गणित

अध्याय-12: सांख्यिकी

Fukey Education

परिभाषा

हम जानते हैं कि संख्यात्मक या अन्य तथ्य या चित्र जिन्हें आंकड़े (data) कहते हैं एक खास उद्देश्य से एकत्रित किए जाते हैं। Data लैटिन शब्द datum का बहुवचन है।

Statistics शब्द लैटिन शब्द status से बना है जिसका अर्थ एक (राजनैतिक) राज्य होता है।

सांख्यिकी का काम आंकड़ों का संग्रह करना, संगठित करना, विश्लेषित करना और निर्वचन करना है।

आंकड़ों का संग्रह

आंकड़े दो प्रकार के होते हैं। एक प्राथमिक आंकड़े और दूसरे गौण आंकड़े।

प्राथमिक आंकड़ेः जब अन्वेषक ने अपने दिमाग में एक निश्चित उद्देश्य रखकर सूचनाओं को एकत्रित किया हो तो इस प्रकार एकत्रित किए गए आंकड़ों को प्राथमिक आंकड़े कहा जाता है।
गौण आंकड़े: जब किसी स्रोत से, जिसमें सूचनाएं पहले से ही एकत्रित हैं, आंकड़े प्राप्त किए गए हों तो उन आंकड़ों को गौण आंकड़े कहा जाता है।

इस प्रकार के आंकड़े का प्रयोग, जिसे किसी और ने इन्हें अन्य संदर्भ में एकत्रित किया है, यह सुनिश्चित करने के बाद ही कि ये स्रोत विश्वसनीय हैं, काफी सावधानी के साथ करना चाहिए।

आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण

आंकड़ों का संग्रह करने के बाद अन्वेषक को इन आंकड़ों को ऐसे रूप में प्रस्तुत करने की विधियों को ज्ञात करना होता है जो अर्थपूर्ण हों और सरलता से समझी जा सकती हों।

76 54 25 95 60 44 75 78 35 62

आंकड़ों के इस रूप को यथा प्राप्त आंकड़े कहते हैं।

छात्रों द्वारा प्राप्त न्यूनतम अंक 25 है और छात्रों द्वारा प्राप्त अधिकतम अंक 95 है।

आंकड़ों को आरोही क्रम या अवरोही क्रम में लिखने पर काफी समय लग सकता है, विशेष रूप से तब, जबकि प्रयोग में प्रेक्षणों की संख्या अधिक हो, जैसा कि अगले उदाहरण में आप देख सकते हैं।

25 35 44 54 60 62 75 76 78 95

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

आंकड़ों के अधिकतम और न्यूनतम मानों के बीच का अंतर को आंकड़ों का परिसर कहा जाता है।

अतः, इस उदाहरण में परिसर 95 - 25 = 70 है।

बारंबरता

6	7	5	7	7	8	7	6	10	7
4	10	6	8	8	9	5	6	4	8
9									

अतः 10 की बारंबरता 2 है।

एक निश्चित अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या को इस अंक की बारंबरता कहा जाता है।

अंक	बारंबरता
4	2
5	2
6	4
7	5
8	4
9	2
10	2

इस सारणी को **अवर्गीकृत बारंबरता बंटन सारणी** या केवल **बारंबरता बंटन सारणी** कहा जाता है।

वर्गीकृत बारंबरता बंटन सारणी

1, 1, 1, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 18

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

इन वर्गों को वर्ग या वर्ग अंतराल कहते हैं और माप को वर्ग माप या वर्ग चौड़ाई कहा जाता है।

यहां माप 4 है।

इन सभी वर्गों में सबसे छोटी संख्या को निम्न वर्ग सीमा और सबसे बड़ी संख्या को उपरि वर्ग सीमा कहते हैं।

जैसे, 0- 3, 0 निम्न वर्ग सीमा है और 3 उपरि वर्ग सीमा है।

आंकड़े	बारंबरता
0 – 3	3
4 – 7	7
8 – 11	12
12 – 15	7
16 – 19	9

इस प्रकार की सारणियों को **वर्गीकृत बारंबरता बंटन सारणी** कहते हैं।

आंकड़ों का आलेखीय निरूपण

जब आंकड़ों को सीखने वालों के सामने चित्रात्मक (या आलेखीय) रूप में निरूपित किया जाता है तो यह निरूपण को ज्यादा दर्शनीय और समझने योग्य बनाता है।

आंकड़ों को आलेखीय रूप में निरूपित करने के कई प्रकार हैं।

(क) दण्ड आलेख

(ख) एकसमान चौड़ाई और परिवर्ती चौड़ाइयों वाले आयतचित्र

(ग) बारंबरता बहुभुज

दण्ड आलेखः दण्ड आलेख आंकड़ों का एक चित्रीय निरूपण होता है जिसमें प्रायः एक अक्ष (मान लीजिए x अक्ष) पर एक चर को प्रकट करने वाले एक समान चौड़ाई के दण्ड खींचे जाते

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

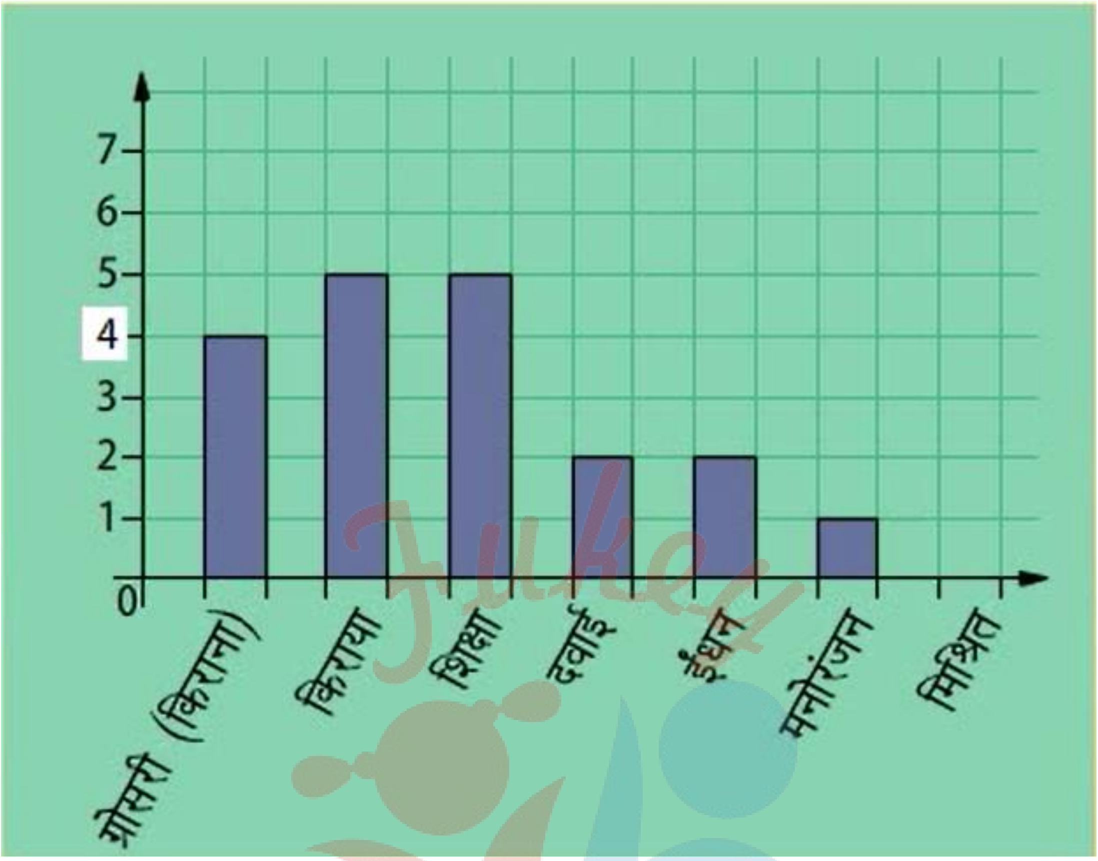
हैं जिनके बीच में बराबर-बराबर दूरियां छोड़ी जाती हैं। चर के मान दूसरे अक्ष (मान लीजिए y अक्ष) पर दिखाए जाते हैं और दण्डों की ऊंचाईयां चर के मानों पर निर्भर करती हैं।

किस दिन उसने सबसे अधिक चाकलेट खाई थी?

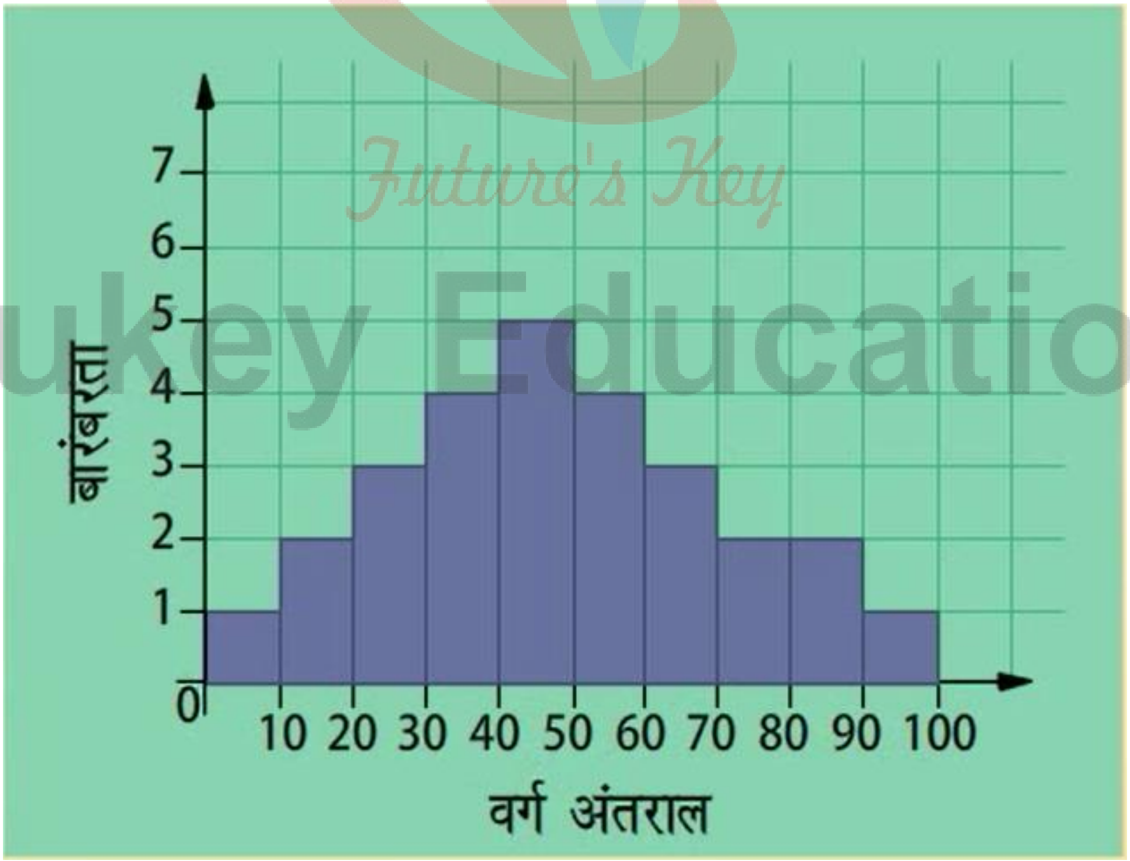
दण्ड आलेख का निरूपण

वस्तुएं	खर्च
ग्रोसरी (किराना)	4000
किराया	5000
बच्चों की शिक्षा	5000
दवाई	2000
ईंधन	2000
मनोरंजन	1000
मिश्रित	1000
कुल	20,000

