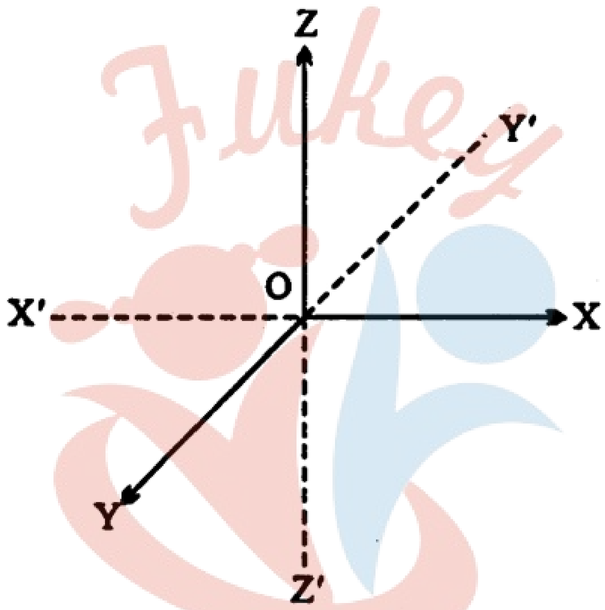
गणित

अध्याय-11: त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

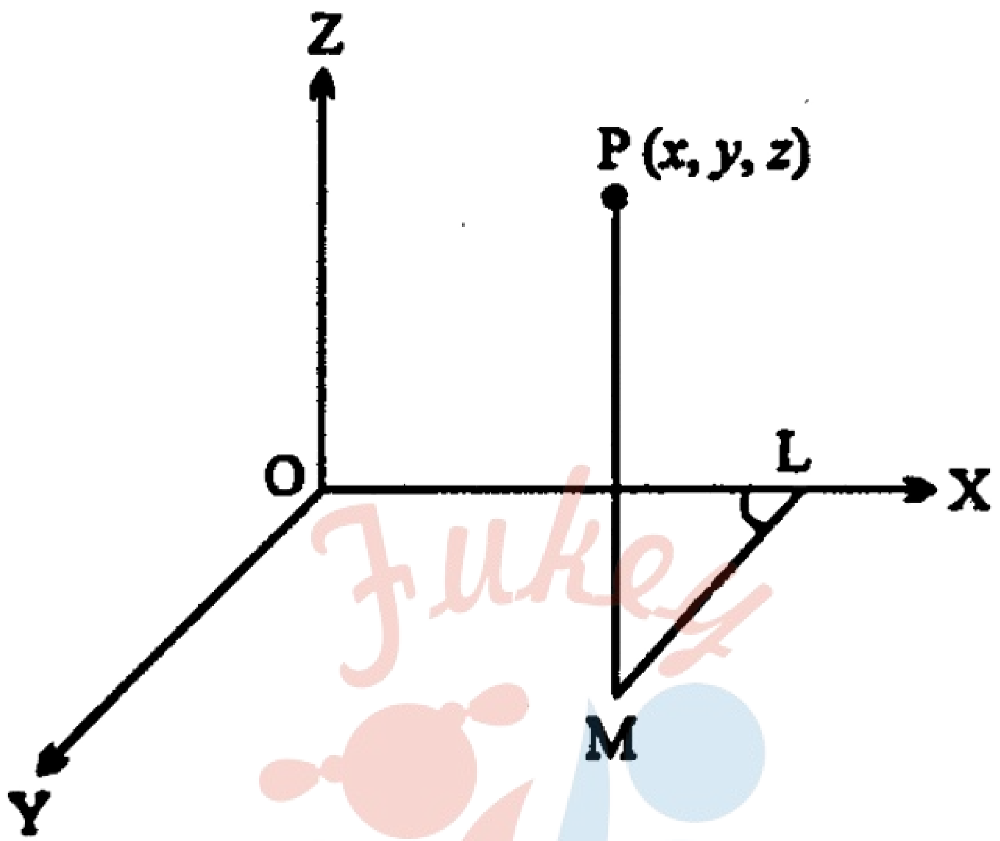
त्रिविमीय कार्तीय निर्देशांक पद्धति (Three Dimensional Cartesian Coordinate System)

माना X'ox, Y'OY and Z'OZ तीन परस्पर लंबवत रेखायें हैं जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु O है। बिन्दु O को हम मूलबिन्दु (Origin) कहते हैं। रेखाएं X'OX, Y'OY तथा Z'OZ क्रमशः



x-अक्ष, Y-अक्ष तथा Z-अक्ष कहलाती हैं। ये तीनों रेखाएँ मिलकर निर्देशाक्ष (Coordinate axes) कहलाती है। X-अक्ष व Y-अक्ष से गुजरने वाले समतल को XY-समतल, Y-अक्ष व Z-अक्ष से गुजरने वाले समतल को YZ-समतल तथा Z-अक्ष व X-अक्ष से गुजरने वाले समतल को ZX-समतल कहते हैं । ये तीनों समतल मिलकर निर्देशांक समतल (Coordinate planes) कहलाते हैं।

अंतरिक्ष में स्थित किसी बिन्दु की स्थिति (Position of a Point in Space)



माना अंतरिक्ष में कोई बिन्दु P है। बिन्दु P से XOY समतल पर लम्ब PM डाले। M से OX पर लम्ब ML डाले। तब

OL = x, ML = Y, MP = z वास्तविक संख्याएँ x,,: बिन्दु P के निर्देशांक कहलाती हैं।

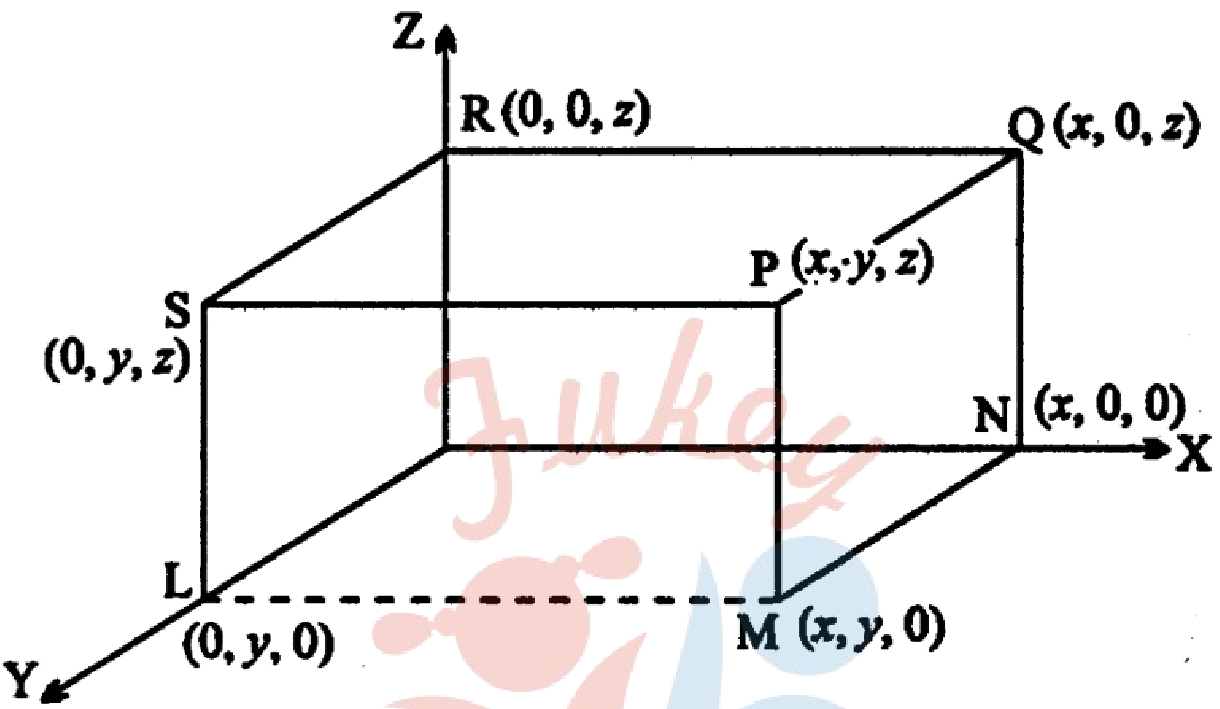
यहाँ OL = x = P का निर्देशांक

ML = y = P का निर्देशांक

MP = z = P का 2 निर्देशांक

समतलों और अक्षों पर स्थित बिन्दुओं के निर्देशांक (Coordinates of the Points on the Planes and Axes)

माना अन्तरिक्ष में स्थित कोई बिन्दु P(x,y,z) है।



(i) X-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु N के लिये y और z निर्देशांक शून्य होंगे, अर्थात् उसका निर्देशांक (x, 0,0) क्रम का होगा।

(ii) Y-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु L के लिये x और z निर्देशांक शून्य होंगे, अर्थात् उसका निर्देशांक (0, y, 0) क्रम का होगा।

(iii) Z-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु R के लिये x और " निर्देशांक शून्य होंगे, अर्थात् उसका निर्देशांक (0, 0, z) क्रम का होगा।

(iv) YZ-समतल पर स्थित किसी बिन्दु का x निर्देशांक शून्य होगा, अर्थात् उसका निर्देशांक (0, Y, z) क्रम का होगा।

(v) XY-समतल पर स्थित किसी बिन्दु M का निर्देशांक शून्य होगा, अर्थात् उसका निर्देशांक (x, y, 0) क्रम का होगा।

(vi) ZX-समतल पर स्थित किसी बिन्दु Q का निर्देशांक शून्य होगा, अर्थात् उसका निर्देशांक (x, 0, z) क्रम का होगा।

