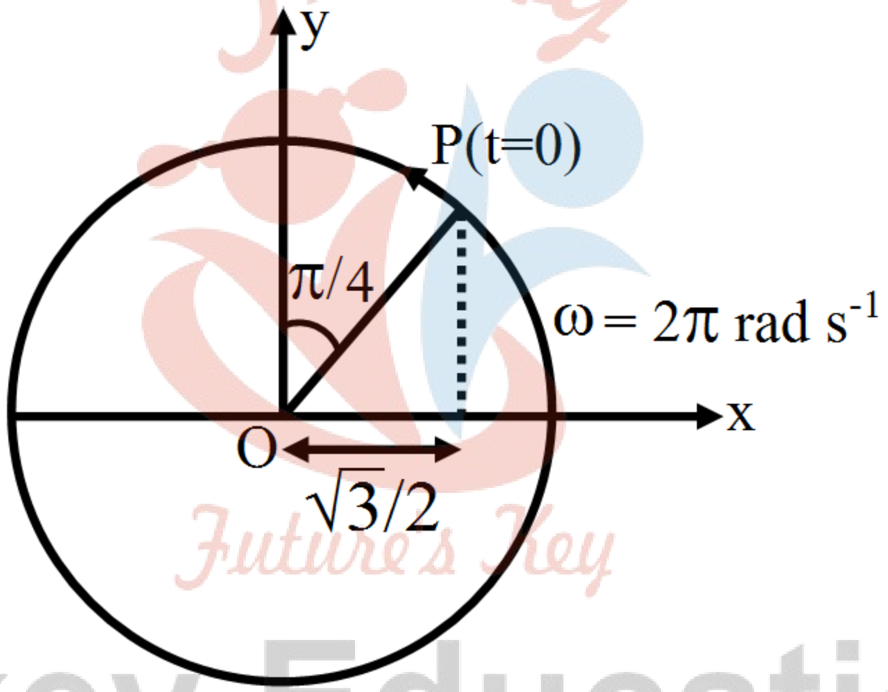
$$x = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\text{cm}$$

अत: कण की प्रारम्भिक स्थिति $\theta = \frac{\pi}{4}$

तथा $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ cm है।

मूलबिन्दु O से प्रथम चतुर्थांश में, y-अक्ष से $\frac{\pi}{4}$ कोण बनाने वाली रेखा खींची जो वृत्त को बिन्दु P पर काटती है। बिन्दु P कण की प्रारम्भिक स्थिति है।

$\because \omega t = 2\pi t \therefore \omega = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$



d. दिया गया समीकरण $x = 2\cos \pi t$

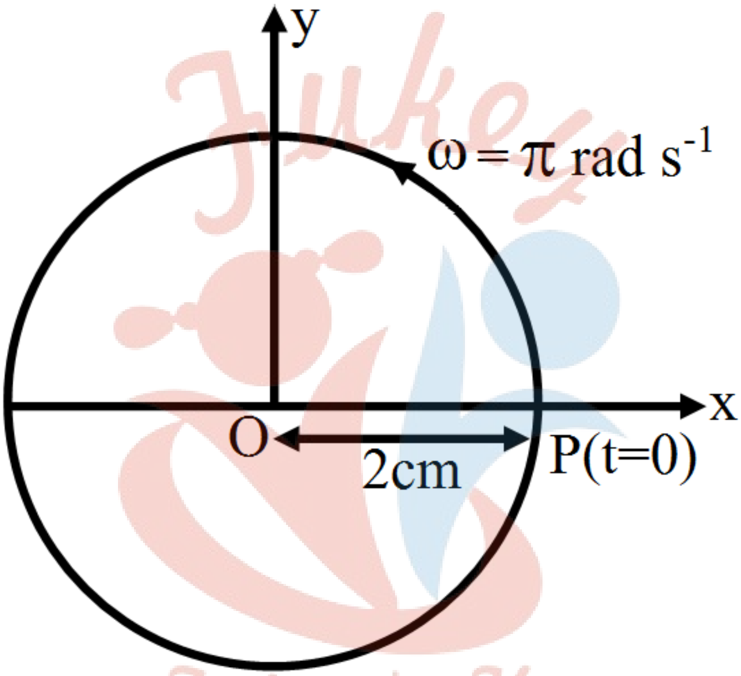
यदि इस समीकरण की तुलना मानक SHM समीकरण $x = A\cos\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)t + \phi\right)$, से की जाती है, तो हम प्राप्त करते हैं:

आयाम, $A = 2\text{cm}$

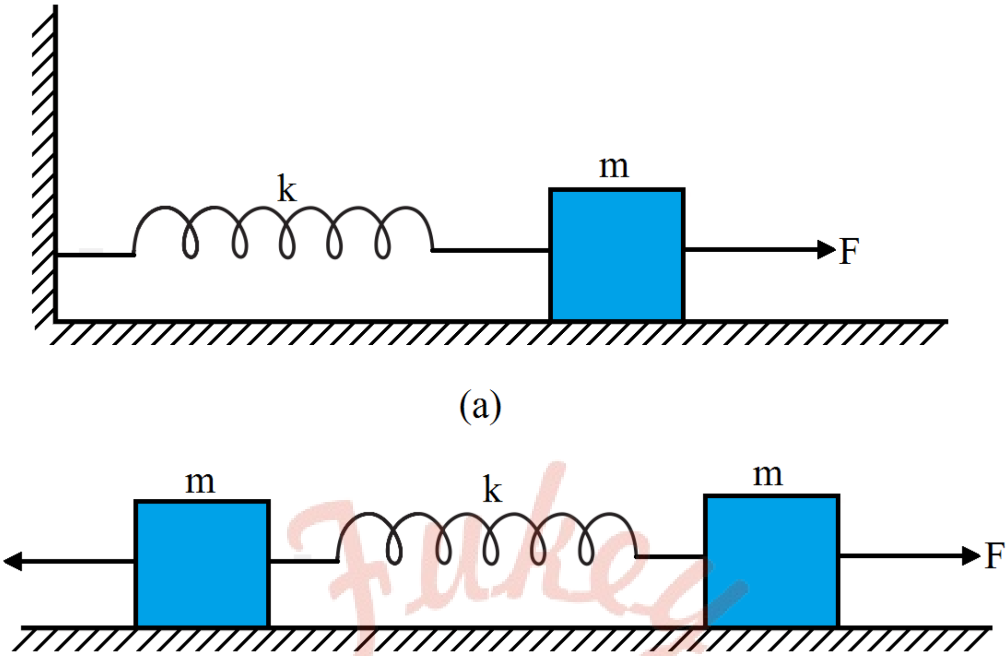
कण की स्थिति, $\phi = 0$

कोणीय वेग, $\omega = \frac{\pi \text{ rad}}{\text{s}}$

कण की गति को नीचे दिए गए चित्र में दिखाया गया है।



प्रश्न 13 चित्र (a) में k बल-स्थिरांक की किसी कमानी के एक सिरे को किसी दृढ आधार से जकड़ा तथा दूसरे मुक्त सिरे से एक द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के मुक्त सिरे पर बल F आरोपित करने से कमानी तन जाती है (b) में उसी कमानी के दोनों मुक्त सिरों से द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के दोनों सिरों को चित्र में समान बल F द्वारा तानित किया गया है।



(a) (b)

a. दोनों प्रकरणों में कमानी का अधिकतम विस्तार क्या है?

b. यदि (a) का द्रव्यमान तथा (b) के दोनों द्रव्यमानों को मुक्त छोड़ दिया जाए, तो प्रत्येक प्रकरण में दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

i. माना कमानी का अधिकतम विस्तार x_{max} है,

तब चित्र (a) में, $F = kx_{max}$

अधिकतम विस्तार $x_{max} = \frac{F}{k}$

(b) में-चूँकि इस बार कमानी किसी स्थिर वस्तु से सम्बद्ध नहीं है; अतः दूसरे पिण्ड पर लगे बल का कार्य केवल कमानी को स्थिर रखना है।

अतः विस्तार अभी भी केवल एक ही बल के कारण होगा।

$\therefore F = kx_{max}$ से,

अधिकतम विस्थापन $x_{max} = \frac{F}{k}$

ii. चित्र (a) में माना कि पिण्ड को खींचकर छोड़ने पर, वापसी की गति करता पिण्ड किसी क्षण साम्यावस्था से x दूरी पर है तब कमानी में प्रत्यानयन बल F = -kx होगा।

यदि पिण्ड का त्वरण 'a है तो F = ma

$$\therefore ma = -kx \Rightarrow a = -\left(\frac{k}{m}\right)x \ \ldots (1)$$

इस समीकरण से, $\frac{x}{a} = \frac{m}{k}$

∴ पिण्ड के दोलनों का आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{a}}$

चित्र (b) में-इस दशा में, निकाय का द्रव्यमान केन्द्र अर्थात् कमानी का मध्य बिन्दु स्थिर रहेगा और दोनों पिण्ड दोलन करेंगे।

इस अवस्था में हम मान सकते हैं कि प्रत्येक पिण्ड मूल कमानी की आधी लम्बाई से जुड़ा है तथा ऐसे प्रत्येक भाग का कमानी स्थिरांक 2k होगा। यदि किसी क्षण, कोई पिण्ड साम्यावस्था से x दूरी पर है तो कमानी के संगत भाग में प्रत्यानयन बल F = -2kx होगा। यदि पिण्ड का त्वरण a है तो ma = F ⇒ ma = -2kx या

या $a = -\left(\frac{2k}{m}\right)x$

∴ पिण्ड की गति, सरल आवर्त गति है।

यहाँ $\frac{x}{a} = \frac{m}{2k}$

∴ आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{a}}$ या $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

प्रश्न 14 किसी रेलगाड़ी के इंजन के सिलिण्डर हैड में पिस्टन का स्ट्रोक (आयाम को दोगुना) 1.0m का है। यदि पिस्टन 200 rad/ min की कोणीय आवृत्ति से सरल आवर्त गति करता है तो उसकी अधिकतम चाल कितनी है?

उत्तर- पिस्टन का आयाम

$$a = \frac{\text{स्ट्रोक}}{2}$$

$= \frac{1.0}{2} = 0.5$ मीटर तथा

इसकी कोणीय आवृत्ति $\omega = 200$ रेडियन/ मिनट $= \frac{200}{60}$ रेडियन/ सेकेण्ड $= \frac{10}{3}$ रेडियन/ सेकेण्ड

पिस्टन की अधिकतम चाल $u_{max} = a\omega = 0.5 \times \left(\frac{10}{3}\right)$

= 1.67 मी/से$^{-1}$

प्रश्न 15 चन्द्रमा के पृष्ठ पर गुरुत्वीय त्वरण 1.7ms^{-2} है। यदि किसी सरल लोलक का पृथ्वी के पृष्ठ पर आवर्तकाल 3.5s है तो उसका चन्द्रमा के पृष्ठ पर आवर्तकाल कितना होगा? (पृथ्वी के पृष्ठ पर g = 9.8ms^{-2})