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



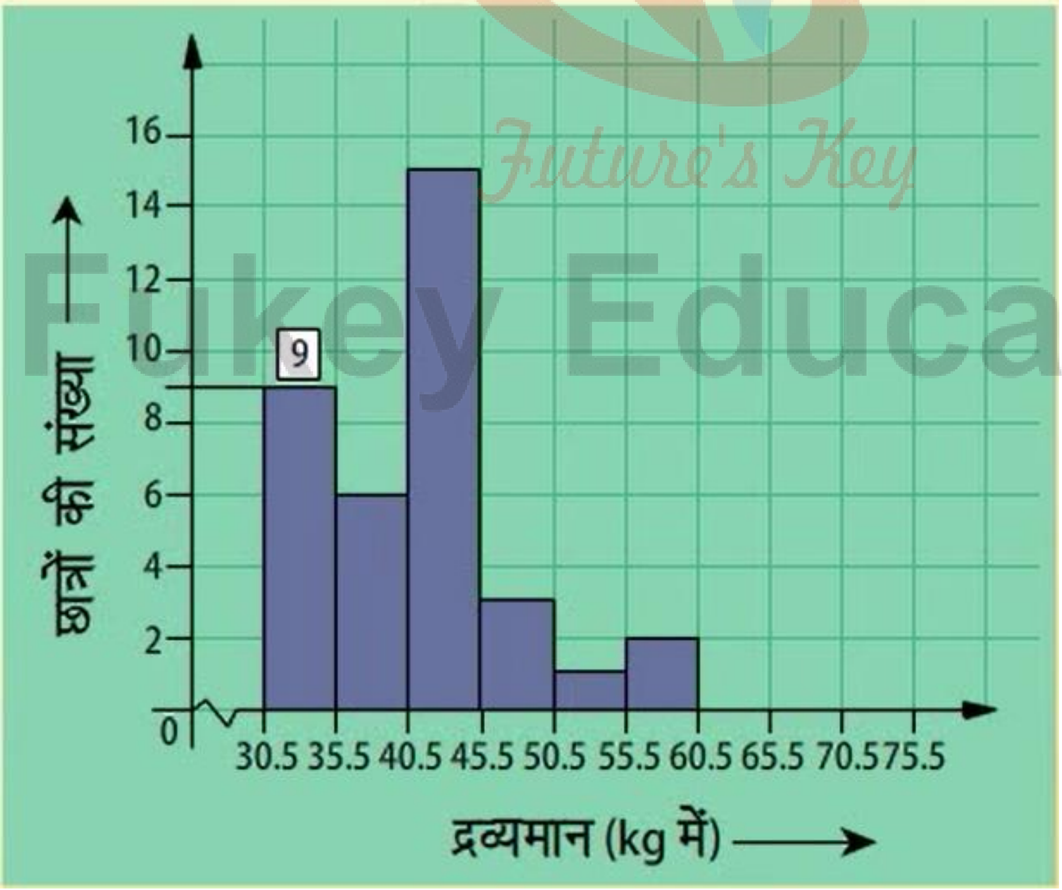
आयतचित्र



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

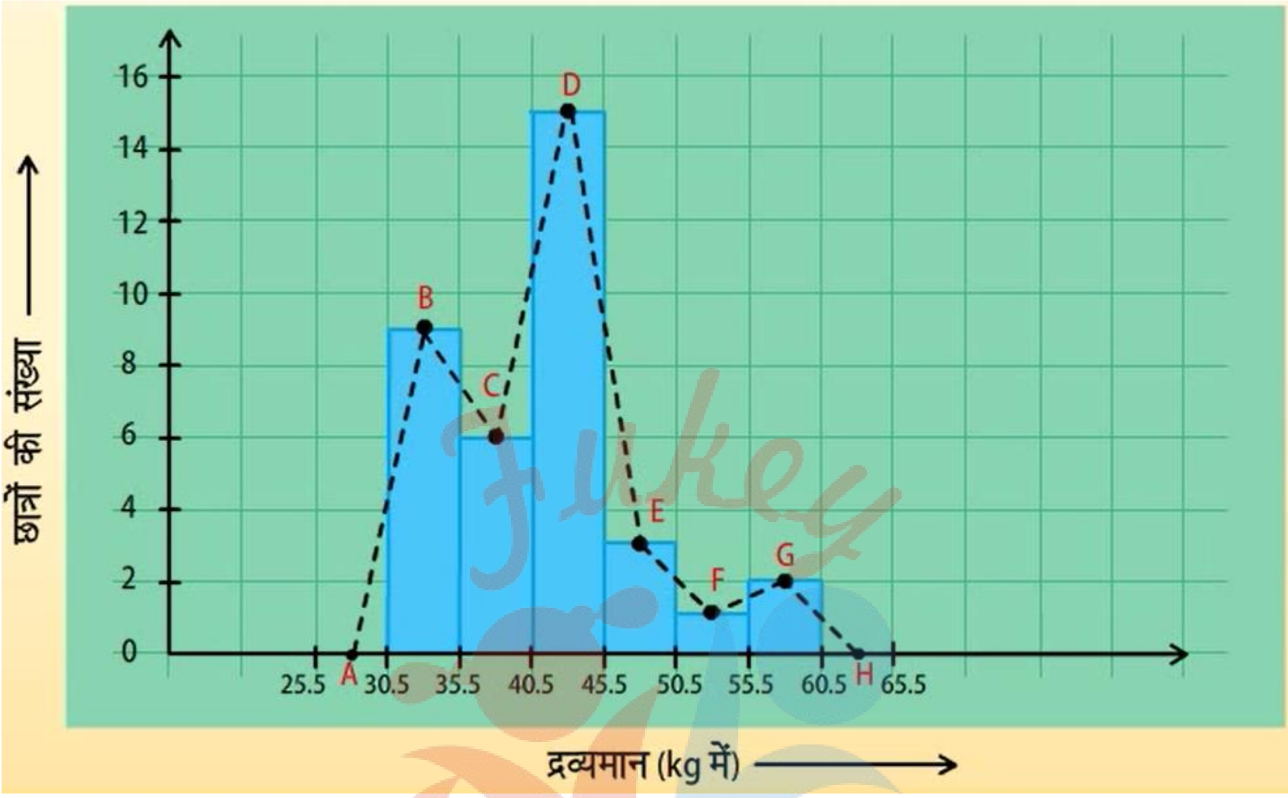
द्रव्यमान (kg में)	छात्रों की संख्या
30.5 – 35.5	9
35.5 – 40.5	6
40.5 – 45.5	15
45.5 – 50.5	3
50.5 – 55.5	1
55.5 – 60.5	2
कुल	36

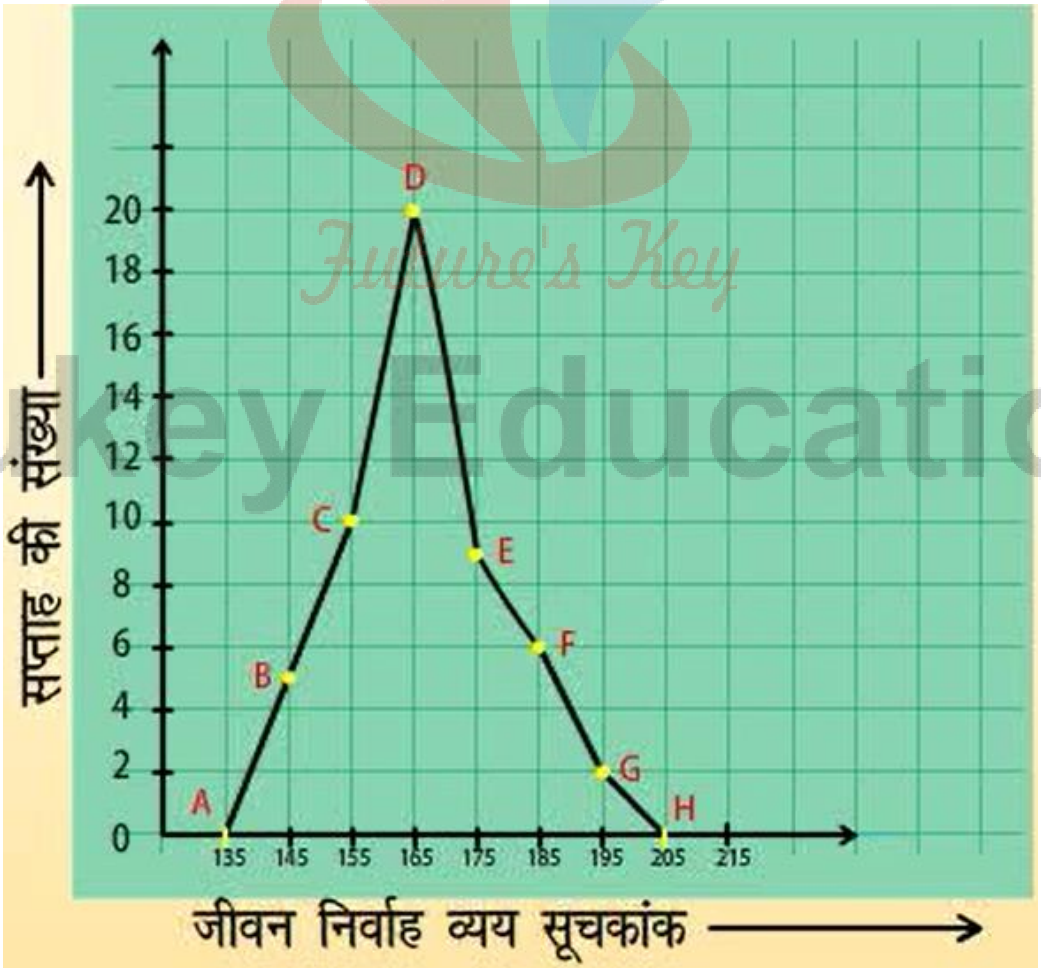
आयतचित्र



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

बारंबरता बहुभुज


छात्रों की संख्या
16
14
12
10
8
6
4
2
0
A B C D E F G H
25.5 30.5 35.5 40.5 45.5 50.5 55.5 60.5 65.5
द्रव्यमान (kg में)


सप्ताह की संख्या
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
A B C D E F G H
135 145 155 165 175 185 195 205 215
जीवन निर्वाह व्यय सूचकांक

आयतचित्र बनाए बिना ही बारंबरता बहुभुजों को स्वतंत्र रूप से भी बनाया जा सकता है। इसके लिए हमें आंकड़ों में प्रयुक्त वर्ग अंतरालों के मध्य-बिन्दुओं की आवश्यकता होती है। वर्ग अंतरालों के इन मध्य-बिंदुओं को वर्ग-चिह्न कहा जाता है। वर्ग अंतराल के वर्ग-चिह्न प्राप्त करने के लिए हमें सभी उपरि सीमाओं और निम्न सीमाओं का योग करके उसे 2 से विभाजित कर देते हैं।

$$\text{वर्ग} - \text{चिह्न} = \frac{\text{उपरिसीमा} + \text{निम्नसीमा}}{2}$$

बारंबरता बहुभुज समान प्रकृति के दो अलग-अलग आंकड़ों की तुलना करने में बहुत उपयोगी होता है। जैसे, एक ही विद्यालय के दो फुटबाल टीमों के प्रदर्शन की तुलना।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