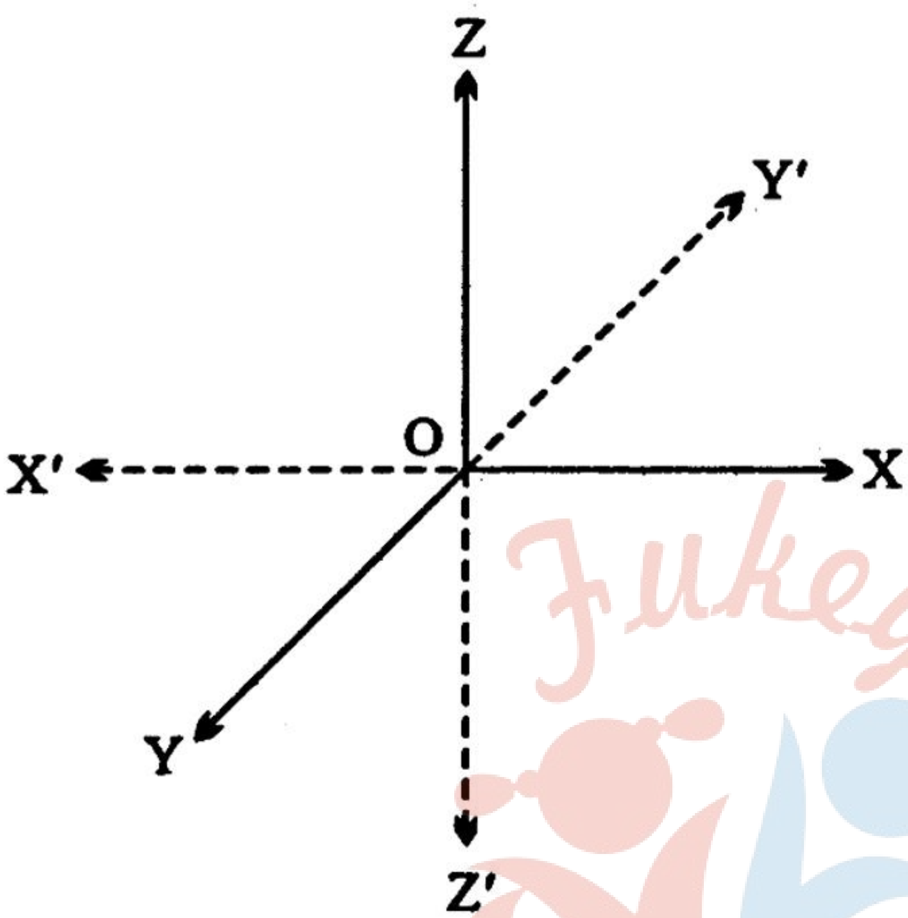
अष्टांक (Octants)

निर्देशांक समतल (Coordinate planes) पूरे आकाश (Space) को आठ भागों में विभक्त करते हैं, इन भागों को अष्टांक (Octants) कहते हैं।

अतः यहाँ निम्नलिखित सारणी दी जा रही हैं

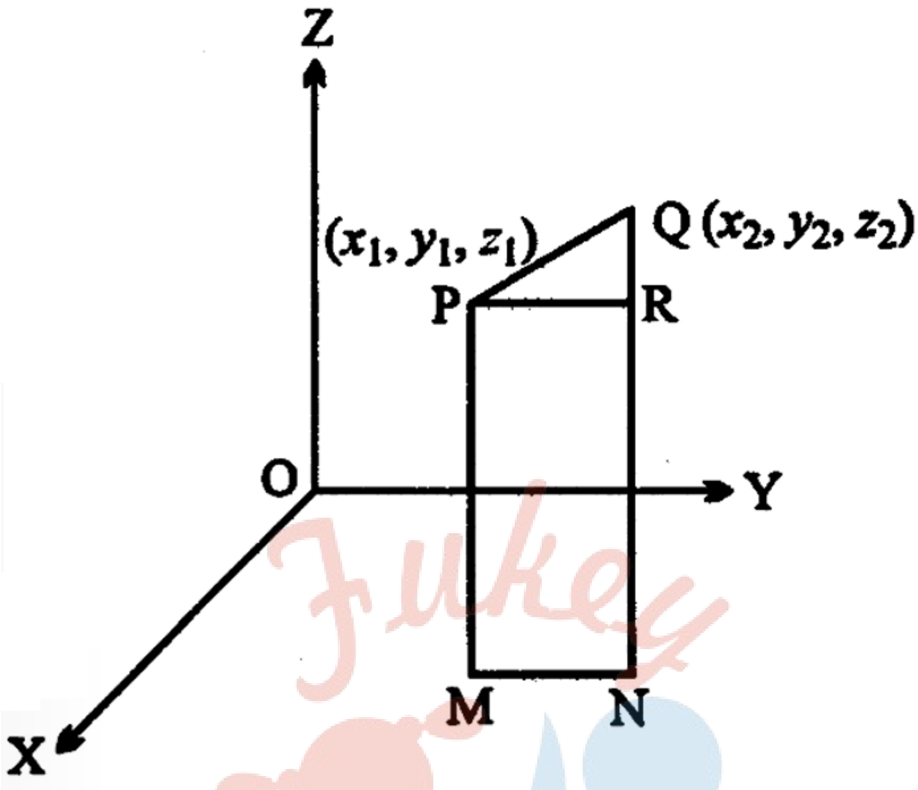
अष्टांक / निर्देशांक	OXYZ	OX'YZ	OXY'Z	OXYZ'	OX'Y'Z	OXY'Z'	OX'YZ'	OX'Y'Z'
x	+	–	+	+	–	+	–	–
y	+	+	–	+	–	–	+	–
z	+	+	+	–	+	–	–	–

भिन्न-भिन्न अष्टांकों में स्थित बिन्दुओं के निर्देशांकों में चिन्ह का अन्तर होता है।



दो बिन्दुओ के बिच की दूरी (Distance between Two Points)

माना $P(x_1,y_1,z_1)$ और $Q(x_2,y_2,z_2)$दो दिये हुए बिन्दु हैं। P और 0 से XY-समतल पर क्रमशः लम्ब PM तथा QN डालो जो XY-समतल को क्रमशः M तथा N पर मिलते हैं।



तब, M→ $(x_1,y_1,0)$

तथा N→$(x_2,y_2,0)$

या XY-समतल में,

M→ (x_1, y_1)

तथा N→ (x_2,y_2)

:: $MN^2 = (x_2 - X)^2 + (y_2 - y_1)^2$

अब P से लम्ब PRON पर खींचो जो ON को R पर मिले।

तब PR = MN तथा QR = QN - RN = QN - PM = $z_2 - z_1$

अब समकोण त्रिभुज PQR में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$PQ^2 = PR^2 + RO^2 = MN^2 + RO$

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

$\therefore \boxed{PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$

अतः दो बिन्दुओं के बीच की दूरी

$$= \sqrt{\left(\begin{matrix} x \text{ निर्देशांकों} \\ \text{का अन्तर} \end{matrix}\right)^2 + \left(\begin{matrix} y \text{ निर्देशांकों} \\ \text{का अन्तर} \end{matrix}\right)^2 + \left(\begin{matrix} z \text{ निर्देशांकों} \\ \text{का अन्तर} \end{matrix}\right)^2}$$

नोट : 1. बिन्दुओं O(0, 0, 0) तथा $P(x_1, y_1, z_1)$ के बीच की दूरी

$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

2. बिन्दु P(x,y,z) की x-अक्ष से लम्बवत् दूरी $\sqrt{y^2 + z^2}$ होगी।

3. बिन्दु:P (x,y,z) की -अक्ष से लम्बवत् दूरी $\sqrt{x^2 + z^2}$ होगी।

4. बिन्दु P (x,y,z) की z-अक्ष से लम्बवत् दूरी $\sqrt{x^2 + y^2}$होगी।

5. बिन्दु P(x,y,z) की XY समतल से लम्बवत् दूरी 7 होगी।

6. बिन्दु P(x,y,z) की YZ समतल से लम्बवत् दूरी होगी।

7. बिन्दु P(x,y,z) की XZ समतल से लम्बवत् दूरी y होगी।

दूरी के सूत्र के प्रयोग के लिये निम्न ज्यामिति

आकृतियों के गुणधर्म याद रखें

1.	वर्ग	सभी भुजाएँ बराबर	विकर्ण की लंबाई बराबर
2.	समचतुर्भुज	सभी भुजाएँ बराबर	विकर्ण की लंबाई बराबर नहीं
3.	आयत	सम्मुख भुजाएँ बराबर	विकर्ण की लंबाई बराबर
4.	समांतर चतुर्भुज	सम्मुख भुजाएँ बराबर	विकर्ण की लंबाई बराबर नहीं

खण्ड सूत्र (Section Formula)

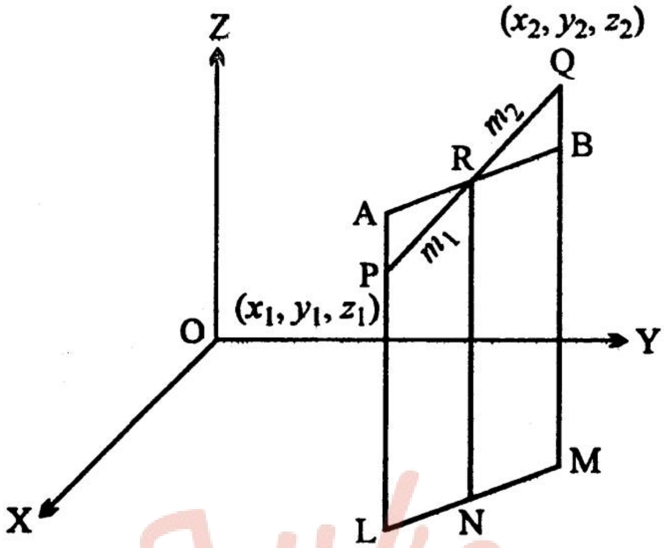
उस बिन्दु के निर्देशांक ज़ात करना जो बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1)