उत्तर- सरल लोलक का आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ लोलक विशेष के लिए नियत; अत: $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$ इसलिए यदि पृथ्वी एवं चन्द्रमा पर गुरुत्वीय त्वरण क्रमश: ge व gm एवं आवर्तकाल क्रमश: Te व Tm हो

$$\frac{T_m}{T_e} = \sqrt{\left(\frac{g_e}{g_m}\right)} \text{ अथवा } T_m = \left[\sqrt{\left(\frac{g_e}{g_m}\right)}\right] \times T_e$$

परन्तु यहाँ g_e = 9.8 मी-से$^{-2}$,

g_m = 1.7 मी-से$^{-2}$ तथा T_e = 3.5 सेकण्ड

$$\therefore T_m = \sqrt{\left(\frac{9.8m/\sec^{-2}}{1.7m/\sec^{-2}}\right)} \times 3.5 \sec = 8.4 \sec$$

प्रश्न 16 नीचे दिए गए प्रश्न का उत्तर दीजिए:

a. किसी कण की सरल आवर्त गति के आवर्तकाल का मान उस कण के द्रव्यमान तथा बल-स्थिरांक पर निर्भर करता है $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ । कोई सरल लोलक सन्निकट सरल आवर्त गति करता है। तब फिर किसी लोलक का आवर्तकाल लोलक के द्रव्यमान पर निर्भर क्यों नहीं करता?

b. किसी सरल लोलक की गति छोटे कोण के सभी दोलनों के लिए सन्निकट सरल आवर्त गति होती है। बड़े कोणों के दोलनों के लिए एक अधिक गूढ विश्लेषण यह दर्शाता है कि T का मान $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ से अधिक होता है। इस परिणाम को समझने के लिए किसी गुणात्मक कारण का चिन्तन कीजिए।

c. कोई व्यक्ति कलाई घड़ी बाँधे किसी मीनार की चोटी से गिरता है। क्या मुक्त रूप से गिरते समय उसकी घड़ी यथार्थ समय बताती है?

d. गुरुत्व बल के अन्तर्गत मुक्त रूप से गिरते किसी केबिन में लगे सरल लोलक के दोलन की आवृत्ति क्या होती है?

उत्तर-

a. जब दोलन स्प्रिंग के द्वारा होते हैं तो बल नियंताक k का मान केवल स्प्रिंग पर निर्भर करता है। न कि गतिमान कण के द्रव्यमान पर। इसके विपरीत सरल लोलक के लिए बल नियतांक

$$\left(F = -\frac{mgx}{l} = -kx \Rightarrow k = \frac{mg}{l}\right)$$

कण के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होता है; अत: $\frac{m}{k}$ का मान नियत बना रहता है।

इसलिए आवर्तकाल m पर निर्भर नहीं करता।

b.

सरल लोलक के लिए प्रत्यानयन बल $F = -mg\sin\theta$

यदि θ छोटा है तो $\sin\theta \approx \theta = \frac{x}{l}$

तब $F = -\left(\frac{mg}{l}\right)x \Rightarrow F \propto (-x)$

अर्थात् यह गति सरल आवर्त होगी तथा आवर्तकाल $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

यदि θ छोटा नहीं है तो हम $\sin\theta \approx \theta$ नहीं ले सकेंगे तब गति सरल आवर्त नहीं रहेगी;

अतः आवर्तकाल $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ से बड़ा होगा।

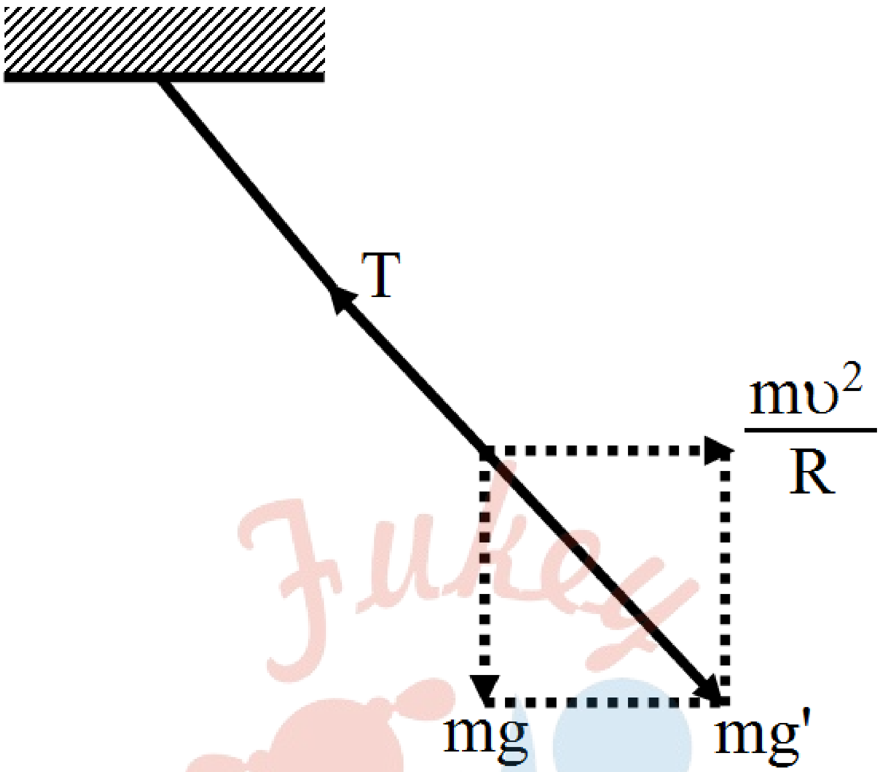
c. हाँ, क्योंकि कलाई घड़ी का आवर्तकाल गुरुत्वीय त्वरण के मान में परिवर्तन से प्रभावित नहीं होता।

d. मुक्त रूप से गिरते केबिन में गुरुत्वीय त्वरण का प्रभावी मान g' = 0 होगा।

$\therefore$ लोलक का आवर्तकाल $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ अनन्त हो जाएगा तथा आवृत्ति शून्य हो जाएगी।