केन्द्रीय प्रवृत्ति का आशय आंकड़ों के माध्य या किसी खास मान से होता है और इसका मापन माध्य, माध्यक और बहुलक से किया जाता है। आइए एक-एक कर इनके बारे में जानें।

माध्यः अनेक प्रेक्षणों का माध्य (या औसत) सभी प्रेक्षणों के मानों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

माध्यकः माध्यक दिए हुए प्रेक्षणों में वह मान होता है जो इसे ठीक-ठीक दो भागों में विभक्त कर देता है।

जब प्रेक्षणों की संख्या n विषम होती है, तब माध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ प्रेक्षण का मान होता है।

उदाहरण के लिए, यदि n = 13 है तो $\left(\frac{13+1}{2}\right)^{th}$ माध्यमक होगा जो कि 7^{th} प्रेक्षण है।

और प्रेक्षणों की संख्या n सम होती है, तब माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ प्रेक्षणों का माध्य होता है।

उदाहरण के लिए, यदि n = 16 हो तो $\left(\frac{16}{2}\right)^{th}$ और $\left(\frac{16+1}{2}\right)^{th}$ प्रेक्षणों के मानों का माध्य अर्थात 8^{th} और 9^{th} प्रेक्षणों के मानों का माध्य ही माध्यक होगा।

बहुलक: बहुलक प्रेक्षण का वह मान होता है जो बार-बार घटित होता रहता है, अर्थात अधिकतम बारंबरता वाले प्रेक्षण को बहुलक कहा जाता है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

माउण्ट राइवल प्रत्येक वर्ष एक फुटबाल प्रतियोगिता आयोजित करता है। इस वर्ष 10 वें खेल में घरेलु टीम की ओर से सबसे अधिक गोल करने वाले ने 7, 5, 0, 7, 8, 5, 5, 4, 4 और 5 गोल किए। माध्य स्कोर क्या है?

आइए हम एक चर xi का प्रयोग करें जो कि i वें प्रेक्षण को प्रकट करता है। इस स्थिति में i का मान 1 से 10 के बीच हो सकता है। अतः हमारा पहला प्रेक्षण x_1 है, और दूसरा प्रेक्षण x_2 है और x_{10} तक सभी मान इसी प्रकार होंगे।

यहां $x_1 = 7$ पहले प्रक्षेण का मान है।

इसी प्रकार $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 7$, $x_5 = 8$, $x_6 = 5$, $x_7 = 5$, $x_8 = 4$, $x_9 = 4$ और $x_{10} = 5$

अतः माध्य

$$\bar{x} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}}{10}$$

$$= \frac{7 + 5 + 0 + 7 + 8 + 5 + 5 + 4 + 4 + 5}{10}$$

$= \frac{50}{10} = 5$ अतः माध्य स्कोर 5 है।

$x_1 + x_2 + x3 + \ldots\ldots\ldots + x_{30}$

अतः $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_{30}$ लिखने के बजाय हम इसे x का योग लिखते हैं जहां

$$\sum_{i=1}^{30} xi$$

यह अवर्गीकृत बारंबरता के लिए है।

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} fi\, xi}{\sum_{i=1}^{n} fi}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

20 छात्रों द्वारा प्राप्त अंको (10 में से) का बहुलक ज्ञात कीजिए:

4,6,5,9,3,2,7,7,6,5,4,9,10,10,3,4,7,6,9,9

हम जानते हैं कि बहुलक उस प्रेक्षण का मान है जिसकी बारंबरता अधिकतम होती है।

4,6,5,9,3,2,7,7,6,5,4,9,10,10,3,4,7,6,9,9

आरोही क्रम

2,3,3,4,4,4,5,5,6,6,6,7,7,7,9,9,9,9,10,10

9 अंको का बहुलक है।

Statistics (सांख्यिकी)

Statistics शब्द लैटिन के "Status" या इटैलियन शब्द "Statista" से आया है। इन शब्दों का अर्थ "राजनैतिक राज्य" या सरकार होता है। शेक्सपीयर ने अपने नाटक हैमलेट (1602) में Statistics शब्द का प्रयोग किया है। पुराने समय में सांख्यिकी का प्रयोग शासकों द्वारा किया जाता था। लेकिन सांख्यिकी का प्रयोग शासकों और राजाओं तक ही सीमित था जो इसका प्रयोग अपने सैनिक क्षमता, संपत्ति, करों और दूसरे सरकारी मदों के आंकलन के लिए अपने राज्य की भूमि, कृषि, वाणिज्य, जनसंख्या की गणना के लिए किया करते थे।

सारांश

एक निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किए गए तथ्यों और अंकों को आंकड़ा कहते हैं। ८) सांख्यिकी अध्ययन का वो क्षेत्र है जिसमें आंकड़ों के प्रति प्रस्तुतिकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन पर विचार किया जाता है?

अवर्गीकृत आंकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति की तीन माप हैं: माध्यः प्रेक्षणों के सभी मानों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देने पर माध्य प्राप्त हो जाता है। इसमे x प्रकट किया जाता है।

$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$ किसी अवर्गीकृत बारंबारता सारणी के लिए, यह $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} fi\,xi}{\sum_{i=1}^{n} fi}$

माध्यकः माध्यक सबसे मध्य वाले प्रेक्षण का मान होता है। जब प्रेक्षणों की संख्या n विषम होती है, तब माध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$

प्रेक्षण का मान होता है। प्रेक्षणों और यदि प्रेक्षणों की संख्या n सम होती है, तब माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ का माध्य होता है।

बहुलकः सबसे अधिक बारंबरता वाला प्रेक्षण बहुलक होता है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 14.1 (पृष्ठ संख्या 287)

प्रश्न 1 उन पाँच आँकड़ों के उदाहरण दीजिए जिन्हें आप दैनिक जीवन में एकत्रित कर सकते हैं।

उत्तर- दैनिक जीवन में संग्रह योग्य आँकड़े-

i. अपनी कक्षा के 25 सहपाठियों द्वारा एक क्लास टेस्ट में प्राप्त अंकों का संग्रह।
ii. अपने परिवार के सदस्यों की आयु और उनकी लम्बाई सम्बन्धी आँकड़ों का संग्रह।
iii. कक्षा के छात्रों के परिवार के सदस्यों की संख्या का संग्रह।
iv. उद्यान में लगे 20 पौधों की लम्बाइयों का संग्रह।
v. एन.सी.सी. ऑफिसर से ऐसे छात्रों की सूची का संग्रह जिन्होंने एन०सी०सी० कोर्स लिया है।

ऐसे और भी अनेक उदाहरण सम्भव हैं।

प्रश्न 2 पाँच आँकड़ों के उदाहरण दीजिए और आँकड़ों को प्राथमिक आँकड़ों या गौण आँकड़ों में वर्गीकृत कीजिए।

उत्तर-

i. अपनी कक्षा के 25 सहपाठियों द्वारा एक क्लास टेस्ट में प्राप्त अंकों का संग्रह।
ii. अपने परिवार के सदस्यों की आयु और उनकी लम्बाई सम्बन्धी आँकड़ों का संग्रह।
iii. कक्षा के छात्रों के परिवार के सदस्यों की संख्या का संग्रह।
iv. उद्यान में लगे 20 पौधों की लम्बाइयों का संग्रह।
v. एन.सी.सी. ऑफिसर से ऐसे छात्रों की सूची का संग्रह जिन्होंने एन.सी.सी. कोर्स लिया है।

चार उदाहरण प्राथमिक आँकड़ों के हैं क्योंकि इनका संग्रह स्वयं किया गया है। पाँचवाँ उदाहरण गौण आँकड़ों का है क्योंकि उनका संग्रह स्वयं न करके एक कार्यालय की सूची से किया गया है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्नावली 14.2 (पृष्ठ संख्या 293-295)

प्रश्न 1 आठवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों के रक्त समूह ये हैं-

A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O,

A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O

इन आँकड़ों को एक बारम्बारता बंटन सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए। बताइए कि इन विद्यार्थियों में कौन-सा रक्त समूह अधिक सामान्य है और कौन-सा रक्त समूह विरलतम रक्त समूह है।

उत्तर- यहाँ A, B, O, AB चार रक्त समूह हैं जिनकी उपस्थिति का 30 विद्यार्थियों के रक्त में परीक्षण किया गया है।

बारम्बारता बंटन सारणी		
क्र. सं.	**रक्त समूह**	**विद्यार्थियों की संख्या (बारम्बारता)**
1.	A	09
2.	B	06
3.	O	12
4.	AB	03
	योग	**30**

सारणी से स्पष्ट है कि रक्त समूह O अधिक सामान्य है और रक्त समूह AB विरलतम है।

Fukey Education

प्रश्न 2 40 इंजीनियरों की उनके आवास से कार्य-स्थल की (किलोमीटर में) दूरियाँ ये हैं-

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

0-5 को (जिसमें 5 सम्मिलित नहीं है) पहला अन्तराल लेकर ऊपर दिए हुए आँकड़ों से वर्ग-माप 5 वाली एक वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए। इस सारणीबद्ध निरूपण में आपको कौन-से मुख्य लक्षण देखने को मिलते हैं?

उत्तर- इंजीनियरों के आवास से उनके कार्यालय की न्यूनतम दूरी = 2 किमी

और अधिकतम दूरी = 32 किमी

दूरी का परिसर = 32 - 2 = 30 किमी

तथा वर्गों की संख्या $= \frac{30}{5} + 1 = 7$

दूरी—वर्ग	टेली चिन्ह	बारम्बारता
0-5	$\cancel{||||}$	05
5-10	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ |	11
10-15	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ |	11
15-20	$\cancel{||||}$ ||||	09
20-25	|	01
25-30	|	01
30-35	||	02
योग		40

मुख्य लक्षण-चार इंजीनियरों के कार्यालय उनके आवास से सामान्यत: अधिक दूर हैं।

प्रश्न 3 30 दिन वाले महीने में एक नगर की सापेक्ष आर्द्रता (% में) यह रही है।

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.2	92.1	84.9	90.2	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

i. वर्ग 84-86, 86-88 आदि लेकर एक वर्गीकृत बारम्बारता बंटन बनाइए।

ii. क्या आप बता सकते हैं कि ये आँकड़े किस महीने या ऋतु से सम्बन्धित हैं?

iii. इन आँकड़ों का परिसर क्या है?