तथा (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाली रेखा $m_1 : m_2$ के अनुपात में बाँटता है।

मानलो बिन्दु $R(x, y, z)$, $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$को मिलाने वाली रेखा को PQ को

$m_1 : m_2$ के अनुपात में बाँटता है।

XY-समतल पर लम्ब PL, RN तथा QM खींचो।



सरल रेखाएँ PL, RN तथा QM स्पष्टतः एक समतल में स्थित हैं। (क्योंकि वे सभी एक ही समतल XY- समतल पर लम्ब हैं) **अत: वे समान्तर भी होंगी।** पुनः ये समान्तर रेखाएँ एक ही सरल रेखा PRQ के द्वारा काटी जाती हैं, अतः वे समतलीय होंगी।

अतः L, N,M जो लम्बों के पाद हैं, एक सरल रेखा में स्थिर होंगे जो कि XY-समतल तथा उस समतल की प्रतिच्छेद रेखा होगी जिसमें PL, RN तथा QM स्थित हैं।

R से एक सरल रेखा ARB खींचो जो LMN के समान्तर है तथा LP को (आगे बढ़ाने पर) A में तथा MQ को B में मिलती है।

अब त्रिभुजों APR तथा BRQ में,

$\angle ARP = \angle QRB,$ **(सम्मुख कोण)**

$\left.\begin{array}{l}\angle PAR = \angle RBQ,\\ \angle APR = \angle RQB,\end{array}\right\}$ **(एकान्तर कोण)**

त्रिभुज APR तथा BRQ समरूप हैं।

$$\therefore \quad \frac{PA}{BQ} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{m_2} \quad ...(1)$$

अब, $PA = AL - LP = RN - LP = z - z_1$

$BQ = MQ - MB = MQ - RN = z_2 - z$

$\therefore$ समी. (1) से,

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\Rightarrow \quad m_2 z - m_2 z_1 = m_1 z_2 - m_1 z$$

$$\Rightarrow \quad (m_1 + m_2) z = m_1 z_2 + m_2 z_1$$

$$\therefore \quad z = \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}$$

इसी प्रकार, $$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$

तथा $$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

अतः बिन्दुओं (x_1,y_1,z_1) तथा (x_2,y_2,z_2) को मिलाने वाली सरल रेखा को $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक होते हैं-

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}\right).$$

विशेष 1. यदि R, PQ का मध्य बिन्दु है, तो $m_1 = m_2$

$$\therefore \quad x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

इसी प्रकार, $$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

तथा $$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

अतः बिन्दुओं (x_1,y_1,z_1) तथा (x_2,y_2,z_2)को मिलाने वाली सरल रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक हैं-

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

विशेष 2. यदि R,PQ को बाह्यतः विभाजित करता है। तब,

$$x=\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}$$

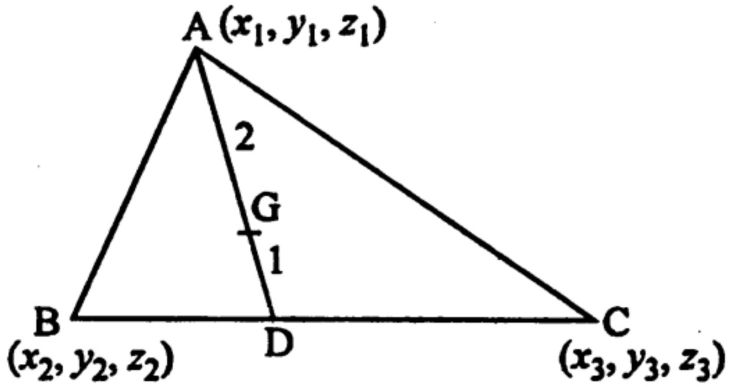
$$y=\frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}$$

तथा $$z=\frac{m_1z_2-m_2z_1}{m_1-m_2}.$$

त्रिभुज का केन्द्रक (Centroid of a Triangle)- किसी त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ तथा $C(x_3,y_3, z_3)$ हों, तो इसके केन्द्रक के निर्देशांक

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ होते हैं।

प्रमाण—



माना △ABC की भुजा BC का मध्य बिन्दु D है। D के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right);$$

A से D को मिलायें। माना △ABC का केन्द्रक D है। G, AD को 2 : 1 में विभक्त करता है।

∴ G के निर्देशांक

$$\left[\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+1.x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+1.y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+1.z_1}{2+1}\right]$$

$$=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

चतुष्फलक (Tetrahedron)

(i) यह चार त्रिभुजीय समतलों से घिरी आकृति है। इनमें से सभी एक ही बिन्दु से नहीं गुजरते हैं।

(ii) इसके 4 फलक होते हैं। ये हैं :

△ACD, △ADB, △ABC तथा △BCD.

(iii) इसके 4 शीर्ष होते हैं। ये हैं : A, B, C तथा D.

(iv) इसकी 6 कोरें (edges) होती हैं। ये हैं : AC, CD, DA, AB, BC तथा BD.

प्रत्येक कोर 4 समतलों में से दो समतलों की प्रतिच्छेद रेखा होती है।

(v) इसमें विपरीत कोरों के 3 जोड़े होते हैं। वे कोरे विपरीत कोर कहलाती हैं, जो कहीं नहीं मिलती हैं। ये जोड़े हैं :

(i) AB तथा CD,

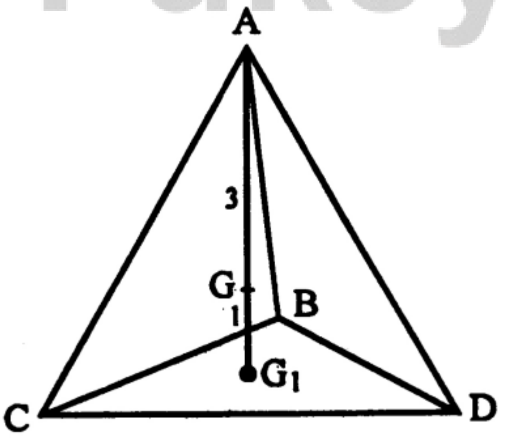
(ii) BC तथा AD,

(iii) BD तथा AC.

(vi) चतुष्फलक का केन्द्रक G इसके किसी शीर्ष को सम्मुख फलक के केन्द्रक से मिलाने वाली रेखा को 3 : 1 के अनुपात में बाँटता है।

इस प्रकार, यदि G_1 , △BCD, का केन्द्रक है तब G, जो चतुष्फलक ABCD का केन्द्रक है, AG_1 को 3 : 1 के अनुपात में विभाजित करेगा। अर्थात् =

$$\frac{AG}{GG_1} = \frac{3}{1}.$$



नोट : (i) चतुष्फलक के केन्द्रक के निर्देशांक जिसके शीर्ष (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) एवं (x_4, y_4, z_4)

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$$ होंगे।

(ii) उस त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक जिसके शीर्ष (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) एवं (x_3, y_3, z_3) हैं,

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$ होंगे।

बिन्दुपथ

किसी बिन्दु का बिन्दुपथ वह वक्र या सतह होती है जो उस बिन्दु के द्वारा दी हुई शर्तों को सन्तुष्ट करते हुए अनुरेखित की जाती है। यह गतिमान बिन्दु के निर्देशांकों के बीच वह सम्बन्ध होता है जो दी हुई शर्तों को सन्तुष्ट करता है।

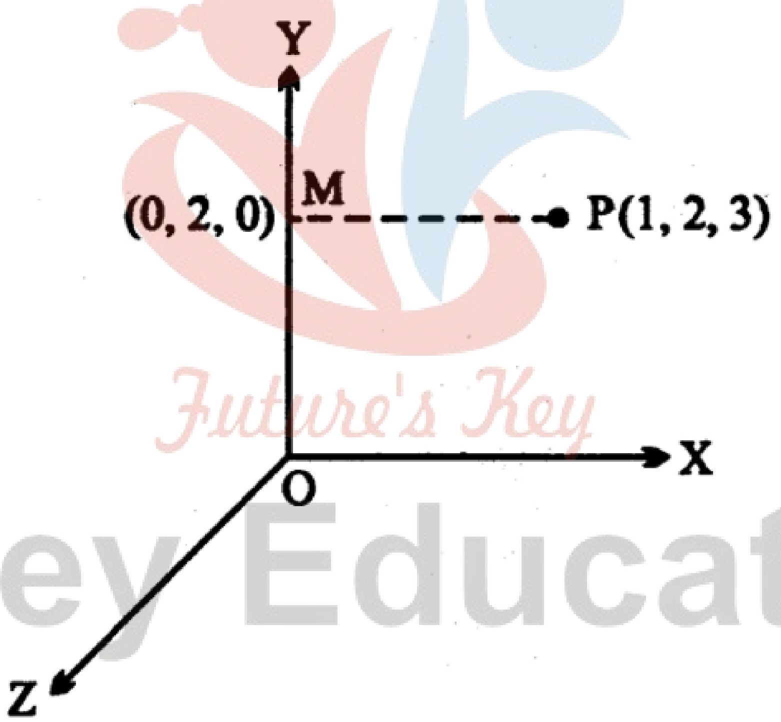
किसी बिन्दु का बिन्दुपथ $f(x,y, z) = 0$ के रूप वाले संबंध को सन्तुष्ट करता है, जिसे सतह का समीकरण कहते हैं।

बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात करना (To Find the Equation of the Locus)