प्रश्न 17 किसी कार की छत से l लम्बाई का कोई सरल लोलक, जिसके लोलक का द्रव्यमान M है, लटकाया गया है। कार R त्रिज्या की वृत्तीय पथ पर एकसमान चाल u से गतिमान है। यदि लोलक त्रिज्य दिशा में अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर छोटे दोलन करता है तो इसका आवर्तकाल क्या होगा?

उत्तर-



कार जब मोड़ पर मुड़ती है तो उसकी गति में त्वरण, $\frac{v^2}{R}$ (अभिकेन्द्र त्वरण) होता है।

इस प्रकार कार एक अजड़त्वीय निर्देश तन्त्र है। इसलिए गोलक पर एक छद्म बल $\frac{m^2}{R}$ वृत्तीय पथ के बाहर की ओर लगेगा जिसके कारण लोलक ऊर्ध्वाधर रहने के स्थान पर थोड़ा तिरछा हो जाएगा।

इस समय गोलक पर दो बले क्रमशः भार mg तथा अपकेन्द्र बल $\frac{mv^2}{R}$ लगेंगे।

यदि गोलक के लिए g का प्रभावी मान g' है तो गोलक पर प्रभावी बल mg' होगा जो कि उक्त दो बलों का परिणामी है।

$$\therefore mg = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2} \left[\because mg \perp \frac{mv^2}{R}\right]$$

अतः $g' = \sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}$

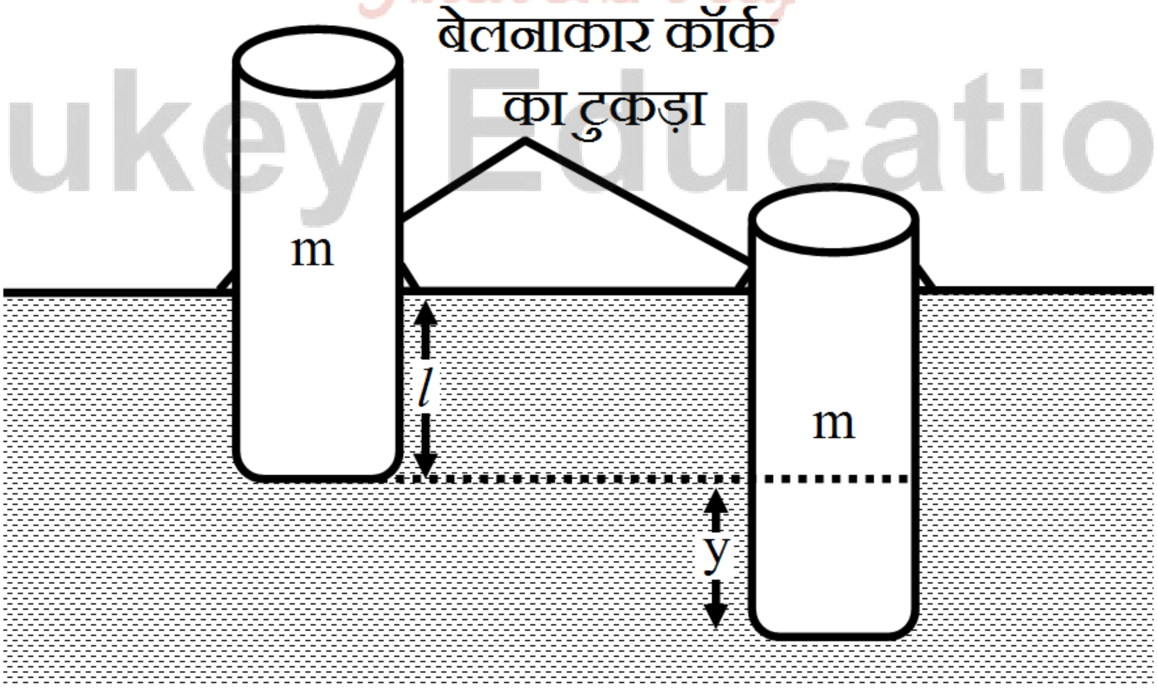
$\therefore$ लोलक का नया आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\left[g^2+\frac{v^4}{R^2}\right]^{\frac{1}{2}}}}$

प्रश्न 18 आधार क्षेत्रफल A तथा ऊँचाई h के एक कॉर्क का बेलनाकार टुकड़ा ρl घनत्व के किसी द्रव में तैर रहा है। कॉर्क को थोड़ा नीचे दबाकर स्वतन्त्र छोड़ देते हैं, यह दर्शाइए कि कॉर्क ऊपर-नीचे सरल आवर्त दोलन करता है जिसका आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\rho_{(1g)}}}$ है।

यहाँ ρ कॉर्क का घनत्व है (द्रव की श्यानता के कारण अवमन्दन को नगण्य मानिए।)