उत्तर-

i. वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी-

वर्ग	बारम्बारता
84-86	01
86-88	01
88-90	02
90-92	02
92-94	07
94-96	06
96-98	07
98-100	04
योग	**30**

ii. इन आँकड़ों में उल्लिखित आर्द्रता सामान्य से अधिक है। अत: ये आँकड़े वर्षा ऋतु के किसी महीने में संकलित किए गए हैं।

iii. परिसर = 99.2 - 84.9 = 14.3

Fukey Education

प्रश्न 4 निकटतम सेन्टीमीटरों में मापी गई 50 विद्यार्थियों की लम्बाइयाँ ये हैं-

161	150	154	165	168	161	154	162	150	151
162	164	171	165	158	154	156	172	160	170
153	159	161	170	162	165	166	168	165	164
154	152	153	156	158	162	160	161	173	166
161	159	162	167	168	159	158	153	154	159

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

i. 160-165, 165-170 आदि का वर्ग अन्तराल लेकर ऊपर दिए गए आँकड़ों को एक वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी के रूप में निरूपित कीजिए।
ii. इस सारणी की सहायता से आप विद्यार्थियों की लम्बाइयों के सम्बन्ध में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

उत्तर-

i. सबसे कम लम्बाई = 150 सेमी

सबसे अधिक लम्बाई = 173 सेमी

लम्बाई का परिसर =173 - 150

= 23 सेमी

वर्ग का आमाप = 5 सेमी

वर्गों की संख्या $= \frac{23}{5} = 5$ और प्रथम वर्ग (150-155)

वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी	
विद्यार्थी की लम्बाई वर्ग (सेमी)	**बारम्बारता**
150-155	12
155-160	09
160-165	14
165-170	10
170-175	05
योग(N)	**50**

ii. **निष्कर्ष-**

- अधिकांश छात्रों की लम्बाई 165 सेमी से कम है।
- 5 छात्रों की लम्बाई 170 सेमी से अधिक है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 5 एक नगर में वायु में सल्फर डाई-ऑक्साइड का सान्द्रण भाग प्रति मिलियन [parts per million (ppm)] में ज्ञात करने के लिए एक अध्ययन किया गया। 30 दिनों के प्राप्त किए गए आँकड़े ये हैं-

0.03	0.08	0.08	0.09	0.04	0.17
0.16	0.05	0.02	0.06	0.18	0.20
0.11	0.08	0.12	0.13	0.22	0.07
0.08	0.01	0.10	0.06	0.09	0.18
0.11	0.07	0.05	0.07	0.01	0.04

i. 0.00-0.04, 0.04-0.08 आदि का वर्ग-अन्तराल लेकर इन आँकड़ों की एक वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।

ii. सल्फर डाइऑक्साइड की सान्द्रता कितने दिन 0.11 भाग प्रति मिलियन से अधिक रही?

उत्तर-

i. वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी-

सल्फर डाइ-आक्साइड का सान्द्रण (ppm) वर्ग	**बारम्बारता**
0.00-0.04	04
0.04-0.08	09
0.08-0.12	09
0.12-0.16	02
0.16-0.20	04
0.20-0.24	02
योग	**30**

ii. सल्फर डाइ-आक्साइड का सान्द्रण 0.11 भाग प्रति मिलियन से अधिक सीमा वाले वर्ग और उनकी बारम्बारता-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

वर्ग 0.12-0.16 बारम्बारता 02

वर्ग 0.16-0.20 बारम्बारता 04

वर्ग 0.20-0.24 बारम्बारता 02

= 08 दिन

अतः सल्फर डाइ-आक्साइड का वायु में सान्द्रण 0.11 भाग प्रति मिलियन से अधिक 8 दिनों तक रहा।

प्रश्न 6 तीन सिक्कों को एक साथ 30 बार उछला गया। प्रत्येक बार चित (Head) आने की संख्या निम्न प्रकार है-

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

उपर्युक्त आँकड़ों के लिए एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।

उत्तर- चित आने की न्यूनतम संख्या = 0 और अधिकतम संख्या = 3

बारम्बारता बंटन सारणी	
3 सिक्कों की उछाल में चित आने की संख्या (x)	**बारम्बारता**
0	06
1	10
2	09
3	05
योग	**30**

प्रश्न 7 50 दशमलव स्थान तक शुद्ध π का मान नीचे दिया गया है-

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

i. दशमलव बिन्दु के बाद आने वाले 0 से 9 तक के अंकों का एक बारम्बारता बंटन बनाइए।

ii. सबसे अधिक बार और सबसे कम बार आने वाले अंक कौन-कौन से हैं?

उत्तर-

i. 0 से 9 तक के अंकों की बारम्बारता बंटन सारणी-

ii. 0 से 9 तक के अंकों की बारम्बारता बंटन सारणी-

अंक	टैली मार्क	बारम्बारता
0	||	02
1	𝍸	05
2	𝍸	05
3	𝍸 |||	08
4	||||	04
5	𝍸	05
6	||||	04
7	||||	04
8	𝍸	05
9	𝍸 |||	08
योग (N)		**50**

ii. सारणी से स्पष्ट है कि सबसे कम बार शून्य का अंक और सबसे अधिक बार 3 वे 9 अंक आए हैं।

प्रश्न 8 तीस बच्चों से यह पूछा गया कि पिछले सप्ताह उन्होंने कितने घण्टों तक टी.वी. के प्रोग्राम देखे। प्राप्त परिणाम ये रहे हैं-

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8
10	3	4	12	2	8	15	1	17	6
3	2	8	5	9	6	8	7	14	12

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

i. वर्ग चौड़ाई 5 लेकर और एक वर्ग अन्तराल को 5-10 लेकर इन आँकड़ों की एक वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।
ii. कितने बच्चों ने सप्ताह में 15 या अधिक घण्टों तक टेलीविजन देखा?

उत्तर-

i. न्यूनतम घण्टे = 1, अधिकतम घण्टे = 17

वर्ग 0-5, 5-10, 10-15 व 15-20 होंगे।

वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी	
घण्टों की संख्या वर्ग	**बारम्बारता**
0-5	10
5-10	13
10-15	05
15-20	02
योग	**30**

ii. सारणी से स्पष्ट है कि 2 बच्चों ने 15 घण्टे से अधिक टी.वी. देखा।

प्रश्न 9 एक कम्पनी एक विशेष प्रकार की कार-बैट्री बनाती है। इस प्रकार की 40 बैट्रियों के जीवन-काल (वर्षों में) ये रहे हैं-

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

0.5 माप के वर्ग अन्तराल लेकर तथा अन्तराल 2-2.5 से प्रारम्भ करके इन आँकड़ों की एक वर्गीकृत बारम्बारता बण्टन सारणी बनाइए।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर-

वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी	
बैट्री का जीवन-काल (वर्षों में वर्ग)	**बारम्बारता**
2.0-2.5	02
2.5-3.0	06
3.0-3.5	14
3.5-4.0	11
4.0-4.5	04
4.5-5.0	03
योग	**40**

प्रश्नावली 14.3 (पृष्ठ संख्या 307-311)

प्रश्न 1 एक संगठन ने पूरे विश्व में 15-44 (वर्षों में) की आयु वाली महिलाओं में बीमारी और मृत्यु के कारणों का पता लगाने के लिए किए गए सर्वेक्षण से निम्नलिखित आँकड़े (% में) प्राप्त किए-

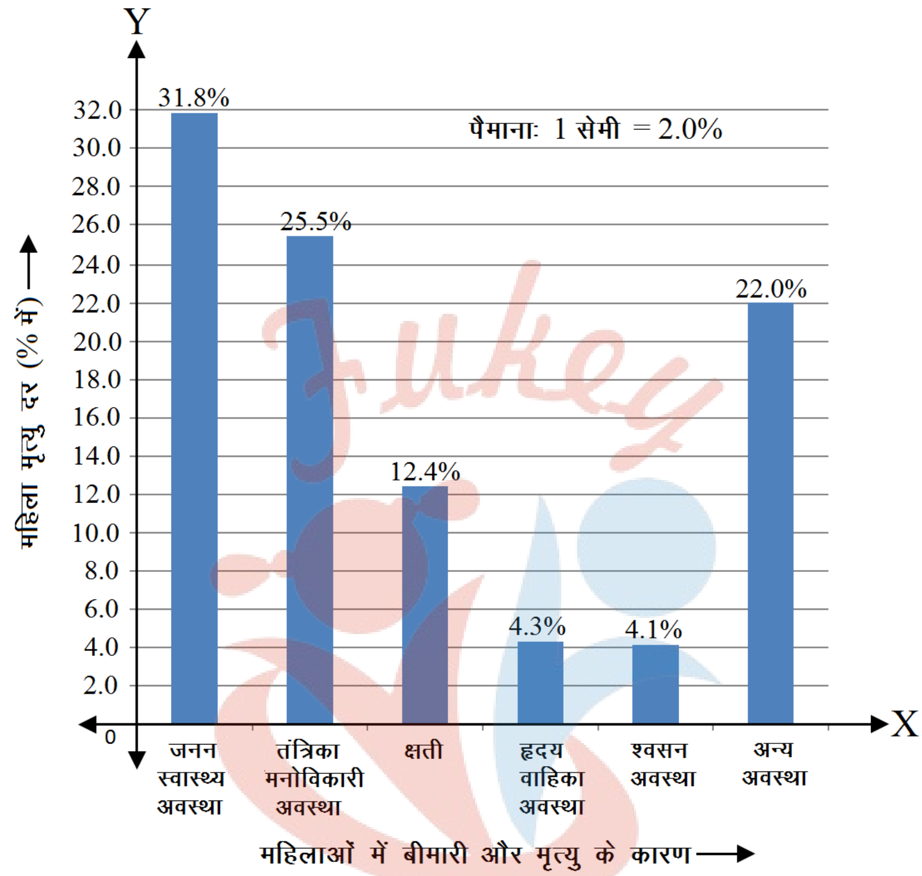
क्र. सं.	कारण	महिला मृत्यु दर (%)
1.	जनन स्वास्थ्य अवस्था	31.8
2.	तंत्रिका मनोविकरी अवस्था	25.4
3.	क्षति	12.4
4.	हृदय वाहिका अवस्था	4.3
5.	श्वसन अवस्था	4.1
6.	अन्य कारण	22.0

i. ऊपर दी गई सूचनाओं को आलेखीय रूप में निरूपित कीजिए।
ii. कौन-सी अवस्था पूरे विश्व की महिलाओं के खराब स्वास्थ्य और मृत्यु का बड़ा कारण है?
iii. अपनी अध्यापिका की सहायता से ऐसे दो कारणों का पता लगाने का प्रयास कीजिए। जिनकी ऊपर (ii) में मुख्य भूमिका रही हो।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर-

i. दी गई सूचनाओं का आलेखीय निरूपण-



बनाने की विधि:

i. X-अक्ष व Y-अक्ष खींचिए।

ii. X-अक्ष पर उचित रिक्त स्थानों के बीच समान चौड़ाई रखते हुए महिलाओं में बीमारी और मृत्यु के कारण प्रदर्शित कीजिए।

iii. Y-अक्ष पर बीमारियों के प्रतिशत को उचित पैमाना लेकर अंकित कीजिए। चित्र में 1 सेमी = 2% पैमाने से बीमारियों का प्रतिशत (%) अंकित किया गया है।

iv. प्रत्येक कारण के सापेक्ष उसके प्रतिशत को एक ऐसे आयत द्वारा प्रदर्शित कीजिए जिसकी ऊँचाई बीमारी के प्रतिशत को और समान चौड़ाइयाँ बीमारी को व्यक्त करें।

v. आयतों की ऊपरी चौड़ाइयों पर उनके द्वारा व्यक्त बीमारी के प्रतिशत लिख दीजिए।

a. जनन स्वास्थ्य अवस्था का प्रतिशत (31.8) सर्वाधिक है। अत: यह पूरे विश्व की महिलाओं के खराब स्वास्थ्य और मृत्यु को बड़ा कारण है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

b. पुनरुत्पादी स्वास्थ्य अवस्था, अपरिपक्व आयु में प्रजनन।

प्रश्न 2 भारतीय समाज के विभिन्न क्षेत्रों में प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की (निकटतम दस तक की) संख्या के आँकड़े नीचे दिए गए हैं-

