गणित

अध्याय- 12: सीमा और अवकलज

सीमा (Limit)

माना x एक चर तथा व एक अचर है। यदि क्रमश: ऐसे मान ग्रहण करें जो के निकटतम होते जाये तो हम कहते हैं x, a की ओर अग्रसर हो रहा है।

यहाँ यह बात महत्वपूर्ण है जब x, a की ओर अग्रसर हो रहा है तो $x \neq a$ माना $y = f(x)$ कोई फलन $x = a$ पर परिभाषित नहीं है तो $x = a$ पर फलन के मान f(a) का कोई अर्थ नहीं होगा। ऐसी स्थिति में $x = a$ पर f(x) का मान ज्ञात करने के स्थान पर, के उस मान को जो के अत्यंत समीप है, f(x) का मान ज्ञात करते हैं जिसे फलन की सीमा कहते हैं।

फलन की सीमा का अर्थ (Meaning of Limit of a Function)

एक फलन f(x) की सीमा $\mathcal{I}$ कही जाती है अथवा एक फलन f(s),1 की ओर प्रवृत्त होना कहा जाता है, जबकि x, a की ओर प्रवृत्त होता है यदि f(x), $\mathcal{I}$ के समीपतर होता हुआ चला जाता है, तो इसे हम लिखते हैं:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = l}$$

तथा इसे पढ़ा जाता है "सीमा (limit)x, a की ओर (या lim x tends to a) f(x) बराबर $\mathcal{I}$".

हम यह भी कह सकते हैं कि a पर फलन की सीमा $\mathcal{I}$ है। जब ऐसे किसी का अस्तित्व नहीं होता है, तब हम कहते हैं कि $\lim_{x \to a} f(x) = l$ का अस्तित्व नहीं है अथवा a पर f(x) की सीमा का अस्तित्व नहीं है।

$x \to a$ का अर्थ (Meaning of x tends to a)-
(i) $x \neq a$
(ii) x, a के निकटतम मानों को ग्रहण करता है।

सीमाओं पर प्रमेय (Theorems on Limits)

फलनों की सीमाओं के मान ज्ञात करने के लिए हमें कुछ प्रमेयों की आवश्यकता होती है। ये प्रमेय नीचे दिये गये हैं, जिन्हें हम बिना प्रमाण (Without proofs) के ही स्वीकार कर लेते हैं :

1. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2. $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

3. $\lim_{x\to a}\{c.f(x)\} = c.\lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a}\{f(x).g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ यदि $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

6. यदि $f(x) \leq g(x), \forall x$ तो $\lim f(x) \leq \lim g(x)$.

सीमाओं को ज्ञात करना (Evaluation of Limits)

फलनों की सीमा, जब एक परिमित राशि a की ओर प्रवृत्त होती है, को ज्ञात करने की कुछ विशेष विधियाँ नीचे दी जा रही हैं:

(i) यदि $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$,

अर्थात् f(x), x में एक बहुपद फलन है। तब,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = a_0$$

(ii) गुणनखण्डों की विधि (Method of Factors) : यदि

$f(x), \frac{g(x)}{h(x)}$ के रूप का है, तब हम g (x) व h (x) को गुणनखण्डों में विभाजन करते हैं तथा उभयनिष्ठ गुणनखण्डों को काट देते हैं। फिर x का मान रखते हैं।

(iii) प्रतिस्थापन की विधि (Method of Substitution):

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}$ का मान ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित पदों का अनुसरण करते हैं :

(a) $x = a + h$ रखते हैं, जहाँ h छोटा है किन्तु $h \neq 0$

$\therefore$ जब $x \to a, h \to 0$.

(b) अंशव हर को सरल करते हैं तथा को h काट देते हैं।

(c) अब h = 0 रख देते हैं, जिससे अभीष्ट सीमा प्राप्त हो . जाती है।

(iv) परिमेयकरण की विधि (Method of Ration – alisation):

क्त गुणनखण्ड का परिमेयकरण करते हैं तथा फिर सरल करके हम x का मान रख देते हैं।

उदाहरण 1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: x = 3 रखने पर दिया गया फलन $\frac{0}{0}$ का रूप धारण कर लेता है जो कि अपरिभाषित रूप है

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-(3)^2}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3}(x+3)$$
$$=3+3=6.$$

उदाहरण 2. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: x = 3 रखने पर दिया गया फलन $\frac{0}{0}$ का रूप धारण कर लेता है जो कि अपरिभाषित रूप है

अतः $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x-x+3}{x^2-3x+x-3}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)-1(x-3)}{x(x-3)+1(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x+1}$$

$$=\frac{3-1}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

उदाहरण 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : x = 0 रखने पर दिया गया फलन $\frac{0}{0}$ का रूप धारण कर लेता है जो कि अपरिभाषित रूप है।

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1}$$

$$= \lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1) = (\sqrt{1+0}+1)$$

$$= \sqrt{1}+1 = 1+1 = 2.$$

कुछ महत्वपूर्ण सीमाएँ (Some Important Limits)

नीचे हम कुछ महत्वपूर्ण सीमाओं की उपपत्ति (Proof) देंगे (बिना δ ट्रीटमेंट के) जिनका उपयोग हमेशा प्रामाणिक सीमाओं (Standard limits) के रूप में किया जाएगा।

प्रमेय (Theorem)

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, (a > 0).$$

उपपत्ति (Proof): माना $x = a + h$. तब $h \to 0$ जब $x \to a$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{a+h-a}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[a^n\left(1+\frac{h}{a}\right)^n - a^n\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^n}{h}\left[\left(1+\frac{h}{a}\right)^n - 1\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^n}{h}\left[\left\{1 + n.\frac{h}{a} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{h}{a}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left. + h \text{ की उच्चतर घातों वाले पद}\right\} - 1\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^n}{h}\left[n\frac{h}{a} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h^2}{a^2}\right.$$

$$\left. + h \text{ की उच्चतर घातों वाले पद}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} a^n\left[\frac{n}{a} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h}{a^2}\right.$$

$$\left. + h \text{ की उच्चतर घातों वाले पद}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} a^n\left(\frac{n}{a}\right) = na^{n-1}$$

या $\boxed{\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}}$ जब $a > 0$.

उदाहरण 1. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 27}{x - 3}$ का मान ज़ात कीजिए।

हल : $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-(3)^3}{x-3}$

सूत्र $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ **का प्रयोग करने पर**

यहाँ $a=3, n=3$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3^3}{x-3}=3(3)^{3-1}$$

$$=3.3^2=27.$$

उदाहरण 2. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^{-1/3}}{1-x^{-2/3}}$ का मूल्यांकन कीजिए।

हल : $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^{-1/3}}{1-x^{-2/3}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^{1/3}-1}{x^{1/3}}}{\frac{x^{2/3}-1}{x^{2/3}}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{1/3}.(x^{1/3}-1)}{x^{2/3}-1}$$

$$=(1)^{1/3}.\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{1/3}-1}{x-1}.\frac{x-1}{x^{2/3}-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{1/3}-1}{x-1}\div\lim_{x\to 1}\frac{x^{2/3}-1}{x-1}$$

$$=\frac{1}{3}.(1)^{1/3-1}\div\frac{2}{3}.(1)^{2/3-1}$$

$$=\frac{1}{3}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

उदाहरण 3. निम्न सीमा का मूल्यांकन कीजिए-

$$\lim_{x\to a}\frac{(x+2)^{5/3}-(a+2)^{5/3}}{x-a}.$$

हल : $\lim_{x\to a}\frac{(x+2)^{5/3}-(a+2)^{5/3}}{x-a}$

$$=\lim_{(x+2)\to a+2}\frac{(x+2)^{5/3}-(a+2)^{5/3}}{(x+2)-(a+2)}$$

$$=\frac{5}{3}.(a+2)^{5/3-1},\quad\left[\because \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}\right]$$

$$=\frac{5}{3}.(a+2)^{2/3}.$$

कुछ त्रिकोणमितीय सीमाएं (Some Trigonometric Limits)

(a) प्रमेय: (i) $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=0$

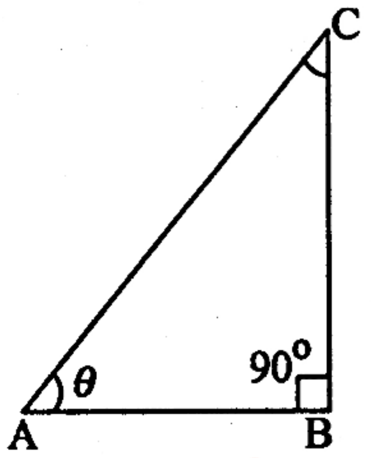
(ii) $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1.$

उपपत्ति (Proof): माना ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle A=\theta$ तब, $\angle B=90°$ तब,

$$\sin\theta=\frac{BC}{AC}$$

तथा $\cos\theta=\frac{AB}{AC}$

अब कल्पना कीजिए कि θ छोटा और छोटा होता चला जाता है। भुजा AB को स्थिर रखकर रेखा BC पर केवल C की स्थिति इस प्रकार बदलिए कि C, B के समीप और आता चला जाये। हम देखते हैं कि यदि θ बहुत छोटा है, तब भुजा AC, AB के लगभग बराबर होगी तथा BC बहुत छोटी होगी। अतः जब $\theta\to 0$ तब $\frac{BC}{AC}$, 0 की ओर तथा $\frac{AB}{AC}$, 1 की ओर प्रवृत्त होगा। अतः जब $\theta\to 0$, $\sin\theta\to 0$ तथा $\cos\theta\to 1$ अर्थात्



$\lim\limits_{\theta\to 0}\sin\theta = 0$ **एवं** $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 0$

(b) प्रमेय:

(i) $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ जबकि θ रेडियन में मापा गया है।

उपपत्ति (Proof): माना O उस वृत्त का केन्द्र है जिसकी त्रिज्या 1 है। माना ∠AOB = θ (रेडियन में),जहाँ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. AB को मिलाया।

A से AC ⊥ OA खींचा। OB को आगे बढ़ाया जो AC को C पर मिलाती है। तब, चित्र से स्पष्ट है कि ∠OAB का क्षेत्रफल < वृत्तखण्ड OAB का क्षेत्रफल < वृत्तखण्ड OAC का क्षेत्रफल।

हम जानते हैं कि वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ × (त्रिज्या × कोण (रेडियन में)

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(OA)(OB)\sin\theta < \frac{1}{2}(OA)^2\theta < \frac{1}{2}(OA)(AC)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1)(1)\sin\theta < \frac{1}{2}(1)^2\theta < \frac{1}{2}(1)(1)\tan\theta,$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \quad \tan\theta = \frac{CA}{OA} \\ \therefore AC = OA\tan\theta = 1\tan\theta \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

$$\Rightarrow \quad 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{\tan\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \quad 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

∴ व्युत्क्रम लेने पर,

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta.$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि $\frac{\sin\theta}{\theta}$ सदैव 1 और $\cos\theta$ के बीच स्थित है।

जब $\theta \to 0$, $\cos\theta \to 1$.