किसी बिन्दुपथ का समीकरण ज्ञात करने के लिए हम उस बिन्दुपथ पर एक बिन्दु $P(x_1,y_1,z_1)$ लेते हैं तथा X_1, y_1,z_1 के बीच सम्बन्ध स्थापित करते हैं । तब x_1,y_1,z_1 के स्थान पर क्रमशः x,y,z रखकर हम उस संबंध को सामान्यीकृत (generalize) कर लेते हैं। यही अभीष्ट बिन्दुपथ का समीकरण होता है।

उदाहरण 1 बिन्दु (1,2,3) की Y-अक्ष से लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए।

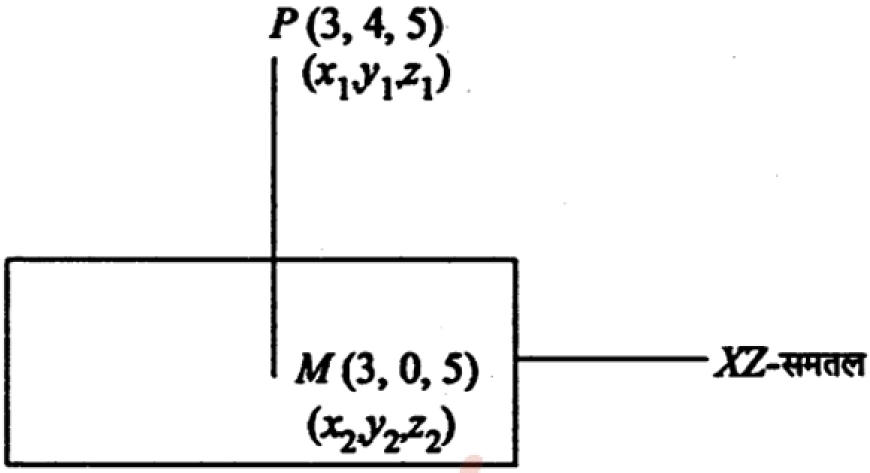
हल : माना P(1,2,3) से Y-अक्ष पर डाला गया लम्ब बिन्दु M पर मिलता है। अतः बिन्दु M के निर्देशांक (0, 2, 0) होंगे, क्योंकि Y-अक्ष पर x = 0 और z = 0.



उदाहरण 2 बिन्दु (3, 4, 5) की XZ-समतल से लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिये।

हल: बिन्दु P(3,4,5) से XZ-समतल पर PM लम्ब डाला।

XZ-समतल पर y = 0 होता है।



इसलिए M के निर्देशांक (3, 0, 5) होंगे। अतः

$$PM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{(3-3)^2 + (0-4)^2 + (5-5)^2}$$
$$\Rightarrow \quad PM = 4.$$

अतः अभीष्ट लम्बवत् दूरी

$$PM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

यहाँ $x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 3$

$x_2 = 0, y_2 = 2, z_2 = 0$

$$\therefore \quad PM = \sqrt{(0-1)^2 + (2-2)^2 + (0-3)^2}$$
$$= \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$$

उदाहरण 3 यदि बिन्दुओं (2,-1, A) और (-2, 1, 3) के बीच की दूरी $2\sqrt{5}$ हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : बिन्दु A (2,-1, K) और B (-2, 1, 3) के बीच की दूरी $2\sqrt{5}$ हैं

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

यहाँ $AB=2\sqrt{5}$

$x_1=2, y_1=-1, z_1=k$

$x_2=-2, y_2=1, z_2=3$

$$\therefore\ AB=2\sqrt{5}=\sqrt{(-2-2)^2+(1+1)^2+(3-k)^2}$$

$$2\sqrt{5}=\sqrt{16+4+9+k^2-6k}$$

$$2\sqrt{5}=\sqrt{29+k^2-6k}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$4\times5=29+k^2-6k$$

$$\Rightarrow\ k^2-6k+29-20=0 \Rightarrow\ k^2-6k+9=0$$

$$\Rightarrow k^2-2(k)(3)+(3)^2=0 \Rightarrow\ (k-3)^2=0$$

$$\Rightarrow\quad k-3=0 \Rightarrow\ k=3.$$

उदाहरण 4 z-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (1, 5, 7) तथा (5,1,-4) से समदूरस्थ है।

हल : चूँकि Z-अक्ष पर किसी बिन्दु के x तथा y- निर्देशांक शून्य होते हैं, अतएव मान लिया कि Z- अक्ष पर अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक P (0,0,z) हैं तथा दिये हुए बिन्दु A (1, 5, 7) और B (5, 1,-4) हैं। तब,

$$PA=\sqrt{(0-1)^2+(0-5)^2+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{1+25+z^2-14z+49}$$
$$=\sqrt{z^2-14z+75}$$

तथा $$PB=\sqrt{(0-5)^2+(0-1)^2+(z+4)^2}$$
$$=\sqrt{25+1+z^2+8z+16}$$
$$=\sqrt{z^2+8z+42}$$

प्रश्नानुसार,

$$PA=PB$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{z^2-14z+75}=\sqrt{z^2+8z+42}$$
$$\Rightarrow \quad z^2-14z+75=z^2+8z+42$$
$$\Rightarrow \quad -22z=-33$$
$$\Rightarrow \quad z=\frac{33}{22}=\frac{3}{2}$$

अत: अभीष्ट बिन्दु $\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$ है।

उदाहरण 5 XY-समतल में वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो तीन बिन्दुओं (2,0,3), (0,3,2) तथा (0, 0, 1) से समदूरस्थ है।

हल : चूँकि XY-समतल में किसी बिन्दु का z-निर्देशांक शून्य होता है, अतएव माना कि XY-समतल में अभीष्ट बिन्दु P(x,y 0) है तथा दिये हुए बिन्दु A (2,0,3), B (0,3,2) तथा C (0, 0, 1) हैं। तब,

$$PA = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (0-3)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 13}$$
$$PB = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2 + (0-2)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 13}$$

और $PC = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (0-1)^2}$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$

प्रश्नानुसार,

$$PA = PB = PC$$
$\therefore$ $PA = PB$
$\Rightarrow$ $\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 13} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 13}$
$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 4x + 13 = x^2 + y^2 - 6y + 13$
$\Rightarrow$ $-4x = -6y$
$\Rightarrow$ $2x = 3y \quad ...(1)$

पुनः $PB = PC$
$\Rightarrow$ $\sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 13} = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$
$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 6y + 13 = x^2 + y^2 + 1$
$\Rightarrow$ $-6y = -12 \Rightarrow y = 2$

y का मान समी. (1) में रखने पर,

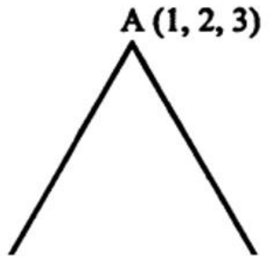
$2x = 3 \times 2 \Rightarrow x = 3$

अतः अभीष्ट बिन्दु (3,2,0) है।

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि वह त्रिभुज जिसके शीर्ष (1, 2, 3), (2, 3, 1) तथा (3, 1, 2) हैं, एक समबाहु त्रिभुज हैं।

हल : माना त्रिभुज ABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः (1, 2, 3), (2, 3, 1) तथा (3, 1, 2) हैं।

तब,

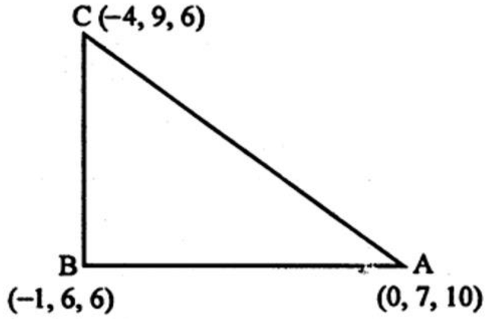


$$BC=\sqrt{(3-2)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}$$
$$=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$
$$CA=\sqrt{(1-3)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}$$
$$=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$
$$\because \quad AB=BC=CA=\sqrt{6}$$

अतः त्रिभुज ABC समबाहु है। यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 7 सिद्ध कीजिए कि वह त्रिभुज जिसके शीर्ष (0, 7, 10), (-1, 6, 6) तथा (-4,9,6) हैं, एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है।

हल : माना त्रिभुज ABC में शीर्षों A, B, C के निर्देशांक क्रमशः (0, 7, 10), (-1, 6, 6) तथा (-4,9,6) हैं।



तब $AB = \sqrt{(-1-0)^2 + (6-7)^2 + (6-10)^2}$

$= \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$

$BC = \sqrt{(-4+1)^2 + (9-6)^2 + (6-6)^2}$

$= \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18}$

$CA = \sqrt{(0+4)^2 + (7-9)^2 + (10-6)^2}$

$= \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36}$

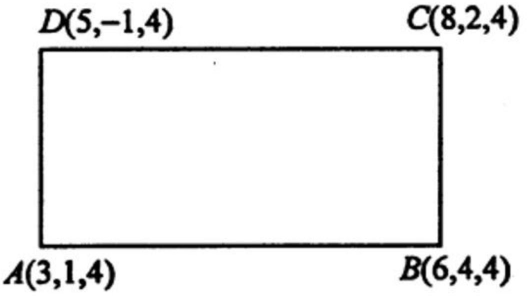
स्पष्टत: AB = BC, अत: AABC समद्विबाहु त्रिभुज है। तथा $AB^2 + BC^2 = 18 + 18 = 36 = CA^2$

अत: △ABC समकोण त्रिभुज है तथा ∠ABC = 90° अत: △ABC एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है।

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 8 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (3,1,4), (6,4,4), (8,2,4) तथा (5,-1, 4) एक आयत के शीर्ष हैं।

हल: माना दिये हुए बिन्दु A(3,1,4),B(6,4,4),C (8,2,4) तथा D(5,-1,4) हैं । तब,



$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2 + (4-4)^2}$$
$$= \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18}$$
$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (2-4)^2 + (4-4)^2}$$
$$= \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8}$$
$$CD = \sqrt{(8-5)^2 + (2+1)^2 + (4-4)^2}$$
$$= \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18}$$
$$DA = \sqrt{(5-3)^2 + (-1-1)^2 + (4-4)^2}$$
$$= \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8}$$