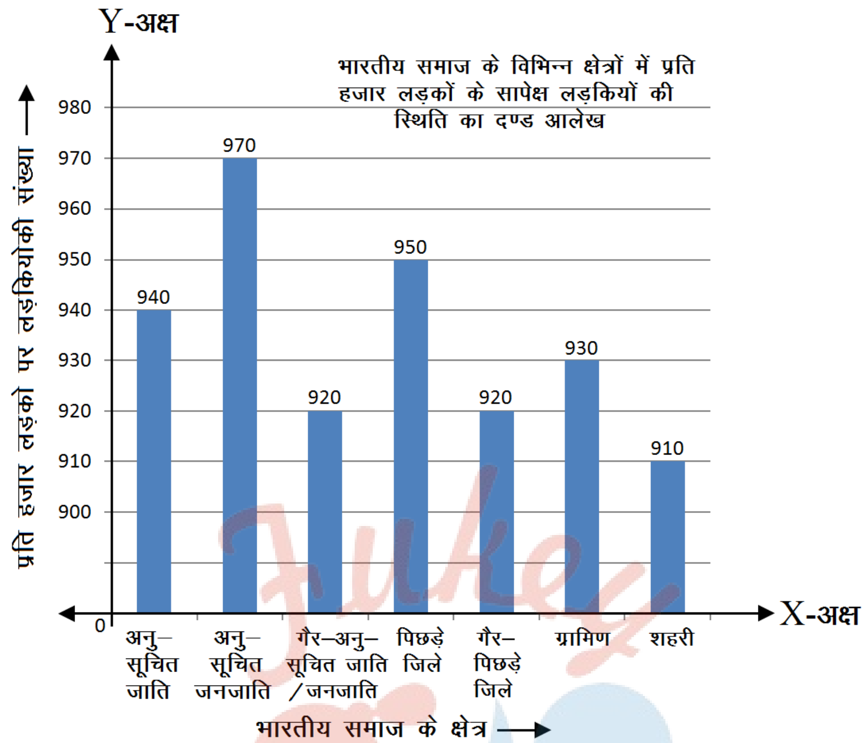
क्र. सं.	क्षेत्र	प्रति हजार लड़को पर लड़कियों की संख्या
1.	अनुसूचित जाति	940
2.	अनुसूचित जनजाति	970
3.	गैर-अनुसूचित जाति/ जनजाति	920
4.	पिछड़े जिले	950
5.	गैर-पिछड़े जिले	920
6.	ग्रामीण	930
7.	शहरी	910

i. ऊपर दी गई सूचनाओं को एक दण्ड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।
ii. कक्षा में चर्चा करके, बताइए कि आप इस आलेख से कौन-कौन से निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

उत्तर- **दण्ड चित्र (आलेख) बनाने की विधि-**

- पहले X-अक्ष व Y-अक्ष खींचिए।
- X-अक्ष पर समान रिक्त स्थानों के बीच किसी समान चौड़ाई के भारतीय समाज के विभिन्न क्षेत्र प्रदर्शित कीजिए।
- Y-अक्ष पर प्रति हजार लड़कों के सापेक्ष लड़कियों की स्थिति प्रदर्शित करना है। इसके लिए उचित पैमाना लेकर Y-अक्ष पर मापन के (मानक) विभिन्न स्तर अंकित कर दीजिए। चित्र में 900 तक की संख्या को स्थिर ऊँचाई लिया गया है और अगले 100 के लिए 10 (की संख्या) को 1 सेमी से प्रदर्शित किया गया है।
- समान चौड़ाई के भिन्न क्षेत्रों के प्रत्येक 1000 पर लड़कियों की संख्या को आयतों द्वारा प्रदर्शित कीजिए। प्रति हजार पर लड़कियों की संख्या आयतों की ऊँचाइयों को व्यक्त करती है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



प्रत्योक आयत की चौड़ाई के ऊपरी भाग पर सम्बन्धित लड़कियों की संख्या अंकित कीजिए और आयतों को उचित शेड या रंग भरकर सुस्पष्ट कीजिए।

आलेख के निष्कर्ष-

- अन्य ज़ातियों की अपेक्षा अनुसूचित जनजाति में (प्रति हजार लड़कों पर) लड़कियों की संख्या अधिक है।
- गैर-पिछड़े जिलों के सापेक्ष पिछड़े जिलों में (प्रति हजार लड़कों पर) लड़कियों की संख्या अधिक है।
- शहरी क्षेत्रों की अपेक्षा ग्रामीण क्षेत्रों में (प्रति हजार लड़कों पर) लड़कियों की संख्या अधिक है।

प्रश्न 3 एक राज्य के विधान सभा के चुनाव में विभिन्न राजनैतिक पार्टियों द्वारा जीती गई सीटों के परिणाम नीचे दिए गए हैं-

राजनैतिक पार्टी	A	B	C	D	E	F
जीती गई सीटें	75	55	37	29	10	37

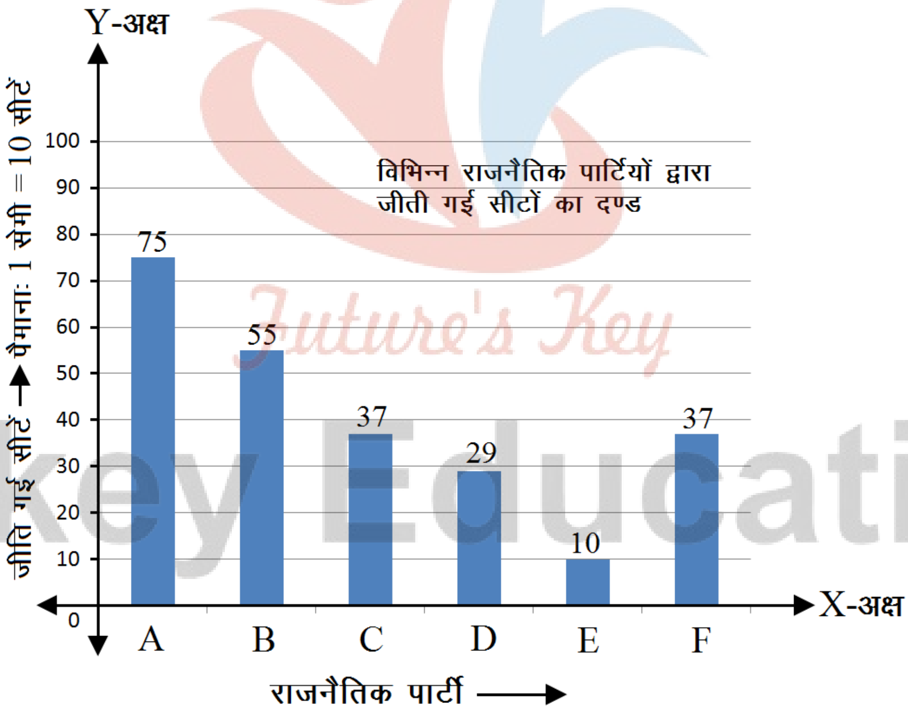
i. मतदान के परिणामों को निरूपित करने वाला एक दण्ड आलेख खींचिए।
ii. किस राजनैतिक पार्टी ने अधिकतम सीटें जीती हैं?

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर-

i. **बनाने की विधि:**

- X-अक्ष व Y-अक्ष खींचिए।
- एक-दूसरे के बीच समान और उचित रिक्त स्थान छोड़कर समान चौड़ाई के आधारों द्वारा X-अक्ष पर राजनैतिक पार्टियों को प्रदर्शित कीजिए।
- Y-अक्ष पर राजनैतिक पार्टियों द्वारा जीती गई सीटें प्रदर्शित करना है। पैमाना: 1 सेमी = 10 सीटें लेकर सीटों के लिए मापन स्केल अंकित कीजिए।
- विभिन्न पार्टियों के लिए निर्धारित एवं प्रदर्शित आधारों पर उनमें से प्रत्येक के लिए जीती गई सीटों की संख्या के सापेक्ष ऊँचाई के आयत बनाइए और इन्हें रंगिए शेड दीजिए।
- आयतों की ऊपरी चौड़ाई पर जीती गई सीटों की संख्या अंकित कीजिए। दण्ड आलेख पूर्ण हो गया।



ii. चूँकि जीती गई सीटों की संख्या आयतों की ऊँचाई के अनुक्रमानुपाती है और पार्टी A के लिए प्रदर्शित आयत की ऊँचाई सबसे अधिक है।

अतः पार्टी A ने सबसे अधिक अर्थात् 75 सीटें जीतीं हैं।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 4 एक पौधे की 40 पत्तियों की लम्बाइयाँ एक मिलीमीटर तक शुद्ध मापी गई हैं और प्राप्त आँकड़ों को निम्नलिखित सारणी में निरूपित किया गया है-

लम्बाई (मिलीमीटर में)	पत्तियों की संख्या
118-126	3
127-135	5
136-144	9
145-153	12
154-162	5
163-171	4
172-180	2

i. दिए हुए आँकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।
ii. क्या इन्हीं आँकड़ों को निरूपित करने वाला कोई अन्य उपयुक्त आलेख है?
iii. क्या यह सही निष्कर्ष है कि 153 मिलीमीटर लम्बाई वाली पत्तियों की संख्या सबसे अधिक है? क्यों?

उत्तर- **आयत चित्र बनाने की विधि-**

1. दिए गए आँकड़ों के वर्ग असतत, हैं। इन्हें सतत बनाइए।

असतत वर्ग	सतत वर्ग
118126	117.5-126.5
127-135	126.5-135.5
136-144	135.5-144.5
145-153	144.5-153.5
154-162	153.5-162.5
163-171	162.5-171.5
172-180	171.5-180.5

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

2. X-अक्ष व Y-अक्ष खींचिए।

3. X-अक्ष पर (सतत) वर्ग प्रदर्शित कीजिए। दो क्रमागत वर्गों के बीच रिक्त स्थान न छोड़िए।

4. Y-अक्ष पर उचित पैमाना लेकर (पत्तियों की लम्बाई) बारम्बारताओं के लिए मापन स्केल अंकित कीजिए। वर्गों पर पत्तियों की संख्या के अनुपात में ऊँचाई व्यक्त करने वाले आयत प्रदर्शित कीजिए। उचित पैमाने का प्रयोग कीजिए। आवश्यक गणना निम्नवत् कीजिए।

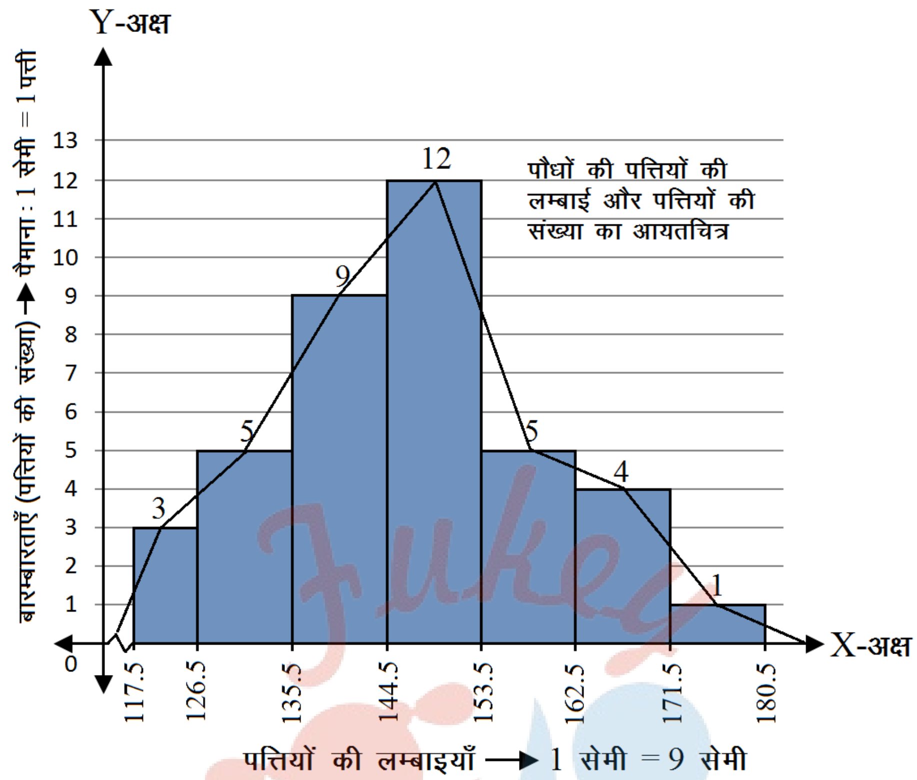
पत्तियों की लम्बाई (मिमी) वर्ग	पत्तियों की संख्या (बारम्बारता)	पैमाना 1 सेमी = 1 पत्ती लेने पर पतियों की संख्या के लिए आयत की ऊँचाई (सेमी)
117.5-126.5	3	3
126.5-135.5	5	5
135.5-144.5	9	9
144.5-153.5	12	12
153.5-162.5	5	5
162.5-171.5	4	4
171.5-180.5	1	1

5. आयतों के ऊपरी सिरों पर सम्बन्धित वर्गों की बारम्बारताएँ अंकित कीजिए।

i.