$\therefore$ जब $\theta \to 0$ तो $\frac{\sin\theta}{\theta}$, 1 और 1 के बीच स्थित है।

अत: $\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.}$

उपप्रमेय : $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta}$

उपपत्ति (Proof) : $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta}$

$$= \lim_{\theta \to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos\theta},$$

[प्रमेय (iii) और (ii) से]

$$= 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

या $\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1.}$

नोट : यदि θ का मान डिग्री में दिया हो,तो इसे रेडियन में सूत्र

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ रेडियन द्वारा बदल लेते हैं।

(c) प्रमेय : (i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1}x}{x} = 1$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1}x}{x} = 1$

उपपत्ति (Proof) : (i) माना $x = \sin\theta$ जब $x \to 0$, तब $\theta \to 0$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^{-1}(\sin \theta)}{\sin \theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1.}$$

(ii) माना x = tanθ जब x → 0, तब θ → 0

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan^{-1}(\tan \theta)}{\tan \theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\tan \theta} = 1$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = 1.}$$

उदाहरण 1. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना, x - π = t ⇒ x = π + t तथा जब x → π, तब t → 0

$$\therefore \quad \lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(\pi + t)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-\sin t}{t} = -\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = -1.$$

उदाहरण 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x + 7x}{4x + \sin 2x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+7x}{4x+\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}+7}{4+\frac{\sin 2x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin 3x}{3x}+7}{4+2\times\frac{\sin 2x}{2x}}$$

$$=\frac{3\lim_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}+7}{4+2\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}$$

$$=\frac{3+7}{4+2},\quad\left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right]$$

$$=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}.$$

उदाहरण 3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 6x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र $1-\cos mx = 2\sin^2\frac{mx}{2}$ का प्रयोग करने पर,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{2\sin^2\frac{6x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\left(\sin\frac{5x}{2}\right)^2}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}\times\frac{4}{25}}{\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}\times\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{25}{4\times 9}\frac{\lim_{\frac{5x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^2}{\lim_{3x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2},\quad\left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right]$$

$$=\frac{25}{36}\times\frac{1}{1}=\frac{25}{36}.$$

अनन्त पर सीमा तथा अनन्त सीमाएँ (Limit at Infinity and Infinite Limits)

चिन्ह $x\to\infty$ का अर्थ है कि बहुत बड़े मानों को ग्रहण करता है।

माना $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

निम्न सारणी को देखिए:

x	10	100	1000	10000	100000	....
F(x)	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	....

स्पष्ट है कि जैसे-जैसे x बड़े और बड़े मानों को ग्रहण करता है, f(x), 1 के निकट और निकट के मानों को ग्रहण करता है। इस स्थिति में हम यह कहते हैं कि जैसे-जैसे x-अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है, f(x) सीमा 1 की ओर प्रवृत्त होता है। इसे हम निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \iota.$$

(i) संकेत $\lim_{x\to\infty} f(x) = \iota$ का अर्थ : माना f (x), x का एक फलन है। यदि x के बड़े और बड़े मानों को ग्रहण करने पर f(x), ι के समीप और समीप मानों को ग्रहण करता है, तब हम कहते हैं कि जैसे-जैसे x अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है f(x) सीमा ι की ओर प्रवृत्त होता है और हम लिखते हैं :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \iota.$$

(ii) संकेत $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \iota$ का अर्थ : माना f(x), x का एक फलन है। यदि x के परिणाम में बड़े-से-बड़े, किन्तु ऋणात्मक चिन्ह वाले मानों को ग्रहण करने पर f(x), ι के समीप और समीप मानों को ग्रहण करता है, तब हम कहते हैं कि जैसे-जैसे x ऋणात्मक अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है, f(x) सीमा ι की ओर प्रवृत्त होता है। तो हम लिखते हैं :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \iota$$

(iii) कुछ मूलभूत सीमाएं : निम्न सारणी को देखिए :

x	1	10	100	1000	10000	....
$\frac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	....

हम देखते हैं कि जैसे-जैसे x अधिक और अधिक मानों को ग्रहण करता है, 1/x, शून्य [0] के समीप और समीप मानों को ग्रहण करता है। अत: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$

इसी प्रकार $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0, \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3} = 0$ ..... इत्यादि।

पुन: निम्न सारणी को देखिए :

x	-1	-10	-100	-1000	-10000	....
$\frac{1}{x}$	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	....

यहाँ स्पष्ट है कि $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$

इसी प्रकार $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0, \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3} = 0,$ ...... इत्यादि।

उदाहरण 1. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sum n^2}{n^3}$ in Ey का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं : $\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\sum n^2}{n^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

अंश व हर में n^3 से भाग अर्थात् प्रत्येक गुणनखण्ड को n से भाग देने पर,

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$$

$$= \frac{1.2}{6} = \frac{1}{3}.$$

उदाहरण 2. $\lim_{x\to\infty}\left(2x - \sqrt{4x^2+x}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\lim_{x\to\infty} 2x - \sqrt{4x^2+x}$

$$= \lim_{x\to\infty} 2x - \sqrt{4x^2+x} \times \frac{\left(2x+\sqrt{4x^2+x}\right)}{\left(2x+\sqrt{4x^2+x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - (4x^2+x)}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - x}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x}}\right)}$$

$$= \frac{-1}{2+\sqrt{4+0}}$$

$$= \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}.$$

प्रमेय (Theorem): $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

उपपत्ति (Proof) : जब $x \to \infty$ तब $\frac{1}{x} < 1.$

अत: $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ का द्विपद प्रमेय से प्रसार सम्भव है।

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1 + x.\frac{1}{x} + \frac{x(x-1)}{2!}.\frac{1}{x^2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}.\frac{1}{x^3} + \ldots\infty$$

$$= 1 + 1 + \frac{(x-1)}{2!}.\frac{1}{x} + \frac{(x-1)(x-2)}{3!}.\frac{1}{x^2} + \ldots\infty$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}.\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3!}.\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right) + \ldots\infty$$

अब, जब $x \to \infty$ तब $\frac{1}{x}, \frac{2}{x}, \ldots$ सभी $\to 0$

अतः $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\infty = e$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

प्रमेय (Theorem): $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x} = e.$

उपपत्ति (Proof) : उपर्युक्त प्रमेय से, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$ ...(1)

अब समी. (1) में $x = \frac{1}{y}$ रखने पर,

$$\lim_{\frac{1}{y}\to\infty}(1+y)^{1/y} = e$$

$$\lim_{\frac{1}{y}\to\infty}(1+y)^{1/y} = e$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e, \quad \left[\because \frac{1}{y}\to\infty \Rightarrow y\to 0\right]$$

या $\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e}$, [$y$ के स्थान पर x लिखने पर]

प्रमेय (Theorem): $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

उपपत्ति (Proof) : $e^x - 1 = y$

जब $x \to 0$, $ex - 1 \to 1 - 1 = 0$

$\therefore y \to 0$, $ex = 1 + y$

लघुगणक लेने पर, $\log e^x = \log(1 + y)$

$\Rightarrow \; x\log e = \log(1 + y)$

$\Rightarrow \; x = \log(1 + y),$

$\because \{\log e = 1\}$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log(1+y)}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{1}{y}\log(1+y)}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1}{\log(1+y)^{1/y}},$$

$$[\because n\log m = \log m^n]$$

$$= \frac{1}{\log e}, [\because \lim_{y \to 0} (1+y)^{1/y} = e]$$

या $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{1} = 1}$

प्रमेय (Theorem): $\lim_{x \to \infty} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$

उपपत्ति (Proof) : माना $y = \log(1 + x)$. जब $x \to 0$ तब $y \to 0$, [क्योंकि $\log(1 + x) = \log(1 + 0) = \log 1 = 0$

अब $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}$,

$$[\because y=\log(1+x)$$

$$\Rightarrow \quad e^y=1+x$$

$$\Rightarrow \quad x=e^y-1]$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}$$

या $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1}$, $\left[\because \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1\right]$.

प्रमेय (Theorem): $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\log_e a.$

उपपत्ति (Proof) : माना $a^x - 1 = y \Rightarrow a^x = 1 + y$

अतः $x=\log_e(1+y)$. जब $x\to 0$, तब $y\to 0$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_e(1+y)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}.\log_e(1+y)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_e(1+y)^{1/y}}$$

$$=\frac{1}{\log_a e}$$

$$=\frac{\log_e a}{\log_e e}=\log_e a$$

या $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a}$

उदाहरण 1. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}5\times\frac{e^{5x}-1}{5x}$

$$=5\lim_{5x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}$$

$$=5.(1), \qquad \left[\because \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1\right]$$

$$=5.$$

उदाहरण 2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ a < x < b.

हल : $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}+1-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1-(e^{bx}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{x}$$

$$=a\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}-b\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{bx}$$

जब $x\to 0$ तब $ax\to 0$, तथा $bx\to 0$

$$=a\lim_{ax\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}-b\lim_{bx\to 0}\frac{e^{bx}-1}{bx},$$

$$\left[\because \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1\right]$$

$$=a.1-b.1=a-b.$$

सीमा का अस्तित्व (Existence of Limit)

(i) दायीं सीमा (Right hand limit) - $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \iota$ में यदि x. a की ओर दायीं ओर से प्रवृत्त होता है अर्थात् x, a की ओर उन मानों को ग्रहण करता है जो a से अधिक हैं तो f(x) की यह सीमा दायीं सीमा (Right limit) कहलाती है, इसे $x \to a^+$ से दर्शाते हैं।

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \iota_1 \qquad (x > a) \ldots.(1)$$

(ii) बायीं सीमा (Left hand limit) - $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \iota$ में यदि x, a की ओर बायीं ओर से प्रवृत्त होती है अर्थात् x, a से छोटे मानों को ग्रहण करता है तो f(x) की यह सीमा बायीं सीमा कहलाती है। इसे $x \to a^-$ से प्रदर्शित करते हैं।

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \iota_2 \qquad (x < a) \ldots.(2)$$

किसी सीमा का अस्तित्व है यदि

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)}$$

उदाहरण 1. यदि $f(x) = \begin{cases} x, & \text{जब } x \le 2 \\ 4 - x, & \text{जब } x > 2. \end{cases}$ क्या $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ विद्यमान है ? यदि हाँ, तो इसका मान ज्ञात कीजिए।

हल: जब x < 2 तब f(x) = x

X = 2 - h रखने पर जब x → 0 तब h → 0 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ की वाम-हस्त सीमा

$$= \lim_{x\to 2^-} (x) = \lim_{x\to 0}(2-h), = 2 - 0 = 2 \ \ldots (1)$$

जब x > 2 तब f(x) = 4 – x

X = 2 + h रखने पर जब x → 0 तब h → 0 और $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ की दक्षिण-हस्त सीमा

$$= \lim_{x\to 2^+} (4 - x) = \lim_{x\to 0}[4 - (2 + h)],$$

(x = 2 + h रखने पर)

$$= \lim_{x\to 0}(2 - h) = 2 - 0 = 2 \quad \ldots (2)$$

समी. (1) और (2) से,

वाम-हस्त सीमा = दक्षिण-हस्त सीमा

अत: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ विद्यमान है और $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2.$

उदाहरण 2. फलन f(x) निम्न प्रकार से परिभाषित है-

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{जब } x < 1; \\ 2, \text{जब } x = 1; \\ x^2 + 1 \text{ जब } x > 1. \end{cases}$$

क्या $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ विद्यमान है?