पुनः $AC = \sqrt{(8-3)^2 + (2-1)^2 + (4-4)^2}$
$$= \sqrt{25+1+0} = \sqrt{26}$$

तथा $BD = \sqrt{(6-5)^2 + (4+1)^2 + (4-4)^2}$
$$= \sqrt{1+25+0} = \sqrt{26}$$

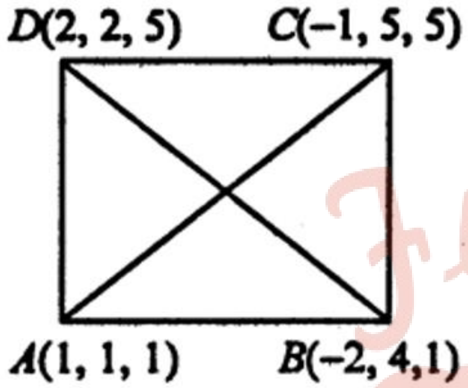
इस प्रकार हम देखते हैं कि AB = CD; BC = DA तथा AC = BD

अर्थात् चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएं बराबर हैं तथा इसके विकर्ण भी बराबर हैं। अतः दिये हुए बिन्दु एक आयत के शीर्ष हैं।

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 10 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (1, 1, 1), (-2, 4,1), (-1, 5, 5) तथा (2,2, 5) एक वर्ग के शीर्ष हैं।

हल : माना A (1, 1, 1), B (-2, 4, 1), C(-1, 5, 5) तथा D(2,2,5) है। तब,



$$AB=\sqrt{(1+2)^2+(1-4)^2+(1-1)^2}$$
$$=\sqrt{9+9+0}=\sqrt{18}$$
$$BC=\sqrt{(-2+1)^2+(4-5)^2+(1-5)^2}$$
$$=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}$$
$$CD=\sqrt{(-1-2)^2+(5-2)^2+(5-5)^2}$$
$$=\sqrt{9+9+0}=\sqrt{18}$$

$$DA = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2 + (5-1)^2}$$
$$= \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18},$$

पुन: $AC = \sqrt{(1+1)^2 + (1-5)^2 + (1-5)^2}$
$$= \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

और $BD = \sqrt{(-2-2)^2 + (4-2)^2 + (1-5)^2}$
$$= \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6.$$

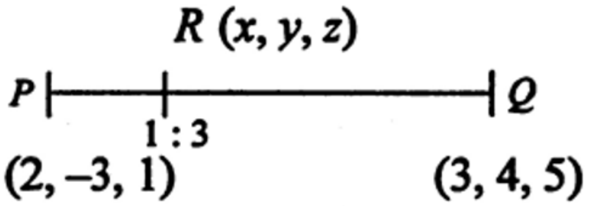
इस प्रकार हम देखते हैं कि

AB = CF; BC = DA तथा AC = BD अर्थात् चतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर हैं तथा इसके विकर्ण भी बराबर हैं। अतः दिये हुए बिन्दु एक वर्ग के शीर्ष हैं।

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 11 उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (2,-3,1) तथा (3,4,5) को मिलाने वाली रेखाको 1:3 के अनुपात में अन्तः तथा बाह्यतः विभाजित करते हैं।

हल : (i) माना कि बिन्दुओं P(2,-3, 1) और (3, 4, 5) को मिलाने वाली रेखा को 1:3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाला बिन्दु R(x,y, 2) है। तब खण्ड-सूत्र से,



$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \ y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \ z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

यहाँ $m = 1, n = 3, x_1 = 2, y_1 = -3, z_1 = 1, x_2 = 3, y_2 = 4, z_2 = 5$

$$x = \frac{1\times3+3\times2}{1+3}, \ y = \frac{1\times4+3(-3)}{1+3},$$

$$z = \frac{1\times5+3\times1}{1+3}$$

$$\therefore \ x = \frac{9}{4}, \ y = \frac{-5}{4}, \ z = 2$$

अभीष्ट बिन्दु $\left(\frac{9}{4}, -\frac{5}{4}, 2\right)$ हैं।

(ii) बाह्य विभाजन

$$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \ y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \ z = \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}$$

$$x = \frac{1\times3-3\times2}{1-3}, \ y = \frac{1\times4-3(-3)}{1-3},$$

$$z = \frac{1\times5-3\times1}{1-3}$$

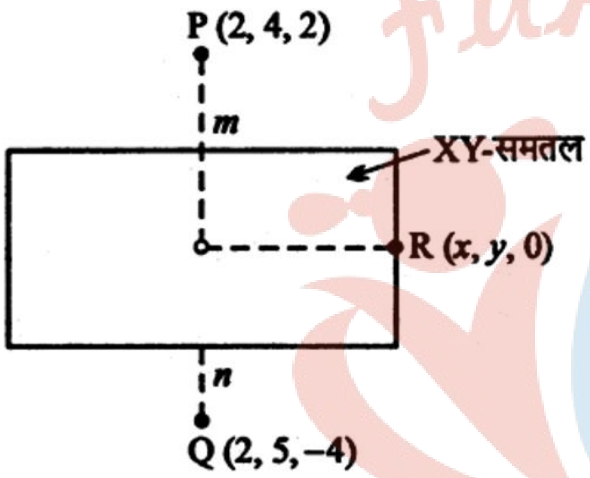
$$\therefore \ x = \frac{3}{2}, \ y = \frac{-13}{2}, \ z = -1$$

अभीष्ट बिन्दु $\left(\frac{3}{2}, \frac{-13}{2}, -1\right)$ हैं।

उदाहरण 12 बिन्दुओं (2,4,2) तथा (2,5,-4) को मिलाने वाली रेखा को XY-समतल किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल : मानलो XY-समतल बिन्दु R(x, y, 0) से बिन्दुओं P(2, 4, 2) तथा (2, 5,-4) को मिलाने वाली रेखा को m : n में विभाजित करता है।

तब खण्ड सूत्र से,



$$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

यहाँ, $z_1 = 2, z_2 = -4$ तथा $z = 0.$

$$\therefore \quad 0 = \frac{m(-4) + n(2)}{m+n}$$

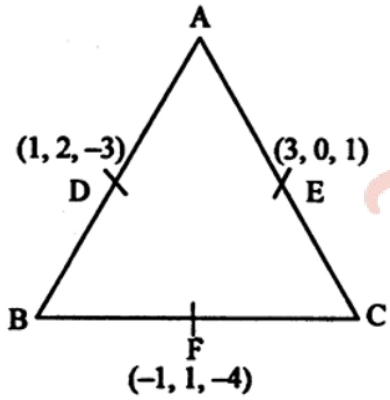
$$\Rightarrow \quad -4m + 2n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

अतः बिन्दुओं (2,4, 2) तथा (2, 5,-4) को मिलाने वाली रेखा को XY- समतल 1:2 में विभाजित करेगा।

उदाहरण 13 उस त्रिभुज का केन्द्रक ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाओं के मध्यबिन्दु D (1, 2,-3), E (3, 0, 1) तथा (-1, 1, -4) हैं।

हल:



ΔABC का केन्द्रक = ΔDEF का केन्द्रक

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},$$

$$z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

$$\therefore \quad x=\frac{1-1+3}{3}, y=\frac{2+0+1}{3}, z=\frac{-3-4+1}{3}$$

$$x=1, y=1, z=-2$$

अत : त्रिभुज ABC के केन्द्रक के निर्देशांक (1,1,-2) होंगे।

उदाहरण 13 बिन्दु 4(3, 2, 0), B(5, 3, 2) और C(-9,6-3) त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं।

AD,∠BAC का अन्त: समद्विभाजक है जो BC को D में मिलता है। D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल:

$$AB = \sqrt{(5-3)^2+(3-2)^2+(2-0)^2}$$
$$= \sqrt{4+1+4} = 3$$

तथा $$AC = \sqrt{(-9-3)^2+(6-2)^2+(-3-0)^2}$$
$$= \sqrt{144+16+9} = \sqrt{169} = 13$$

$\therefore AB : AC = 3 : 13.$

बिन्दु AD, ∠BAC का अन्तः समद्विभाजक है।

:: BD : CD = AB : AC

∴ बिन्दु D, रेखा BC को 3:13 के अनुपात में विभाजित करता है। मानाकि बिन्दु D के निर्देशांक (x, HE) हैं। तब,

$$x = \frac{3(-9)+13\times5}{3+13} = \frac{38}{16} = \frac{19}{8}$$

$$y = \frac{3\times6+13\times3}{3+13} = \frac{57}{16}$$

तथा $$z = \frac{3\times(-3)+13\times2}{3+13} = \frac{17}{16}$$

अतः बिन्दु D के निर्देशांक $\left(\frac{19}{8}, \frac{57}{16}, \frac{17}{16}\right)$ हैं।

उदाहरण 14 बिन्दु 4(3, 2, 0), B(5, 3, 2) और C(-9,6-3) त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं।

AD,∠BAC का अन्तः समद्विभाजक है जो BC को D में मिलता है। D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल:

$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2 + (2-0)^2}$$
$$= \sqrt{4+1+4} = 3$$

तथा
$$AC = \sqrt{(-9-3)^2 + (6-2)^2 + (-3-0)^2}$$
$$= \sqrt{144+16+9} = \sqrt{169} = 13$$

बिन्दु AD, ∠BAC का अन्तः समद्विभाजक है।

:: BD : CD = AB : AC

= 3 : 13

:: बिन्दु D, रेखा BC को 3:13 के अनुपात में विभाजित करता है। मानाकि बिन्दु D के निर्देशांक