Fukey Education

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



ii. हाँ, इन आँकड़ों को बारम्बारता बहुभुज द्वारा भी निरूपित किया जा सकता है।

iii. वर्ग (144.5-153.5) मिमी के अन्तर्गत 153 मिमी आता है।

अत: इस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक है परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि 153 मिमी लम्बाई की पत्तियों की संख्या सबसे अधिक हो। क्योंकि यह अंधिकतम बारम्बारता 144.5 मिमी से 153.5 मिमी तक के पूरे वर्ग का प्रतिनिधित्व करती है न कि मात्र 153 मिमी का।

प्रश्न 5 नीचे की सारणी में 400 निऑन लैम्पों के जीवन-काल दिए गए हैं-

जीवन-काल (घण्टों में)	**लेम्पों की संख्या**
300-400	14
400-500	56
500-600	60
600-700	86
700-800	74
800-900	62

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

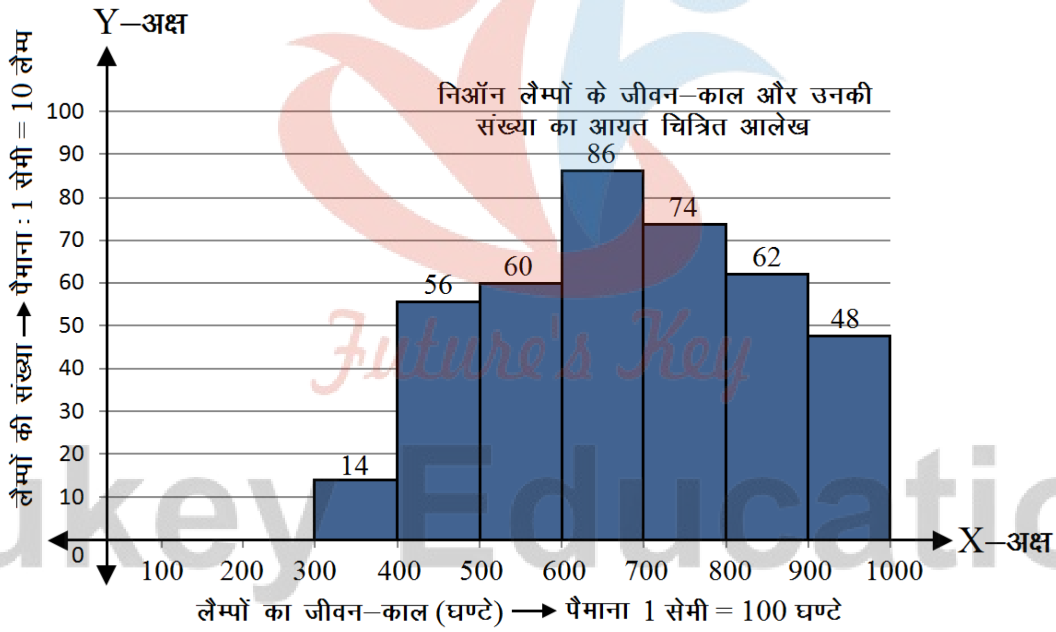
900-1000	48

i. एक आयतचित्र की सहायता से दी हुई सूचनाओं को निरूपित कीजिए।
ii. कितने लैम्पों के जीवन-काल 700 घण्टों से अधिक हैं?

उत्तर-

i. **बनाने की विधि-**

- X-अक्ष पर जीवन-काल वर्गों को प्रदर्शित कीजिए।
- Y-अक्ष पर लैम्पों की संख्या को प्रदर्शित कीजिए।
- वर्गों की चौड़ाई को आधार मानकर और लैम्पों की संख्या को ऊँचाई मानकर लिए गए पैमानों के सापेक्ष आयत बनाइए और आयतचित्र आलेख को पूरा कीजिए।



ii. वर्ग (700-800), (800-900) व (900-1000), 700 से अधिक घण्टों का प्रतिनिधित्व करते हैं।

700 घण्टों से अधिक जीवन-काल वाले लैम्पों की संख्या = सम्बन्धित वर्षों की बारम्बारताओं का योग

= 74 + 62 + 48

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

= 184 लैम्प

प्रश्न 6 नीचे की दो सारणियों में प्राप्त किए गए अंकों के अनुसार दो सेक्शनों के विद्यार्थियों का बंटन दिया गया है-

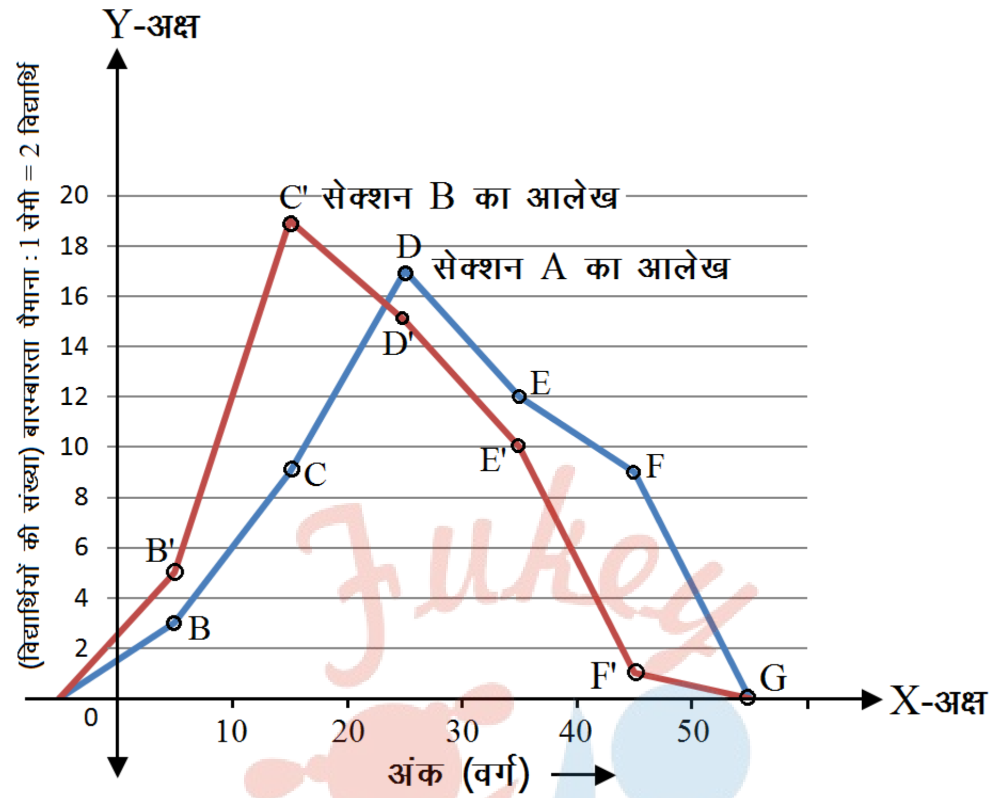
सेक्शन A		सेक्शन B	
अंक	**बारंबारता**	**अंक**	**बारंबारता**
0-10	3	0-10	5
10-20	9	10-20	19
20-30	17	20-30	15
30-40	12	30-40	10
40-50	9	40-50	1

दो बारम्बारता बहुभुजों की सहायता से एक ही आलेख पर दोनों सेक्शनों के विद्यार्थियों के प्राप्तांक निरूपित कीजिए। दोनों बहुभुजों का अध्ययन करके दोनों सेक्शनों के निष्पादनों की तुलना कीजिए।

उत्तर- **बारम्बारता बहुभुज बनाने की विधि-**

1. X-अक्ष व Y-अक्ष खींचे।
2. X-अक्ष पर दिए हुए अंक वर्ग प्रदर्शित किए।
3. Y-अक्ष पर पैमाना: 1 सेन्टीमीटर = 2 विद्यार्थी के अनुरूप मापन स्केल अंकित किया।
4. प्रथम वर्ग के ठीक पूर्व और अन्तिम वर्ग के ठीक पश्चात् एक-एक वर्ग की कल्पना की और इनके मध्य-बिन्दु A तथा G अंकित किए।
5. दिए गए वर्गों के सापेक्ष उनके मध्य-बिन्दु क्रमशः ज्ञात किए।
6. प्रत्येक वर्ग के मध्य बिन्दु को भुज और बारम्बारता को कोटि मान कर वर्ग के सापेक्ष एक-एक बिन्दु ज्ञात किया जैसा कि आगे दिखाया गया है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



वर्ग	वर्ग का मध्य बिन्दु (भुज)	बारम्बारता कोटि		सापेक्ष बिन्दु का नाम और उसके निर्देशांक	
		सेक्शन A के लिए	सेक्शन B के लिए	सेक्शन A के लिए	सेक्शन B के लिए
0-10	5	3	5	B(5, 3)	B'(5, 5)
10-20	15	9	19	C(15, 9)	C'(15, 19)
20-30	25	17	15	D(25, 17)	D'(25, 15)
30-40	35	12	10	E(35, 12)	E'(35, 10)
40-50	45	9	1	F(45, 9)	F(45, 9)

7. दोनों सेक्शनों A और B के लिए बिन्दुओं B, C, D, E, F व B', C', D', E', F' का आलेख किया।

8. इन्हें क्रम से मिलाकर सेक्शन A के लिए बारम्बारता बहुभुज आलेख A B C D E F G A खींचा और सेक्शन B के लिए बारम्बारता बहुभुज आलेख A B’ C’ D’ E’ F’ G A खींचा।

आलेखों के अध्ययन से निष्कर्ष-

दोनों आलेखों में सेक्शन A के उच्च स्तर के बिन्दु D, E, F सेक्शन B के समान स्तरीय बिन्दुओं D’, E’, F’ से अधिक ऊँचाई पर हैं।