हल : जब x > 1 तब $f(x) = x^2 + 1$

X = 1 + h रखने पर जब $x \to 1$ तब $h \to 0$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 0}[1 + (1 + h^2)]$$

$= 1 + (1 + 0)^2 = 1 + 1 = 2$

जब x < 1 तब $f(x) = x^2$

X = 1 - h रखने पर जब $x \to 1$तब $h \to 0$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 + (1-h)^2 = (1-0)^2 = 1$$

तथा जब x = 1, तो f(x) = 2.

चूंकि $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

अत: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ विद्यमान नहीं है।

फलन के अवकलज (Derivative of a Function)

जब कोई चर राशि x एक मान से दूसरे समीप के मान में परिवर्तित होती है तो इन दो मानों के अंतर को x में वृद्धि (Increment) कहते हैं।

X के मान में हो रही अल्प वृद्धि को δx से प्रकट करते हैं (इसे "डेल्टा x" पढ़ते हैं)। इसके संगत y के मान में वृद्धि को δy से प्रकट करते हैं।

माना कोई चर y, x का कोई संतत फलन है। अर्थात् y = f(x) एक संतत फलन है जहाँ x स्वतंत्र चर (Independent variable) और y परतंत्र चर (Dependent variable) है।

यदि के मान में स्वेच्छ और अल्प वृद्धि δx होने पर y में संगत वृद्धि δy है तब भिन्न $\frac{\delta y}{\delta x}$, x के सापेक्ष y की वृद्धि की औसत दर है।

यदि δx छोटा होकर शून्य की ओर प्रवृत्त हो, तो δy भी छोटा होता हुआ शून्य की ओर प्रवृत्त होगा। $\frac{\delta y}{\delta x}$ की सीमा को जबकि $\delta x \longrightarrow 0$, x के सापेक्ष y का अवकल गुणांक कहते हैं।

इसे $\frac{d}{dx} f(x)$ या $\frac{dy}{dx}$ या f'(x) या y_1 या D(x) से व्यक्त करते हैं।

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$\frac{dy}{dx}$ को y का x के सापेक्ष अवकल गुणांक (Differential dr coefficient) या अवकलज (Derivative) कहते हैं।

यदि y = f(x)

तो $y + \delta y = f(x + \delta x)$

$\Rightarrow \delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

$$\because \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

यदि स्वेच्छ चर x में अल्प वृद्धि δx को h से प्रदर्शित करें

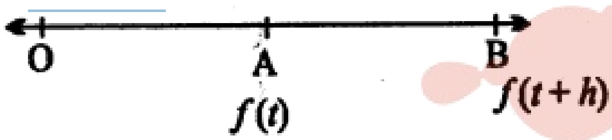
तो $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

इस प्रकार f(x), x का कोई संतत फलन हो,

तो $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

को f(x), का x के सापेक्ष अवकल गुणांक या अवकलज कहते हैं। अवकल गुणांक प्राप्त करने की प्रक्रिया को अवकलन (Differentiation) कहते हैं।

अवकल गुणांक का भौतिक अर्थ (Physical Meaning of Differential Coefficient)



O पर स्थित किसी कण का समय t पर विस्थापन f(t) है। समय (t + h) पर कण का विस्थापन f(t + h) होगा।

इस प्रकार समय अन्तराल (t + h) -1 = h में कण ने दूरी f(t + h) - f(t) तय की है।

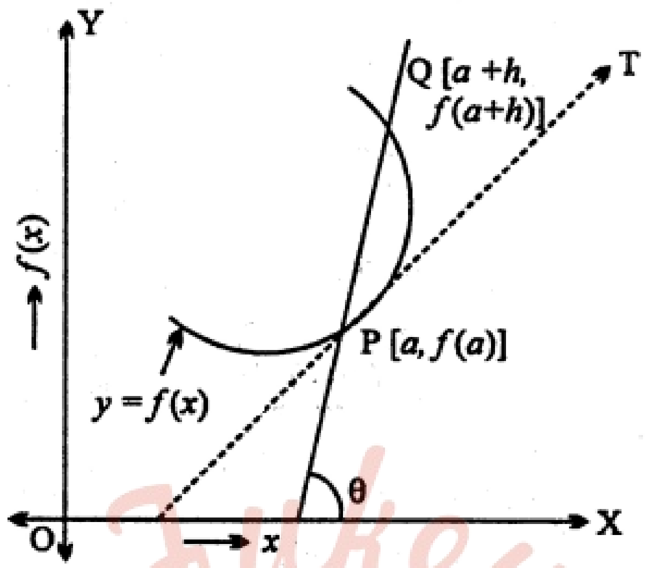
इस अंतराल में कण का औसत वेग $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ होगा। औसत वेग की सीमा जब h ⟶ 0, कण का समय पर वेग कहलाती है।

समय t पर वेग = $\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

अतः किसी फलन का अवकल गुणांक फलन से उसी प्रकार संबंधित है जिस प्रकार किसी गतिमान कण के द्वारा चली गयी दूरी संबंधित होती है।

अवकलगुणांक का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of Differential Coefficient)

माना निर्देशाक्ष समतल में y = f(x) एक वक्र है।



X = a पर फलन का मान f(a) है।

अब जैसे-जैसे वक्र के अनुदिश Q → P. छेदक रेखा PQ की सीमान्त स्थिति वक्र के बिन्द P पर स्पर्श-रेखा T है। पुन: जब वक्र के अनुदिश Q → P, तब h →0.

अत: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}$ (PO की प्रवणता)

= P पर स्पर्श-रेखा की प्रवणता।

x = a पर f(x) का अवकलज $= \left[\dfrac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=a}$

= P पर स्पर्श रेखा T की प्रवणता।

इस प्रकार, फलन f(x) का x = a पर अवकल गुणांक, वक्र y = f(x) के बिन्दु [a, f(a)] पर स्पर्श-रेखा की प्रवणता को निरूपित करता है।

यही $\dfrac{dy}{dx}$ का ज्यामितीय अर्थ है।

किसी बिन्दु पर फलन का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of a Function at a Point)

हम जानते हैं कि $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

या $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

किसी दिए गए बिन्दु x = a पर हम फलन के अवकल गुणांक को f'(a) से निरूपित करते हैं तथा इसे निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

यदि यह सीमा अस्तित्व रखती है, तो फलन f(x) = a पर अवकलनीय (Differentiable) कहलाता है।

दक्षिण हस्त और वाम हस्त अवकलज तथा अवकलनीयता (Right Hand and Left Hand Derivatives and Differentiability)

(1) बिन्दु x = Da पर फलन f(x) के दक्षिण हस्त अवकलज को इस प्रकार परिभाषित करते हैं-

$$\lim_{h \to 1^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, h > 0$$

बिन्दु x = a पर f(x) के दक्षिण हस्त अवकलज को Rf'(a) से प्रकट करते हैं। इसे प्रगामी अवकलज (Progressive derivative) भी कहा जाता है।

(2) इसी प्रकार बिन्दु x = a पर f(x) के वाम हस्त अवकलज को इस प्रकार परिभाषित करते हैं-

$$\lim_{h \to 1^-} \frac{f(a - h) - f(a)}{-h}, h > 0$$

बिन्दु x = a पर f(x) के वाम हस्त अवकलज को Lf'(a) से प्रकट करते हैं। इसे प्रतिगामी अवकलज (Regressive derivative) भी कहा जाता है।

(3) फलन f(x) की बिन्दु x = a पर अवकलनीयता (Differentiability of f(x) at a point x = a) फलन f(x) बिन्दु x = a पर अवकलनीय (Differentiable) कहलाता है यदि और केवल यदि

(i) Rf'(a) और Lf'(a) दोनों निश्चित मान (Finite. value) के साथ विद्यमान हों तथा

(ii) $\boxed{Rf'(a) = Lf'(a).}$

(4) अवकलनीयता की अन्य परिभाषा (Other definition of differentiability) - एक फलन f(x) बिन्दु x = a पर अवकलनीय (differentiable) कहलाता है, यदि $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ निश्चित मान के साथ विद्यमान है। इसे f'(a) के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

सांतत्यता और अवकलनीयता में सम्बन्ध (Relation between Continuity and Differentiability)

प्रमेय - यदि कोई फलन f(x) किसी बिन्दु x = a पर अवकलनीय है तो वह फलन इस बिन्दु पर संतत भी होगा।

प्रमाण (Proof) - फलन f(x) बिन्दु x = a पर अवकलनीय है। (दिया है)

अतः $f(a) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ निश्चित मान के साथ विद्यमान है। ......(1)

अब, $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]$

$$= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.(x-a)\right]$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\lim_{x\to a}(x-a)$$

$$= f'(a).0, \qquad \text{[समी. (1) से]}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}f(a)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=f(a) \qquad ...(2)$$

अतः f(x), x = a पर संतत (Continuous) है, सातत्य की परिभाषा से।

प्रथम सिद्धान्त से अचर राशि का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of a Constant from First Principle)

माना f(x) = c

जहाँ c कोई अचर राशि है।

∴ f(x + h) = c

प्रथम सिद्धान्त से,

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dx}(c)=0}$$

अतः अचर राशि का अवकल गुणांक शून्य होता है।

प्रथम सिद्धान्त से का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of e^x from First Principle)