उत्तर- द्रव में तैरते बेलनाकार बर्तन के दोलन माना कॉर्क के टुकड़े का द्रव्यमान m है। माना साम्यावस्था में इसकी l लम्बाई द्रव में डूबी है।

तैरने के सिद्धान्त से, कॉर्क के डूबे भाग द्वारा हटाए गए द्रव का भार कॉर्क के भार के बराबर होगा,



$V\rho l g = mg$

[∵ द्रव्यमान = आयतन × घनत्व]

जहाँ V कॉर्क के दुबे भाग द्वारा हटाए गए द्रव का आयतन है।

यदि कॉर्क का अनुप्रस्थ क्षेत्रफल A है तो V = A × l ...(1)

∴ $(Al)\rho_1 g = mg$ अथवा $A\rho_1 l = m$

जब कॉर्क को द्रव में नीचे की ओर दबाकर छोड़ा जाता है तो यह ऊपर-नीचे दोलन करने लगता है। माना किसी क्षण इसका साम्यावस्था से नीचे की ओर विस्थापन y है। इस स्थिति में, इसकी y लम्बाई द्वारा विस्थापित द्रव का उत्क्षेप बेलनाकार बर्तन को प्रत्यानयन बल (F) प्रदान करेगा।

अतः $F = -Ay\rho_1 g$

यहाँ पर ऋण चिह्न यह प्रदर्शित करता है कि प्रत्यानयन बल F, कॉर्क के टुकड़े के विस्थापन के विपरीत दिशा में लग रहा है; अतः टुकड़े का त्वरण

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-(Ay)\rho_1 g}{m} \ldots (2)$$

∵ कॉर्क के टुकड़े का घनत्व ρ व ऊंचाई h है,

अतः $m = Ah\rho$

∴ त्वरण $a = -\frac{Ay\rho_1 g}{Ah\rho} = -\left(\frac{\rho_1 g}{h\rho}\right)y \ldots (3)$

∵ $\frac{\rho_{1g}}{h\rho}$ एक नियतांक है, अतः त्वरण $\propto (-y)$

इस प्रकार कॉर्क के टुकड़े का त्वरण a, विस्थापन y के अनुक्रमानुपाती है तथा इसकी दिशा विस्थापन y के विपरीत है, अतः कॉर्क के टुकड़े की गति सरल आवर्त गति है।

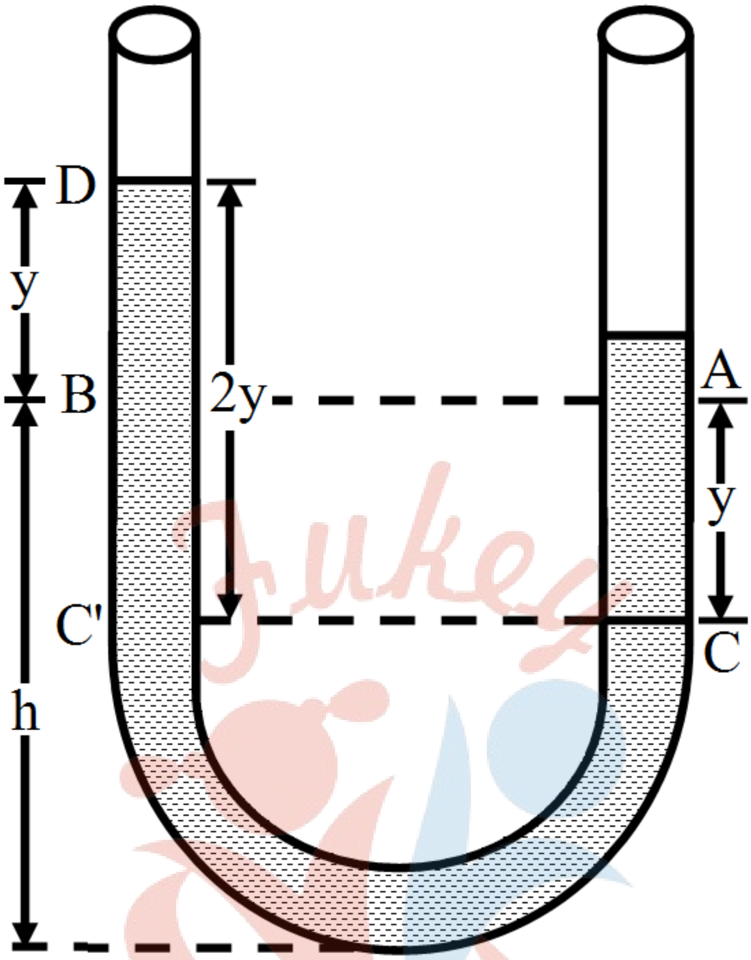
समीकरण (3) से, $\frac{\text{विस्थापन (y)}}{\text{त्वरण } (a)} = \frac{h\rho}{\rho lg}$

अतः कॉर्क का आवर्तकाल (T) $= 2\pi\sqrt{\frac{\text{विस्थापन (y)}}{\text{त्वरण } (a)}} = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\rho lg}}$

तथा कॉर्क की आवृत्ति (v) $= \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h\rho}{\rho lg}}$

प्रश्न 19 पारे से भरी किसी U नली का एक सिरा किसी चूषण पम्प से जुड़ा है तथा दूसरा सिरा वायुमण्डल में खुला छोड़ दिया गया है। दोनों स्तम्भों में कुछ दाबान्तर बनाए रखा जाता है। यह दर्शाइए कि जब चूषण पम्प को हटा देते हैं, तब U नली में पारे का स्तम्भ सरल आवर्त गति करता है।

उत्तर-



सामान्यत: U नली में द्रव (पारा) भरने पर उसके दोनों स्तम्भों व में पारे का तल समान होगा। परन्तु चूषण पम्प द्वारा दाबान्तर बनाये रखने की स्थिति में यदि स्तम्भ में पारे का तल सामान्य स्थिति से y दूरी नीचे है । तो दूसरे स्तम्भ में यह सामान्य स्थिति से y दूरी ऊपर होगा। अत: दोनों स्तम्भ में पारे के तलों का अन्तर = 2y, चूषण पम्प हटा लेने पर U नली के दायें स्तम्भ में पारे पर नीचे की ओर कार्य करने वाला बल = 2y ऊँचाई के पारा स्तम्भ का भार = $2y\rho ga$.