(xy) हैं। तब,

$$x=\frac{3(-9)+13\times5}{3+13}=\frac{38}{16}=\frac{19}{8}$$

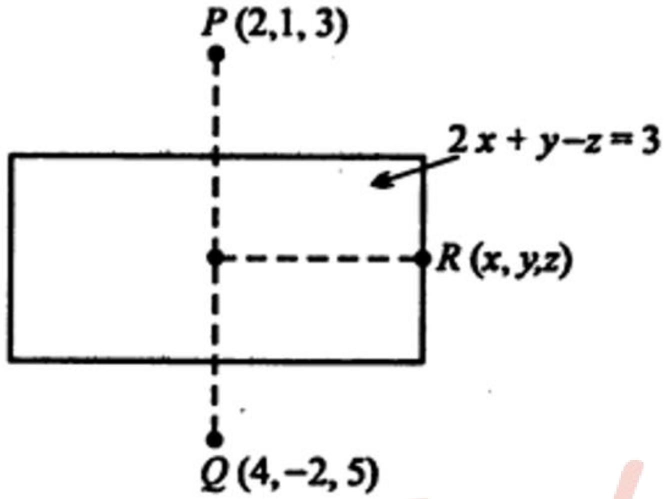
$$y=\frac{3\times6+13\times3}{3+13}=\frac{57}{16}$$

तथा $$z=\frac{3\times(-3)+13\times2}{3+13}=\frac{17}{16}$$

अतः बिन्दु D के निर्देशांक $\left(\frac{19}{8},\frac{57}{16},\frac{17}{16}\right)$ हैं।

उदाहरण 15 बिन्दुओं (2, 1, 3) तथा (4,-2, 5) को मिलाने वाली रेखाको समतल 2x + y-z = 3 किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल: मानलो समतल 2x + y – z = 3 बिन्दु R(x,y,) से बिन्दुओं P(2, 1,3) तथा ए(4,-2, 5) को मिलाने वाली रेखा को m : n में विभाजित करता है। तब खण्ड सूत्र से,



$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

यहाँ, $x_1 = 2, x_2 = 4, x = x.$

$$\therefore \quad x = \frac{m(4)+n(2)}{m+n} = \frac{4m+2n}{m+n}$$

तथा $$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

यहाँ, $y_1 = 1, y_2 = -2$ और $y = y.$

$$\therefore \quad y = \frac{m(-2)+n(1)}{m+n} = \frac{-2m+n}{m+n}$$

और $$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

यहाँ, $z_1 = 3, z_2 = 5$ और $z = z.$

$$\therefore \quad z = \frac{m(5)+n(3)}{m+n} = \frac{5m+3n}{m+n}$$

बिन्दु R(x,y,z) समतल 2x + y – z = 3 पर स्थित है इसलिए यह समतल के समीकरण को सन्तुष्ट करेगा।

$$\therefore \quad \frac{2(4m+2n)}{m+n}+\frac{n-2m}{m+n}-\frac{5m+3n}{m+n}=3$$

$$\Rightarrow \quad 8m+4n+n-2m-5m-3n=3m+3n$$

$$\Rightarrow \quad m+2n=3m+3n$$

$$\Rightarrow \quad 2m=-n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{n}=-\frac{1}{2}$$

अतः बिन्दुओं (2, 1,3) तथा (4,-2,5) को मिलाने वाली रेखा को समतल 2x + y – z = 3, 1 : -2 के अनुपात में विभाजित करेगा।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 12.1 (पृष्ठ संख्या 287)

प्रश्न 1 एक बिन्दु x-अक्ष पर स्थित है। इसके y-निर्देशांक तथा z-निर्देशांक क्या है?

उत्तर- x-अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशांक (x, O, O) होते है जिसमें y = O, z = O.

प्रश्न 2 एक बिन्दु XZ-तल में है। इसके y-निर्देशांक के बारे में आप क्या कह सकते है।

उत्तर- XZ तल में y-निर्देशांक 0 होता है। इस तल का बिन्दु (x, o, z) के रूप में होता है।

प्रश्न 3 उन अष्टांशो के नाम बताइय, जिसमें निम्नलिखित बिंदु स्थित है।

(1, 2, 3), (4, -2, 3), (4, -2, -5), (4, 2, -5), (-4, 2, -5), (-4, 2, 5), (-3, -1, 6) (-2,-4,-7)

उत्तर- दिए हुए बिन्दुओ के अष्टांश है:

(1, 2, 3) - XOYZ - पहला

(4, -2, 3) - XOYZ - चौथा

(4, -2, -5) - XOY'Z' आठवाँ

(4, 2, -5) - XOYZ' पाँचवाँ

(-4, 2, -5) - XOYZ' - छटा

(-4, 2, 5) - XOYZ - दूसरी

(-3, -1, 6) - XOY'Z - तीसरा

(-2, -4, -7) - XOY'Z' - आठवाँ

प्रश्न 4 रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए:

(i) x-अक्ष और y-अक्ष दोनों एक साथ मिल कर एक तल बनाते हैं, उस तल को ________ कहते हैं।
(ii) XY-तल में एक बिन्दु के निर्देशांक ________ रूप के होते हैं।
(iii) निर्देशांक तल अंतरिक्ष को ________ अष्टांश में विभाजित करते हैं।

उत्तर-

(i) x-अक्ष और y-अक्ष दोनों एक साथ मिल कर एक तल बनाते हैं, उस तल को **xy-तल** कहते हैं।
(ii) XY-तल में एक बिन्दु के निर्देशांक **(x, y, o)** रूप के होते हैं।
(iii) निर्देशांक तल अंतरिक्ष को **8** अष्टांश में विभाजित करते हैं।

प्रश्नावली 12.2 (पृष्ठ संख्या 289-290)

प्रश्न 1 निम्नलिखित बिंदु-युग्म के बीच की दुरी ज्ञात कीजिए:

(i) (2, 3, 5) और (4, 3, 1)

(ii) (-3, 7, 2) और (2, 4, -1)

(iii) (-1, 3, -4) और (1, -3, 4)

(iv) (2, -1, 3) और (-2, 1, 3)

उत्तर-

(i) दो बिन्दु (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) के बीच की दुरी

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_1)^2}$$

बिन्दु (2, 3, 5) और (4, 3, 1) के बीच की दुरी

$$= \sqrt{(4-2)^2 + (3-3)^2 + (1-5)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 0^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{4+16}$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

(ii) बिन्दु (-3, 7, 2) और (2, 4, -1) के बीच की दुरी

$$= \sqrt{(2+3)^2 + (4-7)^2 + (-1-2)^2}$$

$$= \sqrt{25+9+9}$$

$$= \sqrt{43}$$

(iii) बिन्दु (-1, 3, -4) और (1, -3, 4) के बीच की दुरी

$$= \sqrt{(1+1)^2 + (-3-3)^2 + (4+4)^2}$$

$$= \sqrt{4+36+64}$$

$$= \sqrt{104}$$

$$= 2\sqrt{26}$$

(iv) बिन्दु (2, - 1, 3) और (-2, 1, 3) के बीच की दुरी

$$= \sqrt{(-2-2)^2 + (1+1)^2 + (3-3)^2}$$

$$= \sqrt{16+4+0}$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

प्रश्न 2 दर्शाइए कि बिन्दु (-2, 3, 5), (1, 2, 3) और (7, 0, -1) संरेख हैं।

उत्तर-

मान लीजिए बिन्दु A(-2, 3, 5), और B(1, 2, 3) के बीच की दुरी

$$AB = \sqrt{(1+2)^2 + (2-3)^2 + (3-5)^2}$$

$$= \sqrt{9+1+4}$$

$$= \sqrt{14}$$

बिन्दु B(1, 2, 3) और C(7, 0, -1) के बीच की दुरी

$$BC = \sqrt{(7-1)^2 + (0-2)^2 + (-1-3)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 4 + 16}$$

$$= \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

बिन्दु A(-2, 3, 5) और C(7, 0, -1) के बीच की दुरी

$$AC = \sqrt{(7+2)^2 + (0-3)^2 + (-1-5)^2}$$

$$= \sqrt{81 + 9 + 36}$$

$$= \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

अब $AB + BC = \sqrt{14} + 2\sqrt{14}$

$$= 3\sqrt{14}$$

$$AC = 3\sqrt{14}$$

यहाँ AB + BC = AC

अतः बिन्दु A, B, C सरेख है।

प्रश्न 3 निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए:

(i) (0, 7, -10), (1, 6, -6), और (4, 9, -6) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(ii) (0, 7, 10), (-1, 6, 6), और (-4, 9, 6) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(iii) (-1, 2, 1), (1, -2, 5), (4, -7, 8) और (2, -3, 4) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

उत्तर-

(i) माना त्रिभुज ABC के शीर्ष A(0, 7, -10), B(1, 6, -6), और C(4, 9, -6) है।

अब $AB = \sqrt{(1-0)^2 + (6-7)^2 + (-6+10)^2}$

$= \sqrt{1+1+16}$

$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(4-1)^2 + (9-6)^2 + (-6+6)^2}$

$= \sqrt{9+9}$

$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

यहाँ $AB = BC$

अतः दिए गए शीर्ष समद्विबाहु त्रिभुज के है।

(ii) माना त्रिभुज PQR के शीर्ष P(0, 7, 10), Q(-1, 6, 6), और R(-4, 9, 6) हों, तब

$PQ^2 = (-1-0)^2 + (6-7)^2 + (6-10)^2$

$= 1 + 1 + 16 = 18$

$QR^2 = (-4+1)^2 + (9-6)^2 + (6-6)^2$

$= 9 + 9 + 0 = 18$

$PR^2 = (-4-0)^2 + (9-7)^2 + (6-10)^2$

$= 16 + 4 + 16$

$= 36$

$PQ^2 + QR^2 = 18 + 18 = 36$

अब $PR^2 = 36$

$\therefore PQ^2 + QR^2 = PR^2$

अतः दिए गए शीर्ष समकोण त्रिभुज के है।

(iii) माना चतुर्भुज ABCD के शीर्ष A(-1, 2, 1), B(1,-2, 5), C(4, -7, 8) और D(2,-3, 4) हों, तब