अतः सेक्शन A का सेक्शन B के सापेक्ष परिणाम उन्नत है।

प्रश्न 7 एक क्रिकेट मैच में दो टीमों A और B द्वारा प्रथम 60 गेंदों में बनाए गए रन नीचे दिए गए हैं-

गेंदों की संख्या	टीम A	टीम B
1-6	2	5
7-12	1	6
13-18	8	2
19-24	9	10
25-30	4	5
31-36	5	6
37-42	6	3
43-48	10	4
49-54	6	8
55-60	2	10

बारम्बारता बहुभुजों की सहायता से एक ही आलेख पर दोनों टीमों के आँकड़े निरूपित कीजिए।

संकेत- पहले वर्ग अन्तरालों को संतत बनाइए।

उत्तर- **बारम्बारता बहुभुज आलेख बनाने की विधि-**

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

1. X-अक्ष व Y-अक्ष खींचे।
2. दिए हुए वर्ग असतत हैं। प्रत्येक वर्ग की निम्न सीमा में 0.5 घटाकर और उपरि सीमा में 0.5 जोड़कर इन्हें सतत बनाया।

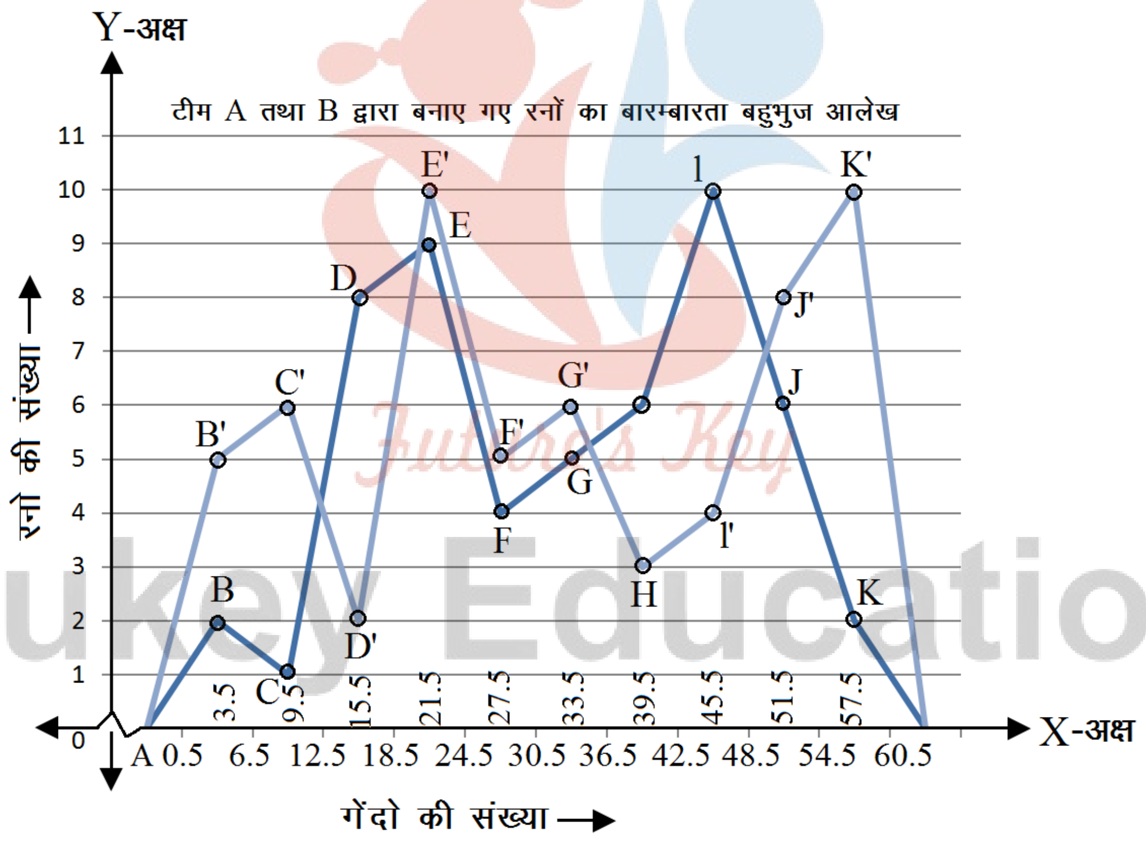
दिए हुए वर्ग	निम्न सीमा	उपरी सीमा	नया (सतत)		
			निम्न सीमा	उपरी सीमा	वर्ग
1-6	1	6	0.5	6.5	0.5-6.5
7-12	7	12	6.5	12.5	6.5-12.5
13-18	13	18	12.5	18.5	12.5-18.5
19-24	19	24	18.5	24.5	18.5-24.5
25-30	25	30	24.5	30.5	24.5-30.5
31-36	31	36	30.5	36.5	30.5-36.5
37-42	37	42	36.5	42.5	36.5-42.5
43-48	43	48	42.5	48.5	42.5-48.5
49-54	49	54	48.5	54.5	48.5-54.5
55-60	55	60	54.5	60.5	54.5-60.5

3. X-अक्ष पर वर्गों की सीमाओं को प्रदर्शित किया।
4. Y-अक्ष पर टीमों द्वारा बनाए गए रनों को प्रदर्शित करना है। मापन स्केल अंकित किया।
5. प्रथम वर्ग (0.5-6.5) के ठीक पूर्व एक कल्पित वर्ग लेकर उसका मध्य बिन्दु A ज्ञात किया।
6. अन्तिम वर्ग (54.5-60.5) के ठीक पश्चात् एक कल्पित वर्ग लेकर उसका मध्य बिन्दु L ज्ञात किया।
7. प्रत्येक वर्ग के मध्य-बिन्दु क्रमशः 3.5, 9.5, 15.5, 21.5, 27.5, 33.5, 39.5, 45.5, 51.5 व 57.5 ज्ञात किए।
8. टीम A व टीम B के लिए अलग-अलग प्रत्येक वर्ग के मध्य बिन्दु और उसकी बारम्बारता के सापेक्ष एक-एक बिन्दु ज्ञात किया जैसा कि सारणी में दिखाया गया है।

	मध्य बिन्दु	टीम A के लिए	टीम B के लिए

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

सतत वर्ग (l1–l2)	$\frac{l_1 + l_2}{2}$	ऊँचाई बिन्दु				ऊँचाई बिन्दु			
		रनों की संख्या (बारंबारता)	भुज	कोटि	बिन्दु का नाम व निर्देशांक	रनों की संख्या (बारंबारता)	भुज	कोटि	बिन्दु का नाम निर्देशांक
0.5-6.5	3.5	2	3.5	2	B(3.5, 2)	5	3.5	5	B'(3.5, 5)
6.5-12.5	9.5	1	9.5	1	C(9.5, 1)	6	9.5	6	C'(9.5, 6)
12.5-18.5	15.5	8	15.5	8	D(15.5, 8)	2	15.5	2	D'(15.5, 2)
18.5-24.5	21.5	9	21.5	9	E(21.5, 9)	10	21.5	10	E'(21.5, 10)
24.5-30.5	27.5	4	27.5	4	F(27.5, 4)	5	27.5	5	F'(27.5, 5)
30.5-36.5	33.5	5	33.5	5	G(33.5, 5)	6	33.5	6	G'(33.5, 6)
36.5-42.5	39.5	6	39.5	6	H(39.5, 6)	3	39.5	3	H'(39.5, 3)
42.5-48.5	45.5	10	45.5	10	I(45.5, 10)	4	45.5	4	I'(45.5, 4)
48.5-54.5	51.5	6	51.5	6	J(51, 6)	8	51.5	8	J'(51.5, 8)
54.5-60.5	57.5	2	57.5	2	K(57.5, 2)	10	57.5	10	K'(57.5, 10)



9. टीम A के लिए बिन्दुओं B, C, D, E, F, G, H, I, J, K का आलेखन किया।

10. इन्हें क्रम से मिलाकर टीम A के लिए बारम्बारता बहुभुज आलेख A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, प्राप्त किया।

11. टीम B के लिए बिन्दुओं B', C', D', E', F', G', H', I', J', K' का आलेखन किया।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

12. इन्हें क्रम से मिलाकर टीम B के लिए बारम्बारता बहुभुज A, B’, C’, D’, E’, F’, G’, H’, I’, J’, K’, L', प्राप्त किया।

प्रश्न 8 एक पार्क में खेल रहे विभिन्न आयु वर्गों के बच्चों की संख्या का एक याद्दच्छिक सर्वेक्षण (random survey) करने पर निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त हुए-

आयु (वर्षों में)	बच्चों की संख्या
1-2	5
2-3	3
3-5	6
5-7	12
7-10	9
10-15	10
15-17	4

उपर्युक्त आँकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।

उत्तर- **बनाने की विधि :**

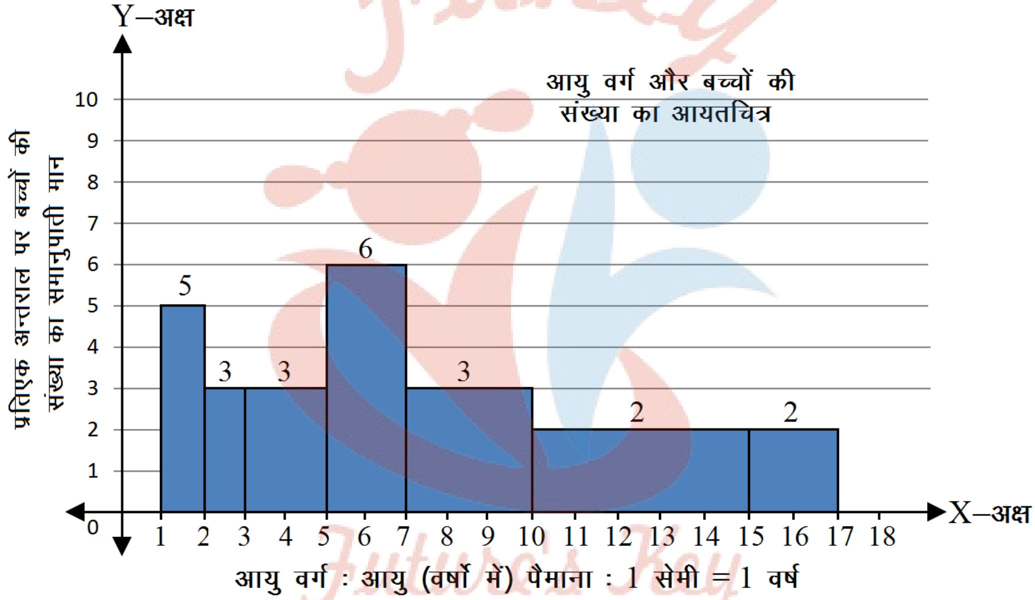
1. X-अक्ष तथा Y-अक्ष खींचा।
2. X-अक्ष पर आयु-वर्ग (1-2), (2-3), (3-5), (5-7), (7-10), (10-15) तथा (15-17) प्रदर्शित किया।
3. यहाँ वर्गों की न्यूनतम चौड़ाई 1 है।
4. वर्गों की चौड़ाई के सापेक्ष आयतों की लम्बाई के लिए एक सारणी निम्नवत् बनाई।

आयु वर्ग	बारम्बारता	वर्ग की चौड़ाई	आयत की लम्बाई
1–2	5	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
2–3	3	1	$\frac{3}{1} \times 1 = 3$
3–5	6	2	$\frac{6}{2} \times 1 = 3$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