माना f(x) = e^x

∴ f(x + h) = e^{x+h}

प्रथम सिद्धान्त से,

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}e^x\frac{(e^h-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+...-1\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+...\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}e^x\left(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+...\right)$$

$$=e^x\left(1+\frac{0}{2!}+\frac{0}{3!}+...\right)=e^x$$

$$\therefore\quad \boxed{\frac{d}{dx}(e^x)=e^x}$$

प्रथम सिद्धान्त से logex का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of loger from First Principle)

माना $f(x)=\log_e x$

$\therefore\quad f(x+h)=\log_e(x+h)$

प्रथम सिद्धान्त से,

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3-...\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{x^3}-...\right]$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{0^2}{x^3}-...=\frac{1}{x}$$

$$\therefore\quad \boxed{\frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}}$$

दो फलनों के योग अथवा अन्तरका अवकल गुणांक (Differential Coefficient of the Sum or Difference of Two Functions)

माना $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$\therefore \quad f(x+h) = f_1(x+h) + f_2(x+h)$

$$\therefore \frac{d}{dx}[f_1(x)+f_2(x)]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f_1(x+h)+f_2(x+h)]-[f_1(x)+f_2(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\left\{\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}\right\}+\left\{\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}\right\}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}[f_1(x)] + \frac{d}{dx}[f_2(x)]$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[f_1(x)+f_2(x)] = \frac{d}{dx}f_1(x) + \frac{d}{dx}f_2(x)$$

अर्थात् दो फलनों के योगका अवकल गुणांक, उन फलनों के अवकल गुणांकों के योग के बराबर होता है।

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(f_1 - f_2) = \frac{df_1}{dx} - \frac{df_2}{dx}.$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)\pm h(x)\pm \ldots] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) \pm \frac{d}{dx}h(x) \pm \ldots}$$

एक अचर राशि और एक फलन के गुणनफल का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of the Product of a Constant and a Function)

माना F(x) = cf(x), [जहाँ c कोई अचर राशि है।

∴ F(x + h) = cf(x + h) अवकलन की परिभाषा से,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

अर्थात किसी अचर राशि और किसी फलन के गुणनफल का अवकल गुणांक अचर और फलन के अवकल गुणांक के गुणनफल के बराबर होता है।

उदाहरण 1. निम्न के x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

(i) $\sqrt[3]{x^3}$ (ii) $3\sqrt{x^3}$ (iii) $\sqrt{x^3}$

हल : (i) माना $y = \sqrt[3]{x^3}$

$$y = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x = 1.x^{1-1}, \left[\because \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\right]$$

$$= 1.x^0 = 1.1 = 1.$$

(ii) माना $y = 3\sqrt{x^3}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}3\sqrt{x^3}$$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^3)^{\frac{1}{2}} = 3\frac{d}{dx}(x)^{3/2}$$

$$= 3.\frac{3}{2}(x)^{3/2-1}, \left[\because \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\right]$$

$$= \frac{9}{2}(x)^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x}.$$

(iii) माना $y=\sqrt{x^3}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}(x^3)^{1/2}=\frac{d}{dx}(x^{3/2})$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$$

$$=\frac{3}{2}x^{1/2}, \left[\because \frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

उदाहरण 2. यदि $y=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ हो तो सिध्द कीजिए कि

$$n!\frac{dy}{dx}+x^n=n!.y.$$

हल : दिया है : $y=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=0+1+\frac{2x}{2.1!}+\frac{3x^2}{3.2!}+.....+\frac{nx^{n-1}}{n(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+.....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y-\frac{x^n}{n!},$$

$$\left[\because y=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+.....+\frac{x^n}{n!}\right.$$

$$\Rightarrow y-\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+.....+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\Big]$$

$$\Rightarrow \quad n!\frac{dy}{dx}=n!.y-x^n$$

$$\Rightarrow n!\frac{dy}{dx}+x^n=n!.y.$$

उदाहरण 3. यदि $y = \log_e x + \log_a x$ हो, $\frac{dy}{dx}$ तो कीजिए।

हल : दिया है : $y = \log_e x + \log_a x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\log_e x+\log_a x)$$

$$=\frac{d}{dx}\log_e x+\frac{d}{dx}\log_a x$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{d}{dx}\log_a e.\log_e x$$

$$=\frac{1}{x}+\log_a e.\frac{d}{dx}\log_e x$$

$$=\frac{1}{x}+\log_a e.\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}(1+\log_a e).$$

त्रिकोणमितीय फलनों के अवकल गुणांक (Differential Coefficient of Trigonometric Function)

(i) sin x का अवकल गुणांक-

माना f(x) = sin x

∴ f(x + h) = sin(x + h)

अवकलन की परिभाषा से,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos\left(x+\frac{0}{2}\right)\times 1,\left[\because \lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right] = \cos x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$$

(ii) cos x का अवकल गुणांक-

माना f(x) = cos x

∴ f(x + h) = cos(x + h) अवकलन की परिभाषा से,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right) . \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{h/2}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right) . \lim_{\frac{h}{2}\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -\sin\left(x+\frac{0}{2}\right)\times 1, \left[\because \lim_{\frac{h}{2}\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right] = -\sin x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$$

(iii) tan x का अवकल गुणांक-

माना f(x) = tan x

∴ f(x + h) = tan(x + h) अवकलन की परिभाषा से,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)\cos x - \sin x\cos(x+h)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos x.\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

(iv) cot x का अवकल गुणांक-

माना f(x) = cot x

∴ f(x + h) = cot(x + h) अवकलन की परिभाषा से,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cot(x+h)-\cot x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)}-\frac{\cos x}{\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)\sin x-\cos x\sin(x+h)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x-x-h)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -1\frac{1}{\sin x.\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x}$$

(v) sec x का अवकल गुणांक-

माना f(x) = sec x

∴ f(x + h) = sec(x + h) अवकलन की परिभाषा से,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(x+h)}-\frac{1}{\cos x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x-\cos(x+h)}{h\cos(x+h).\cos x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$=\sin x.1.\frac{1}{\cos x.\cos x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos x}=\sec x\tan x$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x}$$

(vi) sec x का अवकल गुणांक-

माना f(x) = sec x

∴ f(x + h) = sec(x + h) अवकलन की परिभाषा से,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{cosec}(x+h)-\operatorname{cosec}x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sin(x+h)}-\frac{1}{\sin x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x-\sin(x+h)}{h\sin(x+h).\sin x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h\sin x\sin(x+h)}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin x\sin(x+h)}$$

$$=-\cos x.1.\frac{1}{\sin x.\sin x}$$

$$=-\operatorname{cosec}x\cot x.$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}x)=-\operatorname{cosec}x\cot x}$$

उदाहरण 1. निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए

(i) $x^2+\sin x+\frac{1}{x^2}$.

(ii) $2\sec x+3\cot x-4\tan x$.

हल : (i) माना $y=x^2+\sin x+x^{-2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2+\sin x+x^{-2})$$

$$=\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}\sin x+\frac{d}{dx}x^{-2}$$

$$= 2x + \cos x - 2x^{-3}$$

(ii) माना $y = 2\sec x + 3\cot x - 4\tan x.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sec x + 3\cot x - 4\tan x)$$

$$= 2\frac{d}{dx}\sec x + 3\frac{d}{dx}\cot x - 4\frac{d}{dx}\tan x$$

$$= 2\sec x\tan x - 3\mathrm{cosec}^2 x - 4\sec^2 x.$$

दो फलनों के गुणनफल का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of the Product of Two Functions)

माना $\boxed{F(x) = f_1(x).f_2(x)}$

$\therefore f(x + h) = f_1(x + h).\ f_2(x + h)$ अवकलन की परिभाषा से,

$$\frac{d}{dx}[f_1(x).f_2(x)]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f_1(x+h)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f_1(x+h)f_2(x+h) - f_1(x+h)f_2(x) + f_1(x+h)f_2(x) - f_1(x)f_2(x)}{h}\right],$$

$\{[f_1(x+h)f_2(x)]$ को अंश में जोड़ने एवं घटाने पर$\}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)\{f_2(x+h) - f_2(x)\} + f_2(x)\{f_1(x+h) - f_1(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f_1(x+h)\left\{\frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}\right\}\right.$$

$$+f_2(x)\left\{\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}\right\}\Bigg]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}[f_1(x).f_2(x)] = f_1(x)\frac{d}{dx}[f_2(x)]+f_2(x)\frac{d}{dx}[f_1(x)]}$$

फलनों के गुणनफल का अवकल गुणांक = प्रथम फलन × द्वितीय फलन का अवकल गुणांक + द्वितीय फलन - प्रथम फलन का अवकल गुणांक

दो फलनों के भागफल का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of the Quotient of Two Functions)

माना $$f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$\therefore \quad f(x+h)=\frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)}$$

अवकलन की परिभाषा से,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)}-\frac{f_1(x)}{f_2(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f_1(x+h)f_2(x)-f_1(x)f_2(x+h)}{hf_2(x+h)f_2(x)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f_1(x+h)f_2(x)-f_1(x)f_2(x)+f_1(x)f_2(x)-f_1(x)f_2(x+h)}{hf_2(x+h)f_2(x)}\right],$$

$[f_1(x)f_2(x)$ को अंश में जोड़ने और घटाने पर]

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f_2(x)\{f_1(x+h)-f_1(x)\} - f_1(x)\{f_2(x+h)-f_2(x)\}]}{hf_2(x+h)f_2(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f_2(x)\left\{\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}\right\} - f_1(x)\left\{\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}\right\}}{f_2(x+h)f_2(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \frac{f_2(x)\frac{d}{dx}\{f_1(x)\} - f_1(x)\frac{d}{dx}\{f_2(x)\}}{[f_2(x)]^2}.}$$

$$\text{दो फलनों के भागफल का अवकल गुणांक} = \frac{(\text{हर}) \times (\text{अंश का अवकल गुणांक}) - (\text{अंश}) \times (\text{हर का अवकल गुणांक})}{(\text{हर})^2}$$

उदाहरण 1. $x^2\log_e x$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = x^2 \log_e x$
$\quad\quad$ I $\quad$ II

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 \log_e x)$$

$$= x^2 . \frac{d}{dx}\log_e x + \log_e x \frac{d}{dx}x^2$$

$$= x^2 . \frac{1}{x} + \log_e x . 2x$$

$$= x + \log_e x . 2x$$

$$= x(1 + 2\log_e x).$$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 13.1 (पृष्ठ संख्या 319-321)

प्रश्न 1 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 3} x+3$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