$AB^2 = (1 + 1)^2 + (-2 - 2)^2 + (5 - 1)^2$

$= 4 + 16 + 16 = 36$

$BC^2 = (4 - 1)^2 + (-7 + 2)^2 + (8 - 5)^2$

$= 9 + 25 + 9 = 43$

$CD^2 = (2 - 4)^2 + (-3 + 7)^2 + (4 - 8)^2$

$= 4 + 16 + 16 = 36$

$AD^2 = (2 + 1)^2 + (-3 - 2)^2 + (4 - 1)^2$

$= 9 + 25 + 9 = 43$

$AB^2 = CD^2$ और $BC^2 = AD^2$

AB = CD और BC = AD

अतः दिए गए बिन्दु एक समांतर चतुर्भुज के हैं।

प्रश्न 4 ऐसे बिन्दुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2, 3) और (3, 2, -1) से समदूरस्थ हैं।

उत्तर- माना कोई बिन्दु P(x, y, z) बिन्दु A(1, 2, 3) और बिन्दु B(3, 2, -1) से समान दूरी पर है।

अर्थात् PA = PB

या $PA^2 = PB^2$

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2$

$(x^2 - 2x + 1) + (z^2 - 6z + 9) = (x^2 - 6x + 9) + (z^2 + 2z + 1)$

$-2x + 6x - 6z - 2z + 10 - 10 = 0$

या $4x - 8z = 0$

अतः अभीष्ट समीकरण $x - 2z = 0$.

प्रश्न 5 बिन्दुओं P से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी बिन्दुओं A(4, 0, 0) और B(-4, 0, 0) से दूरियों का योगफल 10 है।

उत्तर- माना बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) है।

दिए गए बिन्दु A(4, 0, 0) और B(-4, 0, 0) इस प्रकार है कि PA + PB = 10

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$$
$$+\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2+(z-0)^2}=10$$

या $\sqrt{x^2+y^2+z^2+8x+16}=10$
$$-\sqrt{x^2+y^2+z^2+8x+16}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$x^2+y^2+z^2-8x+16$$
$$=100+(x^2+y^2+z^2+8x+16)$$
$$-20\sqrt{x^2+y^2+z^2+8x+16}$$

$$= 16x - 100 = -20\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 16}$$

$$4x + 25 = 5\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 16}$$

पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(4x + 25)^2 = 25(x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 16)$$

$$16x^2 + 200x + 625 = 25x^2 + 25y^2 + 25z^2 + 200x + 400$$

या $9x^2 + 25y^2 + 25z^2 = 625 - 400 = 225$

अतः अभीष्ट समीकरण $9x^2 + 25y^2 + 25z^2 = 225$

प्रश्नावली 12.3 (पृष्ठ संख्या 293-294)

प्रश्न 1 बिन्दुओं (-2, 3, 5) और (1, -4, 6) को मिलाने से बने रेखाखण्ड को अनुपात (i) 2 : 3 में अंतः (ii) 2 : 3 में बाह्यतः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i) माना बिन्दु A(-2, 3, 5) और B(1, -4, 6) को मिलाने से बने रेखाखण्ड AB को P(x, y, z), अनुपात 2 : 3 में अंतः विभाजित करता हो, तब

बिन्दु P के निर्देशांक इस प्रकार-

$$x = \frac{2\times1+3\times(-2)}{2+3} = \frac{2-6}{5} = \frac{-4}{5}$$

$$y = \frac{2\times(-4)+3\times3}{2+3} = \frac{-8+9}{5} = \frac{1}{5}$$

$$z = \frac{2\times6+3\times5}{2+3} = \frac{12+15}{5} = \frac{27}{5}$$

अतः बिन्दु P के निर्देशांक $\left(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{27}{5}\right)$

(ii) जब बिन्दु P(x, y, z) रेखाखण्ड AB के बाह्यतः विभाजित करता हो, तो निर्देशांक इस प्रकार होंगे

$$x = \frac{2\times1-3\times(-2)}{2-3} = \frac{2+6}{-1} = -8$$

$$y = \frac{2\times(-4)-3\times3}{2-3} = \frac{-8-9}{-1} = 17$$

$$z = \frac{2\times6-3\times5}{2-3} = \frac{12-15}{-1} = 3$$

अतः बिन्दु P के निर्देशांक (-8, 17, 3) होंगे।

प्रश्न 2 दिया गया है कि बिन्दु P(3, 2, -4), Q(5, 4, -6) और R(9, 8, -10) संरेख हैं। वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें Q, PR को विभाजित करता है।

उत्तर- माना बिन्दु Q, रेखाखण्ड PR को k : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

$\therefore$ x-निर्देशांक, $5 = \frac{k\times9+1\times3}{k+1}$

या $5(k+1) = 9k+3$

या $4k = 5-3 = 2$

या $k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

इसी प्रकार y-निर्देशांक, $4 = \frac{8k+2}{k+1}$ या $4k+4 = 8k+2$

या $8k-4k = 4-2$ या $4k = 2$

या $k = \frac{1}{2}$

अब z-निर्देशांक, $-6 = \frac{-10k-4}{k+1}$

या $6k+6 = 10k+4$

या $10k-6k = 6-4$ या $4k = 2$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2}$

अतः बिन्दु P, Q, R, संरेख है और Q, PR को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है।

प्रश्न 3 बिन्दुओ (-2, 4, 7) और (3, -5, 8) को मिलाने वाली रेखा खण्ड, YZ-तल द्वारा जिस अनुपात में विभक्त होता है, उसे ज्ञात कीजिए।

उत्तर- मान लीजिए बिन्दु P पर तल YZ रेखाखण्ड AB क k : 1 के अनुपात में प्रतिच्छेद करता है, तब YZ–तल पर प्रत्येक बिन्दु (o, y, z) के रूप में होगा।

A, B के निर्देशांक क्रमशः (-2, 4, 7) और (3, -5, 8) है।

$$\therefore 0 = \frac{k \times 3 + 1 \times (-2)}{k+1} = \frac{3k - 2}{k+1}$$

$\therefore 3k - 2 = 0$ या $k = \frac{2}{3}$

अतः AB को YZ-तल 2 : 3 के अनुपात में विभक्त करता है।

प्रश्न 4 विभाजन सूत्र का प्रयोग करके दिखाइए A(2, -3, 4), B(-1, 2, 1) तथा C $\left(0, \frac{1}{3}, 2\right)$ संरेख हैं।

उत्तर- माना A, B, C संरेख है B, रेखाखण्ड AC को K : 1 में विभाजित करता है।

$$\therefore -1 = \frac{k \times 0 + 1 \times 2}{k+1}$$

या $-k - 1 = 2$ या $k = -3$

$$\therefore 2 = \frac{k \times \frac{1}{3} + 1 \times (-3)}{k+1}$$

या $2k + 2 = \frac{k}{3} - 3$

या $2k - \frac{k}{3} = -3 - 2$

या $\frac{5}{3}k = -5$ या $k = -3$

और $1 = \frac{k \times 2 + 1 \times 4}{k+1}$

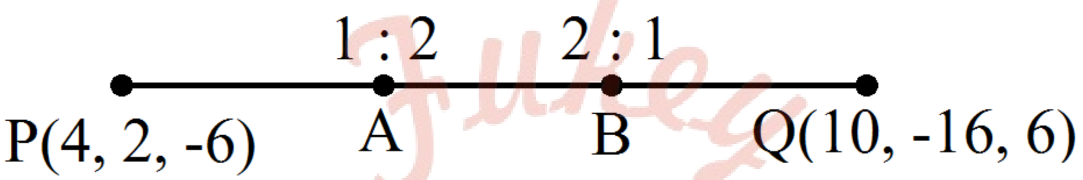
या $k + 1 = 2k + 4$

$k = -3$

अतः बिन्दु A, B, C संरेख है।

प्रश्न 5 P(4, 2, -6) और Q(10, -16, 6) के मिलाने वाली रेखाखण्ड PQ को सम-त्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना बिन्दु A, B रेखाखण्ड PQ को 3 समान भागों में विभाजित करती है।



बिन्दु A, रेखाखण्ड PQ को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है।

$$A = \left(\frac{1\times10+2\times4}{1+2}, \frac{1\times(-16)+2\times2}{1+2}, \frac{1\times6+2\times(-6)}{1+2}\right)$$

या $A = \left(\frac{18}{3}, \frac{-12}{3}, \frac{-6}{3}\right)$ अर्थात् A(6, -4, -2)

बिन्दु B, रेखा खण्ड PQ को 2 : 1 अनुपात में विभाजित करता है।

$\therefore$ B के निर्देशांक $= B\left(\frac{2\times10+1\times4}{2+1}, \frac{2\times(-16)+1\times2}{2+1}, \frac{2\times6+1\times(-6)}{2+1}\right)$

$$= B\left(\frac{20+4}{3}, \frac{-32+2}{3}, \frac{12-6}{3}\right)$$

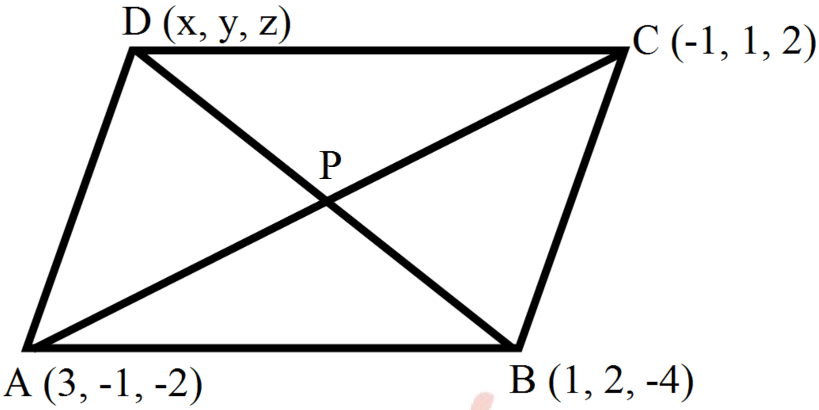
$$= B(8, -10, 2)$$

अतः A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (6, -4, -2) और (8, -10, 2) है।