जहाँ a = U नली स्तम्भों की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल

ρ = पारे का घनत्व; g = गुरुत्वीय त्वरण

अत: बायीं भुजा में पारा ऊपर की ओर चढ़ेगा तथा इस पर कार्य करने वाला प्रत्यानयन बल (जिसके अन्तर्गत यह गति करेगा)

F = –2yρga, दोनों स्तम्भों में पारे के स्तम्भ की ऊँचाई समान होने की स्थिति में यदि ऊँचाई h हो तो U नली में भरे पारे के स्तम्भ की कुल लम्बाई = 2h अतः पारे का कुल द्रव्यमान m = 2h × ρ × a

∴ पारे की गति का त्वरण $a = \left(\frac{F}{M}\right) = \frac{-2y\rho ga}{2h\rho a} = \left(\frac{g}{h}\right) . y \ldots (1)$

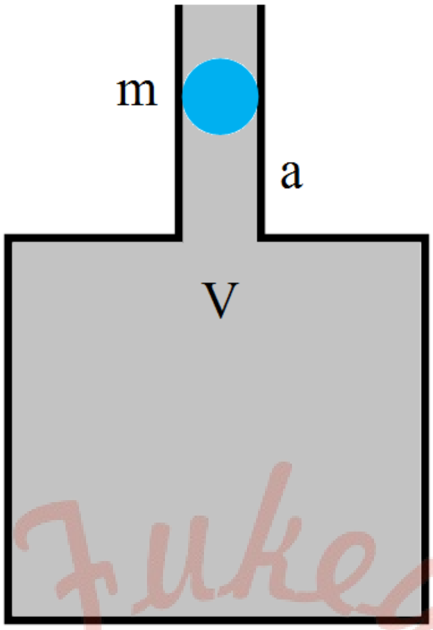
∵ $\left(\frac{g}{h}\right)$ = नियतांक $\Rightarrow a \propto -y$

यह पारे के स्तम्भ की सरल आवर्त होगी, जिसका आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{y}{a}}$; परन्तु

समीकरण (1) से $\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{h}{g} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{h}{g}\right)}$

अतिरिक्त अभ्यास (पृष्ठ संख्या 379-380)

प्रश्न 20 चित्र में दर्शाए अनुसार V आयतन के किसी वायु कक्ष की ग्रीवा (गर्दन) की अनुप्रस्थ कोर्ट का क्षेत्रफल a है। इस ग्रीवा में m द्रव्यमान की कोई गोली बिना किसी घर्षण के ऊपर-नीचे गति कर सकती है। यह दर्शाइए कि जब गोली को थोड़ा नीचे दबाकर मुक्त छोड़ देते हैं तो वह सरल आवर्त गति करती है। दाब-आयतन विचरण को समतापी मानकर दोलनों के आवर्तकाल का व्यंजक ज्ञात कीजिए।



उत्तर- माना साम्यावस्था में जब गैस का आयतन V है तो इसका दाब P है। साम्यावस्था से गेंद को अल्पविस्थापन x देने पर माना गैस का दाब बढ़कर (P + ΔP) तथा आयतन घटकर V – ΔV रह जाता है। समतापीय परिवर्तन के लिए बॉयल के नियम से

$P \times V = (P + \Delta P)(V - \Delta V)$

अथवा $PV = PV - P.\Delta V + \Delta P.V - \Delta P.\Delta V$

चूँकि ΔP व ΔV अल्प राशियाँ हैं, अतः $\Delta P, \Delta V$ को नगण्य मानते हुए $0 = -P\Delta V + \Delta P.V$

अथवा $\Delta P = P\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$

परन्तु $\Delta V =$ अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल × विस्थापन = a × x

$\therefore \Delta P = \frac{P.a \times x}{V}$

अतः गेंद का प्रत्यानयन बल $F = -\Delta P \times d$

$\therefore F = -\left(\frac{P \times a \times x}{V}\right) \times a = -\left(\frac{P \times x \times a^2}{V}\right) = -\left(\frac{Pa^2}{V}\right).x$

अतः गेंद का त्वरण $a = \left(\frac{F}{m}\right) = -\left(\frac{Pa^2}{Vm}\right)x \ldots (1)$

जहाँ $\left(\frac{Pa^2}{Vm}\right) =$ नियतांक

$\because a \propto -x$ अतः गति सरल आवर्त गति है।

अतः आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{विस्थापन }(y)}{\text{त्वरण }(a)}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)}$

परन्तु समीकरण (1) से, $\left|\frac{x}{a}\right| = \left(\frac{mV}{Pa^2}\right)$

$$T = 2\pi\sqrt{\left(\frac{mV}{Pa^2}\right)} \text{ या } T = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\left(\frac{mV}{P}\right)}$$