प्रश्न 2 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to x}\left(x-\frac{22}{7}\right)$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to x}\left(x-\frac{22}{7}\right)=\pi-\frac{22}{7}$$

प्रश्न 3 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 1}\left(\pi r^2\right)$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 1}\left(\pi r^2\right)-\pi^2 1-\pi$$

प्रश्न 4 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 4}\frac{4x+3}{x-2}$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 4}\frac{4x+3}{x-2}=\frac{4\times 4+3}{4-2}$$

$$=\frac{16+3}{2}=\frac{19}{2}$$

प्रश्न 5 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^{10}+x^5+1}{x-1}$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^{10}+x^5+1}{x-1}=\frac{(-1)^{10}+(-1)^5+1}{-1-1}$$

$$=\frac{+1-1+1}{-2}=\frac{1}{2}$$

प्रश्न 6 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^5-1}{y-1}$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{y^5-1^5}{y-1}=5.1^{5-1}\left[\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^a}{x-a}=na^{n-1}\right]$$

$$=5$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{(x+5^5)-1}{x}=5$$

प्रश्न 7 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x^2-4}$$

उत्तर-

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+5)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+5}{x+2}$$

$$=\frac{3(2)+5}{2+2}=\frac{11}{4}$$

प्रश्न 8 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{(x-3)(2x+1)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+9)}{(2x+1)}$$

$$=\frac{(3+3)(9+9+)}{(6+1)}$$

$$=\frac{6\times 18}{7}=\frac{108}{7}$$

प्रश्न 9 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{cx+1}$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{cx+1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{cx+1} = \frac{a(0)+b}{c(0)+1} = b$$

प्रश्न 10 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^{\frac{1}{3}}-1}{z^{\frac{1}{6}}-1}$$

उत्तर-

सूत्र $\left[\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$ के अनुसार

$$n = \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$$

$$a = 1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{3}.1^{\frac{1}{3}-1}}{\frac{1}{6}.1^{\frac{1}{6}-1}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 2$$

प्रश्न 11 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}, a+b+c \neq 0$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$$

$$=\frac{a(1)^2+b(1)+c}{c(1)^2+b(1)+a}=\frac{a+b+c}{c+b+a}=1$$

प्रश्न 12 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{2(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2(-2)}=-\frac{1}{4}$$

प्रश्न 13 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1\right]$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

प्रश्न 14 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \neq 0.$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$$

$$= \lim_{x\to}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)\left(\frac{bx}{\sin bx}\right)\times\frac{a}{b}$$

$$= 1\times 1\times\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

प्रश्न 15 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$$

$\pi - x = 0$ लीजिए, जब $= x \to, \theta \to 0$

$$\therefore \lim_{x\to\pi}\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\pi\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$$

$$\frac{1}{\pi}$$

प्रश्न 16 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\pi - x}$$

उत्तर-

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\pi - x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 0}{\pi - 0} = \frac{1}{\pi}$$

प्रश्न 17 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$$

उत्तर-

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - 2\sin^2 x - 1}{\cos x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{1 - \cos}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 2(1 + \cos x) = 2(1 + \cos 0)$$

$$= 2 \times 2 = 4$$

प्रश्न 18 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax + x\cos x}{b\sin x}$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax+x\cos x}{b\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(a\cos x)}{(\sin x)b}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right) \frac{a+\cos x}{b}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a+\cos x}{b}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a+\cos 0}{b}$$

$$= \frac{a+1}{b}$$

प्रश्न 19 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 0} x\sec x$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 0} x\sec x$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

प्रश्न 20 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax+bx}{ax+\sin bx} a, b, a+b \neq 0,$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax+bx}{ax+\sin bx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)ax+bx}{ax+bx\left(\frac{\sin bx}{bx}\right)}$$

$$=\frac{\left(\lim_{ax\to0}\frac{\sin ax}{ax}\right)\times\lim_{x\to0}(ax)+\lim_{x\to0}bx}{\lim_{x\to0}ax+\lim_{x\to0}bx\left(\lim_{bx\to0}\frac{\sin bx}{bx}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}(ax)+\lim_{x\to0}bx}{\lim_{x\to0}(ax)+\lim_{x\to0}(bx)}\left[\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\right]$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}(ax+bx)}{\lim_{x\to0}(ax+bx)}$$

$$=\lim_{x\to0}(1)$$

$$=1$$

प्रश्न 21 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to0}(\operatorname{cosec} x-\cot x)$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to 0}(\text{cosec } x - \cot x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} \times \frac{\sin x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x).\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \frac{0}{2} = 0$$

प्रश्न 22 प्रश्न में निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए।

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{x-\frac{\pi}{2}}$$

उत्तर-

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{x-\frac{\pi}{2}}$$ में $x = \frac{\pi}{2} + h$ रखने पर

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\tan 2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(\pi+2h)}{y}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\tan 2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\cdot\frac{2}{\cos 2h}\quad\left(\because \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h} = 1\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{\cos 2h}$$

$$= \frac{2}{\cos 0} = \frac{2}{1} = 2$$

प्रश्न 23

$\lim_{x \to 0} f(x)$ और $\lim_{x \to 1} f(x)$ ज्ञात कीजिए जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3(x + 1), & x \geq 0 \end{cases}$$

उत्तर-

i. जब $x < 0, f(x) = 2x + 3$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ के लिए सरणी इस प्रकार है

x	-0.01	-0.001	-0.001
f(x)	2.98	2.998	2.9998

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$$

जब $x > 0, f(x) = 3(x + 1)$

x का मान 0 के निकट और 0 से अधिक रखने पर

x	0.01	0.001	0.0001
f(x)	3.03	3.003	3.0003

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 3$$

दूसरी विधि- $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a-h)$, x को $a-h$ रखने पर

यहाँ पर जब $x < 0, f(x) = 2x + 3$

$$\therefore \lim_{x \to 0^-} (2x+3) = \lim_{h \to 0} = 2(0-h) + 3$$

$$= \lim_{h \to 0} (-2h + 3) = 3$$

जब $x > 0, f(x) = 3(1+x)$

$\lim_{x \to a^+} fx = \lim_{h \to 0} f(a+h)$, $a+h$ रखने पर

$$= \lim_{x \to a^+} (3+3x) \lim_{h \to 0} [3 + 3(0+h)]$$

$$\lim_{h \to 0} (3+3h) = 3$$

$$\because \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$$

अतः $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$

जब $x < 1, f(x) = 3(x+1)$

ii. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ ज्ञात करने क लिए f(x) में x का 1 के निकट और 1 से कम मान रखने पर

x	0.9	0.99	0.999	0.9999

f(x)	5.7	5.77	5.997	5.9997

$$\therefore \lim_{x\to1^-} 3(x+1) = 6$$

अब x का मान 1 के निकट और 1 से अधिक f(x) मर रखने पर

x	1.01	1.001	1.0001
f(x)	6.03	6.003	6.0003

$$\therefore \lim_{x\to1^+} 3(x+1) = 6$$

$$\therefore \lim_{x\to1} f(x) = 6$$

वैकल्पिक विधि $\lim_{x\to1} f(x+1) = \lim_{h\to0} 3(1-h+1) = \lim_{h\to0} 3(2-h) = 6$

$$\lim_{x\to1^+} f(x+1) = \lim_{h\to0} 3(1+h+1) = \lim_{h\to0} 3(2+h) = 6$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = 6$$

अतः $\lim_{x\to1} f(x) = 6$

प्रश्न 24

$\lim_{x\to1} f(x)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \le 1 \\ -x^2-1, & x > 1 \end{cases}$

उत्तर-

जब $x < 1 f(x) = x^2 - 1$

फलन में x का मान 1 से कम और 1 के निकट रखने पर,

x	0.9	0.99	0.999

f(x)	-0.19	-0.0199	-0.0019999

$$\therefore \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \ldots (1)$$

जब $x > 1 f(x) = x^2 - 1$

फलन में x का मान 1 से कम और 1 के निकट रखने पर,

x	1.1	1.01	1.0001
f(x)	-2.21	-2.0201	-2.002001

$$\therefore \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \ldots (2)$$

समी (1) और (2) से

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$\therefore$ अतः $x = 1$ पर समीकरण का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 25

$\lim_{x\to 0} f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

उत्तर-

यदि $x < 0, |x| = -x$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{|x|}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{-x}{x}\right) = -1$$

और यदि $x < 0, |x| = x$

$$\therefore \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to0^-} f(x) \neq \lim_{x\to0^+} f(x)$$

अतः $x = 0$ पर सिमा का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 26

$\lim_{x\to0} f(x)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

उत्तर-

यदि $x < 0, |x| = -x$

$$\therefore \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \left(\frac{x}{|x|}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^-} \left(\frac{-x}{x}\right) = -1$$

और यदि $x > 0, |x| = x$

$$\therefore \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{x}{|x|}\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to0^-} f(x) \neq \lim_{x\to0^+} f(x)$$

अतः $x = 0$ पर सिमा का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 27

$\lim_{x\to5f}(x)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = |x| - 5$

उत्तर-

$$f(x) = |x| - 5$$

$$\lim_{x\to5^-} f(x) = \lim_{x\to5^-} [|x| - 5]$$

$$\lim_{x\to0} [|5 - h| - 5]$$

$$\lim_{x\to0} |5 - h - 5] = \lim_{h\to0} (-h) = 0$$

$$\lim_{x\to5^+} f(x) = \lim_{x\to5^+} [|x| - 5] = \lim_{h\to0} [|5 + h| - 5]$$

$$\lim_{h\to0} [5 + h - 5] = \lim_{h\to0} h = 0$$

$$\lim_{x\to5^-} f(x) = \lim_{x\to5^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to5} f(x) = 0$$

प्रश्न 28

मान लीजिए $f(x) = \begin{cases} a+bx, & x < 0 \\ 4 & x = 1 \\ b\text{-}ax, & x > 1 \end{cases}$