5−7	12	2	$\frac{12}{2} \times 1 = 6$
7−10	9	3	$\frac{9}{3} \times 1 = 3$
10−15	10	5	$\frac{10}{5} \times 1 = 2$
15−17	4	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$

5. प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई पर उसके लिए आगणित लम्बाई को आयत बनाकर अभीष्ट आयतचित्र प्राप्त किया।



प्रश्न 9 एक स्थानीय टेलीफोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surname) यदृच्छया लिए गए और उनसे अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्न बारम्बारता बंटन प्राप्त किया गया-

Fukey Education

वर्णमाला के अक्षरों की संख्या	कुलनामों की संख्या
1-4	6
4-6	30
6-8	44
8-12	16
12-20	4

i. दी हुई सूचनाओं को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

ii. वह वर्ग अन्तराल बताइए जिसमें अधिकतम संख्या में कुलनाम हैं।

उत्तर-

i. **बनाने की विधि :**

- X-अक्ष तथा Y-अक्ष खींचे।
- X-अक्ष पर दिए हुए वर्ग (1-4), (4-6), (6-8), (8-12) व (12-20) प्रदर्शित किए।
- यहाँ वर्गों की चौड़ाई परिवर्ती है। न्यूनतम चौड़ाई वाला वर्ग 4-6 अथवा 6-8 है जिसकी चौड़ाई 2 है।

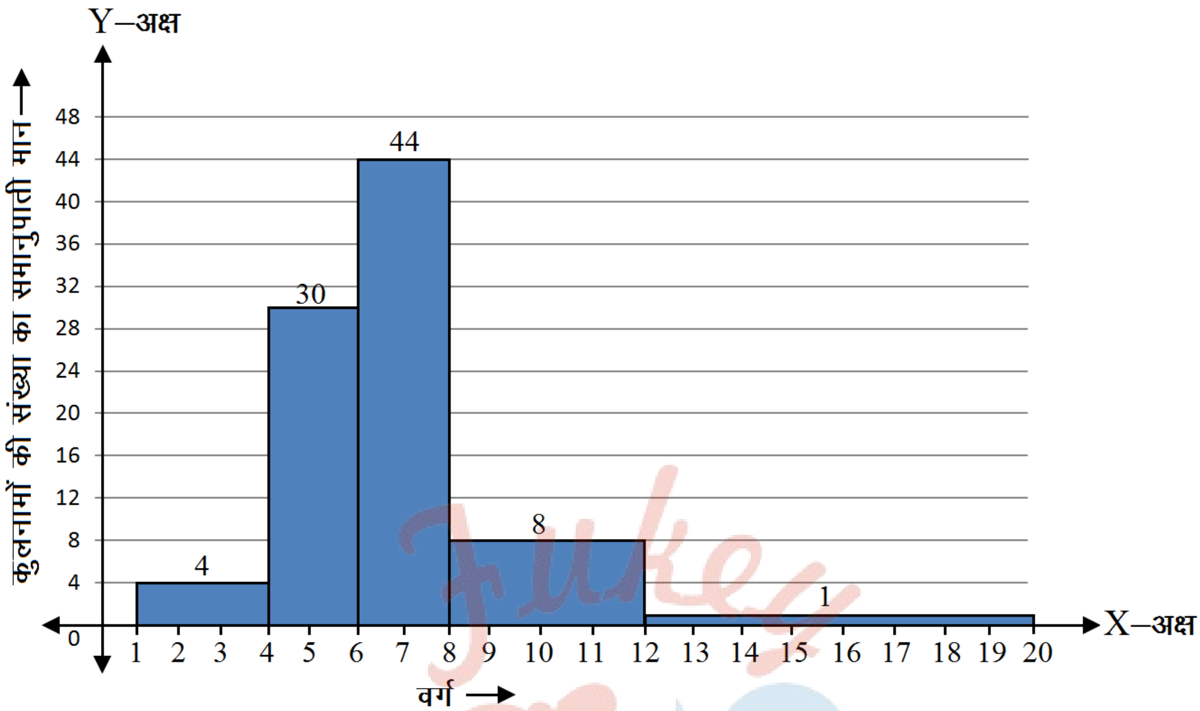
वर्गों की दी गई बारम्बारता के सापेक्ष आयतों की लम्बाई के लिए सारणी निम्नवत् बनाई।

वर्ग	**बारम्बारता**	**वर्ग की चौड़ाई**	**वर्गों की निम्नतम चौड़ाई**	**आयत की लम्बाई**
1–4	6	3	2	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4–6	30	2	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6–8	44	2	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8–12	16	4	2	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12–20	4	8	2	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

प्रत्येक वर्ग चौड़ाई पर उसके आगणित लम्बाई के आयत बनाए। इस प्रकार अभीष्ट आयतचित्र प्राप्त हुआ।

ii. सारणी से स्पष्ट है कि वर्ग अन्तराल (6-8) में अधिकतम कुलनाम हैं।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



प्रश्नावली 14.4 (पृष्ठ संख्या 320-321)

प्रश्न 1 एक टीम ने फुटबाल के 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किए-

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

इन गोलों के माध्य, माध्यिका और बहुलक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- टीम द्वारा फुटबाल के 10 मैचों के किए गए गोल,

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

$$\text{गोलों का माध्य} = \frac{\text{सभी गोलों का योग}}{\text{मैचों की संख्या}}$$

$$= \frac{2+3+4+5+0+1+3+3+4+3}{10}$$

$$= \frac{28}{10} = 2.8 \text{ गोल}$$

अब, गोलों को आरोही क्रम में लिखने पर,

0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5

n = 10 (सम)

$$\therefore \quad \text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2} \text{ वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ वें पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{5 \text{ वें पद का मान} + 6 \text{ वें पद का मान}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$$

यहाँ 0, 1, 2 व 5 की बारम्बारता = 1 है।

4 की बारम्बारता = 2 है।

और 3 की बारम्बारता = 4 है।

स्पष्ट है कि 3 बारम्बारता सर्वाधिक है।

∴ बहुलक = 3

अतः मध्य = 2.8, मध्यिका = 3 और बहुलक = 3

प्रश्न 2 गणित की परीक्षा में 15 विद्यार्थियों ने (100 में से) निम्नलिखित अंक प्राप्त किए-

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

इन आँकड़ों के माध्य, माध्यिका और बहुलक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- 15 विद्यार्थियों के प्राप्तांक,

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

$$\text{प्राप्तांको का माध्य} = \frac{\text{प्राप्तांको का योग}}{\text{विद्यार्थियों की संख्या}}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \frac{41+39+48+52+46+62+54+40+96+52+98+40+42+52+60}{15}$$

$$= \frac{822}{15} = 54.8$$

अब प्राप्तांको को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर,

39, 40, 40, 41, 42, 46, 48, 52, 52, 52, 54, 60, 62, 96, 98

n = 15 (विषम)

$\therefore$ माध्यिका-पद $= \frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2}$

$= \frac{16}{2} = 8$ वाँ पद

$\therefore$ प्राप्तांको का माध्यक = 8 वें पद का मान = 52

प्राप्तांक	बारम्बारता
39	01
40	02
41	01
42	01
46	01
48	01
52	03
54	01
60	01
62	01
96	01
98	01

स्पष्ट है कि 52 की बारम्बारता सर्वाधिक है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्राप्तांकों का बहुलक = 52

अत: माध्य = 54.8, माध्यिका = 52 व बहुलक = 52

प्रश्न 3 निम्नलिखित प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है। यदि आँकड़ों का माध्यिका 63 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए-

29, 32, 48, 50, x, x + 2, 72, 78, 84, 95

उत्तर- दिए गए प्रेक्षण आरोही क्रम में व्यवस्थित है।

n = 10 (सम)

$$\text{माध्यिका} = \frac{\frac{n}{2} \text{ वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ वें पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{\frac{10}{2} \text{ वें पद का मान} + \left(\frac{10}{2}+1\right) \text{ वें पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{5 \text{ वें पद का मान} + 6 \text{ वें पद का मान}}{2}$$

= x और x + 2 का माध्य

$$= \frac{x+x+2}{2}$$

$$= x + 1$$

परन्तु दिया है माध्यिका 63 है।

$$\therefore\ x + 1 = 63$$

$$x = 63 - 1 = 62$$

अतः x का मान = 62

प्रश्न 4 आँकड़ों 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर-

पद (x)	**बारम्बारता (f)**
14	4
17	1
18	3
22	1
23	1
25	1
28	1

यहाँ पद 14 की बारम्बारता सर्वाधिक है।

अत: बहुलक = 14

प्रश्न 5 निम्नलिखित सारणी से एक फैक्ट्री में काम कर रहे 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन ज्ञात कीजिए-

वेतन (रुपयों में)	**कर्मचारियों की संख्या**
3000	16
4000	12
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10000	1
कुल योग	**60**

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

माध्य वेतन की गणना के लिए तालिका		
वेतन (रूपये) (x)	**कर्मचारियों की संख्या (f)**	**(fx)**
3000	16	48000
4000	12	48000
5000	10	50000
6000	8	48000
7000	6	42000
8000	4	32000
9000	3	27000
10000	1	10000
योग	$\sum f = 60$	$\sum fx = 305000$

$$= \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{305000}{60} = \frac{15250}{3} = 5083.33$$

अतः फैक्टरी के 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन = ₹ 5083.33

प्रश्न 6 निम्न स्थिति पर आधारित एक उदाहरण दीजिए-

(i) माध्य ही केन्द्रीय प्रवृत्ति की उपयुक्त माप है।
(ii) माध्य केन्द्रीय प्रवृत्ति की उपयुक्त माप नहीं है, जबकि माध्यिका एक उपयुक्त माप है।

Fukey Education

उत्तर-

(i) माध्य संबन्धित आँकड़ों का औसत (Average) होता है। अतः यह केन्द्रीय प्रवत्ति की उपयुक्त माप है, जैसे- चार विद्यार्थियों के गणित के टेस्ट में प्राप्तांक क्रमशः 4, 7, 8, 9 है। इनका माध्य,

$$= \frac{4+7+8+9}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

जो कि यह प्रमाणित करता है कि यह सभी प्राप्तांको के निकट है और उनका प्रतिनिधित्व करने में सश्रम है।

(ii) मान लिया किसी मिनीबस में किन्ही 5 दिनों में क्रमशः 10, 16, 24, 20 और 13 यात्री यात्रा करते है, तब इसमें प्रतिदिन यात्रा करने वाले यात्रियों का ,माध्य,

$$= \frac{10 + 16 + 24 + 20 + 13}{5} = \frac{83}{5} = 16.6$$

परन्तु 166 वास्तविक यात्रियों के किसी भी प्रेक्षण का प्रतिनिधित्व नहीं करता क्योंकि अपूर्ण यात्रियों की सम्भाव्यता ही परिकल्पना से परे है। इस प्रकार माध्य केन्द्रीय प्रवृत्ति की वास्तविक एवं उपयुक्त माप, नहीं है।

अब यदि हम इनके माध्यिका पर विचार करें, तो

आरोही क्रम में आँकड़ों को व्यवस्थित करने पर,

10, 13, 16, 20, 24

n = 5 (विषम)

माध्यिका = $\frac{n+1}{2}$ वें पद का मान = $\frac{5+1}{2}$ वें पद मान = 3

माध्यिका = 3 वें पद का मान = 16 यात्री

अतः माध्यिका केन्द्रीय प्रवृत्ति का उपयुक्त मात्रक है।

Fukey Education

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com