प्रश्न 21 आप किसी 3000kg द्रव्यमान के स्वचालित वाहन पर सवार हैं। यह मानिए कि आप इस वाहन की निलम्बन प्रणाली के दोलनी अभिलक्षणों का परीक्षण कर रहे हैं। जब समस्त वाहन इस पर रखा जाता है, तब निलम्बन 15cm आनमित होता है। साथ ही, एक पूर्ण दोलन की अवधि में दोलन के आयाम में 50% घटोतरी हो जाती है, निम्नलिखित के मानों को आकलन कीजिए:

कमानी स्थिरांक।

कमानी तथा एक पहिए के प्रघात अवशोषक तन्त्र के लिए अवमन्दन स्थिरांक b यह मानिए कि प्रत्येक पहिया 750kg द्रव्यमान वहन करता है।

उत्तर-

a. दिया है: वाहन का द्रव्यमान, M = 3000kg, निलम्बन का झुकाव x = 15cm

वाहन में चार कमानियाँ होती हैं; अतः प्रत्येक कमानी पर कुल भार को एक-चौथाई भार पड़ेगा।

अतः एक कमानी हेतु $F = \frac{1}{4}$

F = kx से,

कमानी स्थिरांक $k = \frac{F}{x} = \frac{\frac{1}{4}Mg}{x} = \frac{1}{4} \times \frac{3000 \times 9.8}{0.15} = 5 \times 10^4 Nm^{-1}$

b. माना प्रारम्भ में दोलनों का आयाम A0 है, तब t समय बाद अवमन्दन के कारण नया आयाम $A_t = A_{0e}^{-\frac{bt}{2m}}$ होगा।

प्रश्नानुसार एक दोलन में, $t = T$

तथा $A_t = \frac{A_0}{2}$

$\therefore \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\frac{bT}{2m}}$

या $e^{\frac{bT}{2m}} = 2$

दोनों ओर का log लेने पर, $\frac{bt}{2m} = \log_e 2$

या $b = \frac{2m}{T}\log_e 2 \ldots (1)$

परन्तु एक कमानी हेतु $m = \frac{M}{4} = 750\mathrm{kg}$

तथा $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{750}{5\times10^4}} = 0.77\mathrm{s}$ तथा $\log_e 2 = 0.6931$

अतः समीकरण (1) से, अवमन्दन स्थिरांक $b = \frac{2\times750\times0.6931}{0.77}$

$= 1350.0\mathrm{kg\ s}^{-1}$

प्रश्न 22 यह दर्शाइए कि रैखिक सरल आवर्त गति करते किसी कण के लिए दोलन की किसी अवधि की औसत गतिज ऊर्जा उसी अवधि की औसत स्थितिज ऊर्जा के समान होती है।

उत्तर- माना m द्रव्यमान का कोई कण ω कोणीय आवृत्ति से सरल आवर्त गति कर रहा है जिसका आयाम a है।

माना गति अधिकतम विस्थापन की स्थिति से प्रारम्भ होती है तब t समय में कण का विस्थापन

$x = a\cos\omega t \ldots(1)$

इस क्षण कण की गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - x^2)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2[a^2 - a^2\cos^2\omega t]\ [\because x = a\cos\omega t]$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 a^2(1 - \cos^2\omega t)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\sin^2\omega t$$

तथा इस क्षण कण की स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2\cos^2\omega t)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\cos^2\omega t$$

पुरे एक आवर्तकाल के लिए गतिज ऊर्जा का समय औसत

$$\overline{K} = \frac{\int_0^T K\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{\int_0^T \frac{1}{2}m\omega^2 a^2\sin^2\omega t\,dt}{T}$$

$$= \frac{m\omega^2 a^2}{2T}\int_0^T \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{4T}m\omega^2 a^2\int_0^T \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right]dt$$

$$= \frac{1}{4T}m\omega^2 a^2\left[t - \frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right]_{t=0}^{T}$$

$$= \frac{1}{4t} m\omega^2 a^2 \left[\left(T - \frac{T}{4\pi} \sin 4\pi \right) - (0) \right]$$

$$= \frac{1}{4T} m\omega^2 a^2 T \; [\because \sin 4\pi = 0]$$

या औसत गतिज ऊर्जा $\overline{K} = \frac{1}{4} m\omega^2 a^2 \ldots (1)$

तथा पुरे एक आवर्तकाल हेतु स्थितिज ऊर्जा का समय औसत,

$$\overline{U} = \frac{\int_0^T U\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{\int_0^T \frac{1}{2}\omega^2 a^2 \cos^2 \omega t}{T}$$

$$= \frac{1}{2T} m\omega^2 a^2 \int_0^T \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{4T} m\omega^2 a^2 \left[t + \frac{T}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right]_0^T \left[\because \omega = \frac{2\pi}{T} \right]$$

$$= \frac{1}{4T} m\omega^2 a^2 \left[\left(T + \frac{T}{4\pi} \sin 4\pi \right) - (0) \right]$$

इस प्रकार समीकरण (1) व (2) से,

औसत गतिज ऊर्जा = औसत स्थितिज ऊर्जा

प्रश्न 23 10kg द्रव्यमान की कोई वृत्तीय चक्रिका अपने केन्द्र से जुड़े किसी तार से लटकी है। चक्रिका को घूर्णन देकर तार में ऐंठन उत्पन्न करके मुक्त कर दिया जाता है। मरोड़ी दोलन का आवर्तकाल 1.5s है। चक्रिका की त्रिज्या 15cm है। तार का मरोड़ी कमानी नियतांक ज्ञात कीजिए। [मरोड़ी कमानी नियतांक α सम्बन्ध $J = -\alpha\theta$ द्वारा परिभाषित किया जाता है, यहाँ J प्रत्यानयन बल युग्म है तथा θ ऐंठन कोण है।