और यदि $\lim_{1x\to1} = f(x) = f(1)$ तो a और b के संभव मान क्या है।

उत्तर-

जब x < 1f(x) = a + bx

बाएँ पक्ष की सिमा करने हेतु, x का मान 1 से कम और 1 के निकट f(x) में रखने पर

x	0.99	0.999	0.9999
f(x)	a + 1.99 b	a + 0.999 b	a + 0.9999 b

$$\therefore \lim_{x \to 1^-} = f(x) = a + b$$

दाएँ पक्ष की सिमा ज्ञात करने के लिए f(x) = b - ax, इसमें 1 से अधिक और 1 के निकट, x का मान रखने पर

x	1.01	1.0001	1.00001
f(x)	b - 1.01 a	b - 1.0001 a	b 1.00001 a

$$\therefore \lim_{x \to 1^+} = f(x) = b - a$$

$\therefore$ यदि $x = 1$ पर सिमा का अस्तित्व है तो

$$\lim_{x \to 1^-} = f(x) = a + b = b + a = f(1) = 4$$

$$\therefore b + a = 4 \ldots (1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} = f(x) = b - a = f(1) = 4$$

$$\therefore b - a = 4 \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर,

$2b = 4$ या $b = 4$

समी (1) में b = 4 रखने पर

$4 + a = 4$ या $a = 0$

अतः $a = 0, b = 4$

प्रश्न 29 मान लीजिए $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$, अचर वास्तविक संख्याएँ हैं और एक फलन f(x) = $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ से परिभाषित है। $\lim_{x \to a_1} f(x)$ क्या है? किसी $a \neq a_1, a_2, \ldots a_n$ के लिए $\lim_{x \to a} f(x)$ का परिकलन कीजिए।

उत्तर-

गुणनखण्ड $(x - a_1)$ के लिए

यदि $x \to a_1, x - a_1 \to 0$

$\therefore \lim_{x \to a_1} (x - a_2) = (a_1 - a_2)$

$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$

$\lim_{x \to a_1} f(x) = \lim_{x \to a_1} (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$

$= \lim_{x \to a_1} (x - a_1) \lim_{x \to a_1} (x - a_2)(x_a - a_3)\ldots(x - a_a)$

$= 0 \times (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a - a_n)0$

जब $a \neq a_1, a_2 \ldots a_n$

$a - a_1$ न तो शून्य है न ही अपरिभाषित है।

इस प्रकार दुसरे गुणनखंड के मान $a_1 - a_2, a_1 - a_3 \ldots, a - a_n$ होंगे

अतः $= \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$

$(a - a_1), (a - a_2)\ldots, (a - a_n)$

प्रश्न 30

यदि $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x| - 1, & x > 1 \end{cases}$ तो a के कितने मानो के लिए $\lim_{a \to a} f(x)$ का अस्तित्व है।

उत्तर-

दिया गया फलन $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x| - 1, & x > 1 \end{cases}$

i. $x = 0$ पर

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 1) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$x = 0$ पर $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

ii. जब $a > 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - x)1 - a$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 - x) = 1 - a$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

अर्थात $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 - a$

iii. जब $a > 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x - 1) = a - 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x - a) = a - 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

अतः $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a - 1$

इस प्रकार जब $a < 0, \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 - a$

$a > 0, \lim\limits_{x\to 0} f(x) = a - 1$

अतः सभी $a, a \neq 0$ के लिए $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ का अस्तित्व है।

प्रश्न 31 यदि फलन f(x), $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} = \pi$ को संतुष्ट करता है, तो $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

जैसे ही $x \to 1$ फलन $\frac{f(x)-2}{x^2-1} = \pi$ (दिया है)

जैसे ही $x \to 1, x^2 - 1 \to 0$

$\Rightarrow f(x) - 2 \to 0$

जिससे, जैसे ही $x \to 1 \frac{f(x)-2}{x^2-1}, \frac{0}{0}$ के रूप में होग

$\Rightarrow$ जैसे ही $x \to 1, f(x) - 2 \to 0$

$\therefore f(x) \to 2$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

प्रश्न 32

किन पूर्णांकों m और n के लिए $\lim_{x \to 0} f(x)$ और $\lim_{x \to 1} f(x)$ दोनों का अस्तित्व है, यदि

$$f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & x < 0 \\ nx + m, & 0 \le x \le 1 \\ nx^3 + x & x > 1 \end{cases}$$

उत्तर-

i. $x = 0$ पर

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (mx^2 + n)$$

$$\lim_{x \to 0^+} = f(x) = \lim_{x \to 0} (nx + m) = m$$

$$\Rightarrow m = n$$

ii. $x = 1$ पर

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (nx + m) = n+m = 2m, m \in R$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (nx^3 + m) = n+m = 2m, m \in R$$

$$\therefore m = n, n \in R \text{ के लिए}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2m, m \in R$$

अतः $\lim_{x \to 0} f(x)$ के अस्तित्व हेतु m = n अनिवार्य रूप से होना चाहिए, m तथा n के किसी भी पूर्णांक मान के लिए $\lim_{x \to 1} f(x)$ का अस्तित्व है।

प्रश्नावली 13.2 (पृष्ठ संख्या 330-331)

प्रश्न 1 x = 10 पर $x^2 - 2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

x = a पर f(x) का अवकलन

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\therefore x = 10 \text{ पर का } x^2 - 2 \text{ अवकलन}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[(10+h)^2-2\right]-(10^2-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10^2+2h+h^2-2-10^2+2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{20+h}{h} = \lim_{h \to 0}(20+h) = 20$$

प्रश्न 2 x = 1 पर x का अवकलज ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-1}{h} = 1$$

प्रश्न 3 x = 100 पर 99x का अवकलज ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(100) = \lim_{h\to0} \frac{99(100+h)-99\times(100)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{99\times h}{h} = 99$$

प्रश्न 4 प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों का अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $x^3 - 27$

(ii) $(x - 1)(x - 2)$

(iii) $\frac{1}{x^2}$

(iv) $\frac{x+1}{x-1}$

उत्तर-

(i) दिया है, $f(x) = x^3 - 27$

$f(x + h) = (x + h)^3 - 27$

$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 27$

$f(x + h) - f(x)$

$= (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 27) - (x^3 - 27)$

$= 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

$= h(3x^2 + 3xh + h^2)$

$$\therefore f(x) = \lim_{h\to 1} \frac{h3x^2+3xh+h^2}{h} = 3x^2$$

$$= \lim_{h\to 1} \frac{h(3x^2+3xh+h)^2}{h} = 3x^2$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2+3xh+h)^2}{h} = 3x^2$$

(ii)

माना $f(x) = (x-1)(x-2)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-1)(x+h-2)-(x\text{-}1)(x-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+hx-2x+hx+h^2-2h-x-h+2)-(x^2-2x-x+2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(hx+hx+h^2-2h-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2hx+h^2-3h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h-3)$$

$$= (2x+0-3)$$

$$= 2x-3$$

(iii)

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x+h) = \frac{1}{(x+h)^2}$$

$$\therefore f(x+h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x^2-(x+h^2)}{x^2(x+h^2)}$$

$$\frac{x^2-[x+2xh+h^2]}{x^2(x+h^2)}$$

$$\frac{-h(2x+h)}{x^2(x+h)^2}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{-h(2x+h)}{h}$$

$$= \frac{-2x}{x^2x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

(iv)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

और $f(x+h) - f(x) = \dfrac{x+h+1}{x+h-1}$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x+1+h}{x-1+h} - \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{(x-1)(x-1)+h(x-1)-(x+1)(x-1)-h(x+1)}{(x-1)(x-h+1)}$$

$$=\frac{h(x-1-x-1)}{(x-1)(x-1+h)}$$

$$=\frac{-2h}{(x-1)(x-1+h)}$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h(x-1)(x-1+h)}$$

$$=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

प्रश्न 5 फलन $f(x)=\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+\cdots+\frac{x^2}{2}+x+1$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $f'(1)=100f'(0)$

उत्तर-

$$\therefore f(x)=\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+\cdots+\frac{x^2}{2}+x+1$$

$$\therefore f(x)=\frac{100x^{99}}{100}+\frac{99x^{98}}{99}+\cdots+\frac{x^2}{2}+x+1$$

$$=x^{99}+x^{98}+\ldots+x+1$$

x = 1 पर, $\therefore f'(x)=1+1+\ldots+x+1$

x = 0 पर, $f'(0)=1$

बायाँ पक्ष $f'(0)=100$

दायाँ पक्ष $=100f'(0)=100\times 1=100$

अतः बायाँ = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 6 किसी अचर वास्तविक संख्या a के लिए $x^n + ax^{n-1} + a^2 x^{n-2} + \ldots + a^{n-1} + a^n$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

हम जानते है कि $\frac{d}{dx}[f(x)] = f(x)$

और $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

माना $f(x) = x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$

इसका अवकलन करने पर

$f'(x) = nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}1$

$= nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$

प्रश्न 7 किन्हीं अचर a और b के लिए।

(i) $(x - a)(x - b)$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।
(ii) $(ax^2 + b)^2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।
(iii) $\frac{x-a}{x-b}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i) माना $f(x) = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$

इसका अवकलन करने पर

$f'(x) = 2x^{2-1} - (a + b)\ 1 + 0$

$= 2x - (a + b)$

(ii) माना $f(x) = (ax^2 + b)^2 = a^2x^4 + 2abx^2 + b^2$

$\therefore f'(x) = a^2 4x^3 + 2ab2x + 0$

$= 4a^2x^3 + 4abx$

$= 4ax(ax^2 + b)$

(iii)

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x-a}{x-b} = \frac{u}{v} \text{ (मान लिया)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(x-a)\right](x-b)-(x-a)\frac{d}{dx}(x-b)}{(x-b)^2}$$

$$= \frac{1.(x-b)-(x+a)\times 1}{(x-b)^2}$$

$$= \frac{a-b}{(x-b)^2}$$

प्रश्न 8 किसी अचर a के लिए $\frac{x^n-a^n}{x-a}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\text{माना } f(x) = \frac{x^n-a^n}{x-a} = \frac{u}{v}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\left[\frac{b}{bx}(x^n-a^n)\right](x-a)-(x^n-a^n)\frac{d}{dx}(x-a)}{(x-a^2)}$$

$$= \frac{nx^{n-1}(nax^{n-1})-x^n+a^n}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{nx^n-anx^{n-1}-x^n+a^n}{(x-a)^2}$$

प्रश्न 9 निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $2x-\frac{3}{4}$

(ii) $(5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$

(iii) $x^{-3}(5 + 3x)$

(iv) $x^5(3 - 6x^{-9})$

(v) $x^{-4}(3 - 4x^{-5})$

(vi) $\frac{2}{x-1} - \frac{x^2}{3x-1}$

उत्तर-

(i)

मान लीजिए $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$

$$\therefore f'x = 2\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= 2.1 + 0 = 2$$

(ii)

मान लीजिए $f(x) = (5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv'$$

$$f'(x) = \left[\frac{d}{dx}(5x^3 + 3x - 1)\right]$$

$$(x - 1)(5x^3 + 3x - 1)\frac{d}{dx}(x - 1)$$

$$= (15x^3 + 3)(x - 1) + (5x^3 + 3x - 1).1$$

$$= 15x^3 + 3x - 15x^2 - 3 + 5x^3 + 3x - 1$$

$$= 20x^3 - 15x^2 + 6x - 4$$

(iii)