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 295)

प्रश्न 1 समातंर चतुर्भुज के तीन शीर्ष A(3, -1, 2), B(1, 2, -4) व C(-1, 1, 2) हैं। चौथे शीर्ष D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- शीर्ष A और C क्रमशः (3, -1, 2), (-1, 1, 2) है।



A और C के मध्य बिन्दु P के निर्देशांक $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$ या $(1, 0, 2)$

मान लीजिए बिन्दु D के निर्देशांक (x, y, z) है और बिन्दु B के निर्देशांक (1, 2, -4) है।

$\therefore$ DB का मध्य बिन्दु $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z-4}{2}\right)$

समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को 2 समान भागों में बाँटते है।

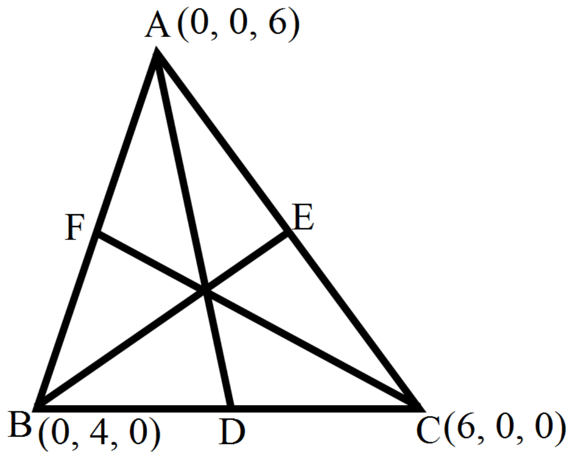
इसलिए $\frac{x+1}{2} = 1, \frac{y+2}{2} = 0, \frac{z-4}{2} = 2$

$$\therefore x = 1, y = -2, z = 8$$

अतः बिन्दु D के निर्देशांक (1, - 2, 8) है।

प्रश्न 2 एक त्रिभुज ABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः A(0, 0, 6), B(0, 4, 0) तथा C(6, 0, 0) हैं। त्रिभुज की माध्यिकाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- बिन्दु B(0, 4, 0) और C(6, 0, 0) को मिलाने वाला रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु D$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ या (3, 2, 0) है।



∴ बिन्दु A के निर्देशांक (0, 0, 6) है।

त्रिभुज ABC की मध्यिका AD की लंबाई

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2 + (0-6)^2}$$

$$= \sqrt{9+4+36}$$

$$= \sqrt{49} = 7$$

C और A के निर्देशांक (6, 0, 0) और (0, 0, 6)

AC का मध्य बिन्दु E $\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right)$ या E(3, 0, 3)

और B के निर्देशांक (0, 4, 0) है।

त्रिभुज ABC की मध्यिका BE की लंबाई

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2 + (3-0)^2}$$

$$= \sqrt{9+16+9}$$

$$= \sqrt{34}$$

बिन्दु A और B के निर्देशांक क्रमशः (0, 0, 6),(0, 4, 0) है।

∴ AB का मध्य बिन्दु F $\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$ या F(0, 2, 3) है।

त्रिभुज ABC की मध्यिका CF की लंबाई

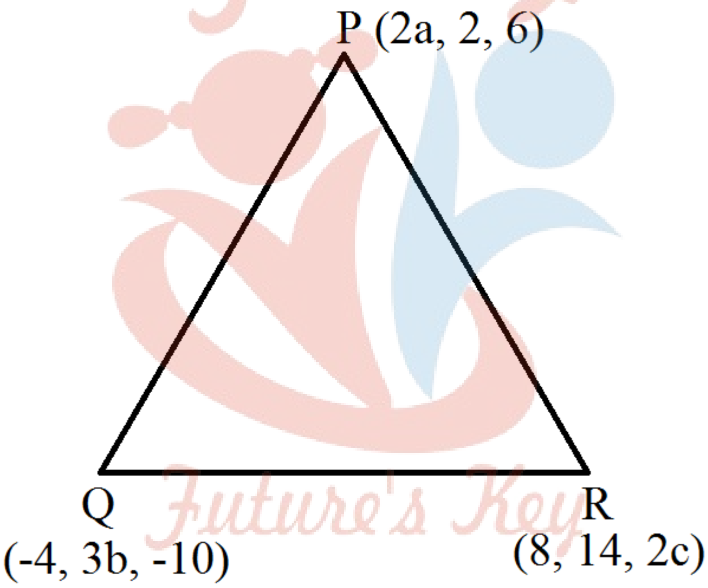
$$= \sqrt{(6-0)^2 + (0-2)^2 + (0-3)^2}$$

$$= \sqrt{36+4+9}$$

$$= \sqrt{49} = 7$$

प्रश्न 3 यदि त्रिभुज PQR का केन्द्रक मूल बिन्दु है और शीर्ष P(2a, 2, 6), Q(-4, 3b, -10) और R(8, 14, 2c) हैं तो a, b और c का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



$\triangle PQR$ का केन्द्रक $= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

अर्थात् $\left(\frac{2a-4+8}{3}, \frac{2+3b+14}{3}, \frac{6-10+2c}{3}\right)$

मूलबिंदु केंद्रक है अर्थात् केंद्रक के निर्देशांक (0, 0, 0) है, तब

$\frac{2a-4+8}{3} = 0$

$\Rightarrow 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = -2$

तथा $\frac{2+3b+14}{3} = 0$

$\Rightarrow 3b + 16 = 0$

$\Rightarrow b = -\frac{16}{3}$

तथा $\frac{6-10+2c}{3} = 0$

$\Rightarrow 2c - 4 = 0$

$\Rightarrow c = 2$

$\therefore a = -2, b = \frac{16}{3}, c = 2$

प्रश्न 4 y-अक्ष पर उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसकी बिन्दु P(3, -2, 5) से दूरी $5\sqrt{2}$ है।

उत्तर- y-अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $A(0, y_1, 0)$ है। A से P(3, -2, 5) के बीच की दुरी = $5\sqrt{2}$

$\therefore AP^2 = (3-0)^2 + (-2-y_1)^2 + (5-0)^2$

$= 9 + (-2-y_1)^2 + 25$

$= (y_1+2)^2 + 34$

$AP = \sqrt{(y_1+2)^2 + 34} = 5\sqrt{2}$ (दिया है)

$\therefore (y_1+2)^2 + 34 = 50$

$\therefore (y_1+2)^2 = 50 - 34 = 16$

$y_1 + 2 = \pm 4$

+ve चिन्ह लेने पर, $y_1 = 4 - 2 = 2$

-ve चिन्ह लेने पर, $y_1 = -4 - 2 = -6$

∴ y-अक्ष पर अभीष्ट बिन्दु (0, 2, 0) और (0, - 6, 0) है।

प्रश्न 5 P(2, -3, 4) और Q(8, 0, 10) को मिलाने वाली रेखाखण्ड पर स्थित एक बिन्दु R का x-निर्देशांक 4 है। बिन्दु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना बिन्दु R, PQ को K : 1 में विभाजित करता है जबकि P और Q के निर्देशांक P (2, -3, 4) और Q (8, 0, 10) है।

$\therefore$ बिन्दु R के निर्देशांक $\left(\frac{8k+2}{k+1}, \frac{-3}{k+1}, \frac{10k+4}{k+1}\right)$

परन्तु x-निर्देशांक 4 के समान है।

$\therefore \frac{8k+2}{k+1} = 4$ या $8k + 2 = 4k + 4$

$\therefore 4k = 2$ या $k = \frac{1}{2} = 1 : 2$

y-निर्देशांक $= \frac{-3}{k+1} = \frac{-3}{\frac{1}{2}+1} = \frac{-3\times2}{3} = -2$

z-निर्देशांक $= \frac{10k+4}{k+1}$

$= \frac{10\times\frac{1}{2}+4}{\frac{1}{2}+1} = \frac{5+4}{\frac{3}{2}}$

$= \frac{9\times2}{3} = 6$

अतः R के निर्देशांक (4, -2, 6) है।

प्रश्न 6 यदि बिन्दु A और B क्रमशः (3, 4, 5) तथा (-1, 3, -7) हैं। चर बिन्दु P द्वारा निर्मित समुच्चय से संबंधित समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ $PA^2 + PB^2 = k^2$ जब कि k अचर है।

उत्तर- माना बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) है।

बिन्दु A(3, 4, 5) है।

$PA^2 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2$

बिन्दु B(-1, 3, 7) है।

$\therefore PB^2 = (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 7)^2$

दिया है, $PA^2 + PB^2 = k^2$

$\therefore [(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2] + [(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 7)^2] = k^2$

या $(x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 10z + 9 + 16 + 25) + (x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 14z + 1 + 9 + 49) = k^2$

$\therefore 2(x^2 + y^2 + z^2) - 4x - 14y + 4z + 50 + 59 - k^2 = 0$

या $2(x^2 + y^2 + z^2) - 4x - 14y + 4z + 109 - k^2 = 0$

या $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 7y + 2z = \frac{k^2 - 109}{2}$