उत्तर- दिया है: चक्रिका का द्रव्यमान m = 10kg, मरोड़ी दोलन का आवर्तकाल T = 1.5s,

चक्रिका की त्रिज्या = 0.15m

केन्द्र से जाने वाली तथा तेल के लम्बवत् अक्ष के परितः चक्रिका का जड़त्व-आघूर्ण

$$I = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \times 10kg \times (0.15m)^2 = 0.1125kg\,m^2$$

माना तार का मरोड़ी नियतांक C है।

माना किसी क्षण चक्रिका θ कोण से घूम चुकी है, तब तार में उत्पन्न प्रत्यानयन बल-युग्म J = Cθ होगा, जो चक्रिका को वापस प्रारम्भिक स्थिति में लाने का प्रयास करेगा। यदि इस क्षण चक्रिका का त्वरण α है तो J = –Iα

$$\therefore -I\alpha = C\theta \text{ या } \alpha = -\left(\frac{C}{I}\right)\theta$$

अतः त्वरण, विस्थापन θ के अनुक्रमानुपाती तथा विपरीत दिष्ट है; अतः चक्रिका की गति सरल आवर्त है।

यहाँ $\frac{\text{विस्थापन } (\theta)}{\text{त्वरण } (\alpha)} = \frac{I}{C}$

$$\therefore \text{ आवर्तकाल } T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{विस्थापन } (y)}{\text{त्वरण } (a)}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$

अतः $T^2 = 4\pi^2\frac{I}{C}$

$$\Rightarrow C = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{4\times(3.14)^2\times0.1125}{1.5\times1.5}$$

$$= 1.97N\,m/\,rad$$

अतः मरोड़ी नियतांक $C = 2.0N\,m/\,rad$

प्रश्न 24 कोई वस्तु 5cm के आयाम तथा 0.2 सेकण्ड के आवर्तकाल से सरल आवर्त गति करती है। वस्तु का त्वरण तथा वेग ज्ञात कीजिए जब वस्तु का विस्थापन

a. 5cm
b. 3cm
c. 0cm हो।

उत्तर-

यहाँ वस्तु का आयाम a = 5 सेमी = 0.05 मीटर, आवर्तकाल T = 0.2 सेकण्ड

$\therefore$ कोणीय आवृत्ति $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.2}$ सेकण्ड

$= 10\pi \text{Rad/Sec.} = 10\pi \text{ sec.}^{-1}$

a. यहाँ विस्थापन y = 5 सेमी = 5 × 10^{-2} मीटर = 0.05 मीटर

$\therefore$ त्वरण $a = -\omega^2 y = (10\pi \text{ sec.}^{-1})^2 \times 5 \times 10^{-2}\text{m} = -5\pi^2 \text{m/sec.}^2$

वेग $u = \omega\sqrt{a^2 - y^2} = 10\pi \text{sec.}^{-1}\sqrt{(0.05\text{m})^2 - (0.05\text{m})^2} = 0$

b. यहाँ y = 3 सेमी = 0.03 मीटर

$\therefore$ त्वरण $a = -\omega^2 y = -(10\pi \text{ sec}^{-1})^2 \times 0.03\text{m} = -3\pi^2 \text{m-sec.}^{-2}$

वेग $u = \omega\sqrt{a^2 - y^2 \text{sec}^{-1}} = 10\pi\sqrt{(0.05\text{m})^2 - (0.03\text{m})^2}$

$= 0.4\pi \text{ m/sec.}$

c. यहाँ y = 0 सेमी = 0 मीटर

$\therefore$ त्वरण $a = -\omega^2 y = -(10\pi \text{ sec.}^{-1})^2 \times (0\text{m})^2 = 0$

वेग $u = \omega\sqrt{a^2 - y^2} = \omega\sqrt{a^2 - 0} = a\omega$

$= 0.05\text{m} \times 10\pi \text{ sec.}^{-1} = 0.5\pi \text{ m-sec.}^{-1}$

प्रश्न 25 किसी कमानी से लटका एक पिण्ड एक क्षैतिज तल में कोणीय वेग ω से घर्षण या अवमन्दन रहित दोलन कर सकता है। इसे जब x0 दूरी तक खींचते हैं और खींचकर छोड़ देते हैं तो यह सन्तुलन केन्द्र से समय t = 0 पर v0 वेग से गुजरता है। प्राचल ω,x0 तथा v0 के पदों में परिणामी

दोलन का आयाम ज्ञात कीजिए।(संकेत: समीकरण x = acos(ωt+θ) से प्रारंभ कीजिए। ध्यान रहे कि प्रारम्भिक वेग ऋणात्मक है।)

उत्तर-

माना सरल आवर्त गति का समीकरण

$$x = A\cos(\omega t + \phi)\ldots(1)$$

तब वेग $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = -\omega A\sin(\omega t + \phi)\ldots(2)$

∵ समय t = 0 पर x = x_0, अतः समीकरण (1) से,

$$x_0 = A\cos\phi\ldots(3)$$

तथा t = 0 पर v = v_0, अतः समीकरण (2) से,

$$-\frac{v_0}{\omega} = A\sin\phi\ldots(4)$$

समीकरण (3) व (4) के वर्गों का योग करने पर,

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = A^2$$

अतः आयाम $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$