माना $f(x) = x^{-3}(5 + 3x)$

$= 5x^{-3} + 3x.x^{-3} = 5x^{-3} + 3x^{-2}$

अवकलन करने पर

$f'(x) = 5(-3)x^{-3-1} + 3(-2)x^{-2-1}$

$= -15x^{-4} - 6x^{-3}$

$= -\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^3}(5 + 2x)$

(iv)

माना $f(x) = x^5(3 - 6x^{-9})$

$= 3x^5 - 6.x^{5-9} = 3x - 6x^{-4}$

$\therefore f'(x) = 3.5x^{5-1} - 6(-4)x^{-4-1}$

$= 15x^4 + 24x^{-5}$

$= 15x^4 + \frac{24}{x^5}$

(v)

माना $f(x) = x^{-4}(3 - 4x^{-5})$

$3.x^{-4} - 4x^{-4}x^{-5} = 3x^{-4} - 4x^{-9}$

अवकलन करने पर

$$f'(x) = 3.(-4)x^{-4-1} - 4 \times (-9)x^{9-1}$$

$$= -12x^{-5} + 36x^{-10}$$

$$= -\frac{12}{x^5} + \frac{36}{x^{10}}$$

(vi)

माना $f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{x^2}{3x-1}$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x+1}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)$$

$$= \frac{\left[\frac{d}{dx}(2)\right](x+1)-2\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{\left[\frac{d}{dx}(x^2)\right](3x-1)-x^2\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{0-2.1}{(x+1)^2} - \frac{2x(3x-1)-x^2.3}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{6x^2-2x-3x^2}{(3x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{3x^2-2x^2}{(3x-1)^2}$$

प्रश्न 10 प्रथम सिद्धांत से cos x का अवकलज ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

माना $f(x) = \cos x$

$$f(x+h) = \cos(x+h)$$

$$f(x+h) - f(x) = \cos(x+h) - \cos x$$

$$= -2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}$$

$$= -2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} = \left[-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = -\sin x$$

$$\left[\because \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right]$$

अतः $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

प्रश्न 11 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $\sin x \cos x$
(ii) $\sec x$
(iii) $5\sec x + 4\cos x$
(iv) $\operatorname{cosec} x$
(v) $3\cot x + 5\operatorname{cosec} x$
(vi) $5\sin x - 6\cos x + 7$

(vii) $2 \tan x - 7 \sec x$

उत्तर-

(i)

माना $f(x) = \sin x \cos x$

$\because (uv)' = u'v + uv'$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin x \cos x) = \left(\frac{d}{dx}\sin x\right)\cos x + \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)$

$= \cos x \cos x + \sin x(-\sin\ x)$

$= \cos 2x - \sin 2x = \cos 2x$

(ii)

माना $f(x) = \sec x$

$\therefore f(x+h) = \sec(x+h)$

$f(x+h) = \sec(x+h) - \sec x$

$$= \frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left[x+\frac{h}{2}\right]}{\cos(x+h\cos x)}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x.\cos x}\left[\because \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = 1\right.$$

$$= \frac{1}{\cos x}.1.\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

(iii)

माना $f(x) = 5\sec x + 4\cos x$

$\because \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ (भाग (2) देखिए)

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\therefore f'(x) = 5\frac{d}{dx}(\sec x) + 4\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= 5\sec x\tan x + 4(-\sin x)$$

$$= 5\sec x\tan x - 4\sin x$$

(iv)

माना

$$f'(x) = \text{cosec } x$$

और $f(x+h) = \text{cosec}(x+h)$

$$f(x+h) - f(x) = \text{cosec}(x+h) - \text{cosec}x$$

$$\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \frac{-2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h} = \frac{-2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h} = \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\sin(x+h)\sin x}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{-\cos x}{\sin x\sin x}\right).1$$

$$= \frac{1}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cosec} x \cot x$$

(v)

माना $f(x) = \cot x$

$\therefore f(x+h) = \cot(x+h)$

$f(x+h) - f(x) = \cot(x+h) - \cot x$

$$\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{\cos(x+h)\sin x - \cos x\sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$\frac{[\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x]}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$\frac{\sin(x+h-x)}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$\frac{\sin -h}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin -h}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin h}{h}\right)\frac{1}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$1. = \frac{1}{\sin x \sin x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$= f'(x) = 3\frac{d}{dx}\cot x + 5\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x$$

$$= 3(-\operatorname{cosec}^2 x) + 5(-\operatorname{cosec} x \cot x)$$

$$= 3(-\operatorname{cosec}^2 x) - 5\operatorname{cosec} x \cot x$$

(vi)

माना $f(x) = 5\sin x - 6\cos x + 7$

$$\therefore \frac{d}{dx}\sec x = \sin x \ \tan x$$

$$\therefore f'(x) = 5\frac{d}{dx}\sin x - 6\frac{d}{dx}\cos x + \frac{d}{dx}(7)$$

$$= 5\cos x - 6 - (-\sin x) + 0$$

$$= 5\cos x + 6\sin x$$

(vii)

$$\text{माना } f(x) = 2\tan x - 7\sec x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \ \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h-\tan x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= 2\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{\sin(x+h-x)}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos x \cos x} = \sec^2 x$$

$$= f'(x) = 2\frac{d}{dx}(\tan x) - 7\frac{d}{dx}(\sec x)$$

$$= 2.\sec^2 x - 7\sec x \tan x$$

$$= 2.\sec^2 x - 7\sec x \tan x$$

विवध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 335-336)

प्रश्न 1 प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $-x$

(ii) $(-x)^{-1}$

(iii) $\sin(x+1)$

(iv) $\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$

उत्तर-

(i)

मान लीजिए $= \lim\limits_{h\to 0} f(x)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\therefore f(x+h) = -(x+h) = -x - h$

$\frac{d}{dx}(-x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h-f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{-x-h+x}{h} = -1$

(ii)

मान लीजिए $f(x) = (-x)^{-1} = \frac{1}{x}$

$\therefore f(x+h) = -\frac{1}{x+h}$

$\therefore f(x+h) - f(x) = -\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} = \frac{-x+x+h}{(x+h)x}$

$= \frac{h}{x(x+h)}$

$f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{x(x+h)} = \frac{1}{x^2}$

(iii)

मान लीजिए $f(x) \sin(x+1)$

$\therefore f(x+h) \sin(x+h+1)$

$$f(x+h) - f(x) = \sin(x+h+1) - \sin(x+1)$$

$$2\cos\left(x+1+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}2\cos\left(x+1+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}2\cos(x+1+h)\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$$

$$= \cos(x+1)\left(\because \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right)$$

(iv)

मान $f(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$

$$f(x+h) = \cos\left(x+h-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\therefore f(x+h) - f(x) = \cos\left(x+h-\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= -2\sin\left(x-\frac{\pi}{8}+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{8}+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\sin\left(x - \frac{\pi}{8} + \frac{h}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$$

$$= -\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\left(\because \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right)$$

प्रश्न 2 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

(x + a)

उत्तर-

$$\frac{d}{dx}(x + a) = \frac{d}{dx}(a) = 1 + 0 = 0$$

प्रश्न 3 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$(px + q)\left(\frac{r}{x} + s\right)$

उत्तर-

$$\text{माना } f(x) = (px+q)\left(\frac{r}{x} + s\right)$$

$$(uv)' = u'v' + uv'$$

$$\therefore f'(x) = \left(\frac{d}{dx}(px+q)\right)\left(\frac{r}{x} + s\right) + (px+q)\left(\frac{r}{x} + s\right)$$

$$= p\left(\frac{r}{x} + s\right) + (px+q)\left(\frac{r}{x^2}\right)$$

$$= \frac{pr}{x} + ps - \frac{pr}{x} - \frac{pr}{x^2} = ps - \frac{pr}{x^2}$$

प्रश्न 4 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$(ax + b)(cx + d)^2$

उत्तर-

$$\text{माना } f(x) = (ax+b)(cx+d)^2$$

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}\left[(ax+b)(cx+d)^2\right]$$

$$= \left[\frac{d}{dx}(ax+b)\right](cx+d)^2 + (ax+b)\frac{d}{dx}(cx+b)^2$$

$$= (cx + d)^2 + c(ax+b).2c(cx+d)$$

$$= 2c(ax+b)(cx + d) + a(cx+d^2)$$

प्रश्न 5 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$\frac{ax + b}{cx + d}$

उत्तर-

$$\text{माना } f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v' - uv'}{v^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(ax+b)(cx+d) - (ax+b)\frac{d}{dx}(cx+d)\right]}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{acx+ad-acx+bc}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

प्रश्न 6 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

उत्तर-

$$\text{माना } f(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(x+1)\right]-(x\text{-}1)-(x+1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1(x\text{-}1)-(x+1)1.}{(x\text{-}1)^2}$$

$$= \frac{x-1-x-1}{(x\text{-}1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x\text{-}1)^2}$$

प्रश्न 7 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{1}{ax^2 + bx+c}$$

उत्तर-

$$\text{माना } f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}1\right](ax^2+bx+c)-1\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$= \frac{0.(ax^2+bx+c)(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$= \frac{-(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

प्रश्न 8 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$f(x) = \frac{ax+b}{px^2 + qx+r}$$

उत्तर-

$$\text{माना } \frac{d}{dx} = \left(\frac{ax+b}{px^2+qx+r}\right)$$

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(ax+b)\right](px^2+qx+r)-(ax+b)\frac{d}{dx}(px^2+qx+r)}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{a(px^2+qx+r)(a)-(ax+b)(2px+q)}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{(apx^2+aqx+ar)-[2apx^2-aqx-2bpx-bq]}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{-apx^2ar-2bpx-dq}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{-apx^2-2bpx+ar-bq}{(px^2+qx+r)^2}$$

प्रश्न 9 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{px^2+qx+r}{ax+b}$$

उत्तर-

$$\text{माना } \frac{d}{dx} = \left(\frac{px^2+qx+r}{ax+b}\right)$$

$$= \frac{\left[\frac{d}{dx}(px^2+qx+r)\right](ax+b)-(px^2+qx+r)\frac{d}{dx}(ax+b)}{(ax+b)^2}$$

$$= \frac{(2px+q)(ax+b)-(px^2qx+r)a}{(ax+b)^2}$$

$$= \frac{2apx^2+aqx+2bpx+bq+apx^2-aqx-ar}{(ax+b)^2}$$

$$= \frac{apx^2-2bpx+bq-ar}{(ax+b)^2}$$

प्रश्न 10 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^2}+\cos x$$

उत्तर-

$$\text{माना } f(x) = \frac{a}{x^4} - \frac{b}{x^2} + \cos x$$

$$= ax^{-4} - bx^{-2} + \cos x$$

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(ax^4) - \frac{d}{dx}(bx^{-2}) + \frac{d}{dx}\cos x$$

$$= a(4ax^{-5}) - b(-2)x^{-3} - \sin x$$

$$= \frac{-4a}{x^5} + \frac{2b}{x^3} - \sin x$$

प्रश्न 11 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$4\sqrt{x} - 2$

उत्तर-

$$\text{मान } \frac{d}{dx} = 4\sqrt{x} - 2 = \frac{d}{dx} = \left(4x\frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= 4 \times \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 0 = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

प्रश्न 12 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$(ax + b)^n$

उत्तर-

मान $f(x) = (ax+b)^n$

x के आपेक्ष अवकलन करने पर

$$f(x) = n(ax + b)^n - 1\frac{d}{dx}(ax + b)$$

$$= n(ax + b)^{n\text{-}1}a$$

$$= na(ax + b)^{n-1}$$

प्रश्न 13 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$(ax + b)^n(cx + d)^m$

उत्तर-

मान $f(x) = (ax + b)^n(cx + d)^m$

$$\therefore f(x) = \left[\frac{d}{dx}(ax+b)^n(cx+d)^m + \frac{d}{dx}(ax+b)^n(cx+d)^{m-1}\right.$$

$$= na(ax+b)^{n\text{-}1} = (cx+d)^m + na(ax+b)^n mc(cx+d)^{m-1}$$

$$= (ax+b)^{n\text{-}1} = (cx+d)^{m-1}[na(cx+d)^n + mc(ax+b)]$$

प्रश्न 14 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$\sin(x + a)$

उत्तर-

$$\text{मान } f(x) = \sin(x+a)$$

x + a को u रखने पर

$$f(x) = \sin u$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin u) = \frac{d}{du}(\sin u)\frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \frac{d}{dx}(x+a) = \cos(x+a)1$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\sin(x+a) = \cos(x+a)$$

प्रश्न 15 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

cosec x cot x

उत्तर-

$$\text{मान } f(x) = \text{cosec } x \cot x$$

$$\because (uv) = u'v' + uv'$$

$$f(x) = \left(\frac{d}{dx}\text{cosec } x\right)\cot x + \text{cosec } x \frac{d}{dx}(\cot x)$$

$$= +\text{cosec}^3 x - \text{cosec } x \cot^2 x$$

$$= (-\text{cosec } x \cot x) \cot x + \text{cosec } x(-\text{cosec}^2 x)$$

प्रश्न 16 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

उत्तर-

$$\text{मान } f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v'-uv'}{v^2}$$

$$f(x)=\frac{\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)\times(1+\sin x)-(\cos x)\frac{d}{dx}-(\cos x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\times\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-(\sin^2 x-\cos^2 x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-1}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{1}{1+\sin x2}$$

प्रश्न 17 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$$

उत्तर-

$$\text{माना } f(x) = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(\sin x+\cos x)\right](\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\cos x+\sin x)-(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cos x)-(\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$= \frac{1-2\sin x\cos x+1+2\cos^2 x+\sin^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$= \frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$$

प्रश्न 18 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{\sec x-1}{\sec x+1}$$

उत्तर-

$$\text{माना } f(x) = \frac{\sec x-1}{\sec x+1}$$

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(\sec x-1)\right](\sec x+1)-(\sec x-1)\frac{d}{dx}(\sec x-1)}{(\sec x+1)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\sec x+1)-(\sec x-1)(\sec x \tan x)}{(\sec x+1)^2}$$

$$\frac{\sec x \tan x+\sec x \tan x-\sec^2 x \tan x+\sec x \tan x}{(\sec x+1)^2}$$

$$\frac{2 \sec x \tan x}{(\sec x+1)^2}$$

प्रश्न 19 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$\sin^n + x$

उत्तर-

$$\text{मान } f(x) = \sin^n + x$$

sin x को u रखने पर

$$f(x) = u^n$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$f(x) = \frac{d}{dx}u^n = \frac{d}{du}u^n \times \frac{du}{dx}$$

$$= nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$= n \sin^{n-1} \times x \frac{d}{dx}\sin x = n \sin^{n-1} x \cos x$$

$$= n \cos x \sin^{n-1} x$$

प्रश्न 20 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{a+b \sin x}{c+d \cos x}$$

उत्तर-

$$\text{मान } f(x) = \frac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(a+d\sin x)\right](c+d\cos x)-(a+b\sin x)\frac{d}{dx}(c+d\cos x)}{(c+d\cos x)^2}$$

$$= \frac{d\cos x(c+d\cos x)-(a+b\sin x)(-d\sin x)}{(c+d\cos x)^2}$$

$$= \frac{cd\cos x+bd\cos^2 x+ad\sin x+bd\sin^2 x)}{(c+d\cos x)^2}$$

$$= \frac{bc\cos x+ad\sin x+bd(\cos^2 x+\sin^2 x)}{(c+d\cos x)^2}$$

$$= \frac{bc\cos x+ad\sin x+bd}{(c+d\cos x)^2}$$

प्रश्न 21 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{\sin(x+a)}{\cos x}$$

उत्तर-

$$\text{माना } f(x) = \frac{\sin(x+a)}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v+uv'}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin(x+a)}{\cos x}\right]=\frac{\left[\frac{d}{dx}\sin(x+a)\right]\cos x-\sin(x+a)\frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos(x+a)\cos x-\sin(x+a)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos(x+a)\cos x+\sin(x+a)-\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos(x+a\text{-}x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos a}{\cos^2 x}$$

प्रश्न 22 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$x^4(5\sin x-3\cos x)$

उत्तर-

$$\text{मान } f(x)=x^4(5\sin x-3\cos x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}x^4(5\sin x-3\cos x)=\left(\frac{d}{dx}x^4\right)(5\sin x-3\cos x)$$

$$=x^3(\sin x-3\cos x)+x^4(5\sin x+3\cos x)$$

$$=x^3(20\sin x-12\cos x+5\cos x+3\sin x)$$

प्रश्न 23 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$23(x^2+1)\cos x$

उत्तर-

$$\frac{d}{dx}(x^2+1)\cos x = \left[\frac{d}{dx}(x^2+1)\right]\cos x + (x^2+1)\frac{d}{dx}\cos x$$

$$= 2x\cos x + (x^2+1)(-\sin x)$$

$$= 2x\cos x - (x^2+1)(\sin x)$$

$$= -x^2\sin x - \sin x + 2x\cos x$$

प्रश्न 24 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)$

उत्तर-

$$(uv') = u'v + uv'$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)$$

$$= \left[\frac{d}{dx}(ax^2+\sin x)\right](p+q\cos x) + (ax^2+\sin x)\frac{d}{dx}(p+q\cos x)$$

$$= (2ax+\cos x)(p+q\cos x) + (ax^2\sin x)(\text{-}q\sin x)$$

$$\text{-}q\cos x(ax^2\sin x) + (p+q\cos x)(2ax\cos x)$$

प्रश्न 25 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$(x+\cos x)(x-\tan x)$

उत्तर-

$$(uv') = u'v + uv'$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x + \cos x)(x - \tan x)$$

$$= \left[\frac{d}{dx}(x + \cos x)\right](x - \tan x)(1 - \cos x)\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= (1 - \sin x)(x - \tan x) + (x + \cos x)(1 - \sec^2 x)$$

$$= (1 - \sin x)(x - \tan x) - (x + \cos x)\tan^2 x$$

प्रश्न 26 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{4x + 5\sin x}{3x + 7\cos x}$$

उत्तर-

$$\frac{d}{dx}(uv') = u'v + uv'$$

$$\frac{d}{dx}\frac{4x+5\sin x}{3x+7\cos x}$$

$$= \frac{\left[\frac{d}{dx}(4x+5\sin x)\right](3x+7\cos x)-(4x+5\sin x)\frac{d}{dx}(3x+7\cos x)}{(3x+7\cos x)^2}$$

$$= \frac{(4x+5\sin x)(3x+7\cos x)(4+5\cos x)(3-7\sin x)}{(3x+7\cos x)^2}$$

$$= \frac{(12x+28\cos x+15\cos x+35\cos^2 x)-(12x-28\sin x-15\sin x+35\sin^2 x)}{(3x+7\cos x)^2}$$

$$= \frac{28(\cos x+x\sin x)+15(x\cos x-\sin x)+35(\cos^2 x+\sin^2 x)}{(3x+7\cos x)^2}$$

$$= \frac{35+15x\cos x+28\cos x+28x\sin x-15\sin x}{(3x+7\cos x)^2}$$

प्रश्न 27 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$$

उत्तर-

$$\text{माना } f(x) = \frac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$$

$$\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v+uv'}{v^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\left(\frac{d}{dx^2}\right)\sin x - x^2\frac{d}{dx\sin}x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{x(2\sin x-(x\cos x)}{\sqrt{2}\sin^2 x}$$

$$= \frac{x\cos\frac{\pi}{4}[2\sin x - x\cos x]}{\sin^2 x}$$

प्रश्न 28 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{x}{1+\tan x}$$

उत्तर-

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v+uv'}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+\tan x}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dx}(x)\right)(1+\tan x)-x\frac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)}$$

$$= \frac{(1+\tan x)-x\sec^2 x}{(1+\tan x)}$$

$$= \frac{1+\tan x-x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

प्रश्न 29 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$(x + \sec x)(x - \tan x)$

उत्तर-

$$\frac{d}{dx}(uv') = u'v + uv'$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x + \sec x)(x - \tan x)$$

$$= \left[\frac{d}{dx}(x + \sec x)\right](x - \tan x) + (x + \sec x)\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= (1 + \sec x(x - \tan x) + (x + \sec x)(1 - \sec^2 x)$$

प्रश्न 30 निम्नलिखित फलन के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

$$\frac{x}{1 + \tan x}$$

उत्तर-

$$f(x) = \frac{x}{1+\tan x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(x)\right] \sin^n x - x\frac{d}{dx}(\sin^n x)}{(\sin^{n-1} x)}$$

$$\frac{\sin^n x - xn.\cos x \sin^{n-1} x}{\sin^{2n} x}$$

$$\frac{\sin^{n-1} x(\sin x - nx \cos x)}{\sin^{2n} x}$$

$$\frac{\sin x - nx \cos x}{\sin^{n-1} x}$$