गणित

अध्याय-10: हीरोन का सूत्र

Fukey Education

त्रिभुज का क्षेत्रफल

त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए साधारण फार्मूला $\frac{1}{2}$ x आधार x लंब दिया गया है।

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

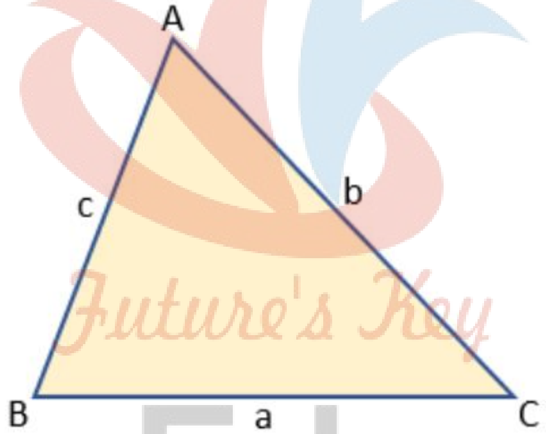
त्रिभुज का क्षेत्रफल – हीरोन के सूत्र द्वारा

हीरोन ने त्रिभुज की तीनों भुजाओं के पदों में उसके क्षेत्रफल का प्रसिद्ध (या सुपरिचित) सूत्र प्रतिपादित किया है। हीरोन के इस सूत्र को हीरो का सूत्र भी कहा जाता है। इसे नीचे दिया जा रहा है:

त्रिभुज का क्षेत्रफल = √{s(s – a) (s – b) (s – c)}

जहाँ a, b और c त्रिभुज की भुजाएँ हैं तथा

s = त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप = $\frac{a+b+c}{2}$ है।



Fukey Education

नोट: यह सूत्र उस स्थिति में सहायक होता है, जब त्रिभुज की ऊँचाई सरलता से ज्ञात न हो सकती हो।

नोट – 1. त्रिभुज का अर्ध-परिमाप त्रिभुज के परिमाप का आधा होता है।

2.त्रिभुज की तीन भुजाएँ a, b और c हैं। जहाँ भुजा a, शीर्ष A के विपरीत भुजा को दर्शाती है, जिसका अर्थ है भुजा BC। इसी प्रकार, भुजाएँ b और c, शीर्ष B और C के विपरीत भुजाओं को दर्शाती हैं जिसका अर्थ क्रमश: भुजाएँ AC और AB है।

3. हीरोन का सूत्र तब उपयोगी होता है जब त्रिभुज की ऊँचाई न दी गई हो या आसानी से ज्ञात न हो सके।

हल सहित उदाहरण

एक त्रिभुजाकार पार्क ABC का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, इस सूत्र का प्रयोग करें। जिसकी भुजाएं a = 40 m, b = 24 m और c = 32 m हैं।

हल:

सबसे पहले हम s ज्ञात करते हैं:

$s = \frac{40 + 24 + 32}{2}$ m

= 48 m

हीरोन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल = √{s(s – a) (s – b) (s – c)}

= √{48(48 – 40) (48 – 24) (48 – 32)} m^2

= √{48(48 – 40) (48 – 24) (48 – 32)} m^2

= √{48(8) (24) (16)} m^2

= 384 m^2

एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 8 Cm और 11 Cm हैं और जिसका परिमाप 32 Cm है।

यहाँ परिमाप = 32 cm, a = 8 cm तथा b = 11 cm है।

इसलिए तीसरी भुजा c = 32 cm – (8 + 11) cm = 13 cm

अब, 2s = 32 है इसलिए, s = 16 cm,

s – a = (16 – 8) cm = 8 cm,

s – b = (16 – 11) cm = 5 cm,

s – c = (16 – 13) cm = 3 cm

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल = √{s(s – a) (s – b) (s – c)}

= √{16(8) (5) (3)} cm^2

= 8√30 cm^2

एक त्रिभुजाकार भूखंड की भुजाओं का अनुपात 3: 5: 7 है और उसका परिमाप 300 m है। इस भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

मान लीजिए भुजाएँ (मीटरों में) 3x, 5x और 7x हैं।

तब, हम जानते हैं कि 3x + 5x + 7x = 300 (त्रिभुज का परिमाप)

इसलिए, 15x = 300 है, जिससे x = 20 प्राप्त होता है।

इसलिए, त्रिभुज की भुजाएँ 3 × 20 m, 5 × 20 m और 7 × 20 m हैं।

अर्थात् ये भुजाएँ 60 m, 100 m और 140 m हैं।

अब हीरोन का सूत्र प्रयोग करके क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं:

यहाँ 2s = 300 m इसलिए s = 150 m

इसलिए, क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

= $\sqrt{150(150 - 60)(150 - 100)(150 - 140)}$

= $\sqrt{150(90)(50)(10)} = 1500\sqrt{3}\ m^2$

चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात करने में हीरोन के सूत्र का अनुप्रयोग

एक चतुर्भुज जिसकी भुजाएँ तथा एक विकर्ण दिए हों, तो उसका क्षेत्रफल उसे दो त्रिभुजों में विभाजित करके और फिर हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है।

हल सहित उदाहरण

कमला के पास 240m, 200m और 360m भुजाओं वाला एक त्रिभुजाकार खेत है, जहाँ वह गेहूँ उगाना चाहती है। इसी खेत से संलग्न 240m, 320m और 400m भुजाओं वाला एक अन्य खेत है, जहाँ वह आलू और प्याज उगाना चाहती है। उसने इस खेत की सबसे लम्बी भुजा के मध्य-बिन्दु को सम्मुख शीर्ष से जोड़कर उसे दो भागों में विभाजित कर दिया। इनमें से एक भाग में उसने आलू उगाए और दूसरे भाग में प्याज उगाई। गेहूँ, आलू और प्याज के लिए कितने-कितने क्षेत्रफलों (हेक्टेयर में) का प्रयोग किया गया है? (1 हेक्टेयर = 10000m^2 है)

हल:

मान लीजिए ABC वह खेत है, जहाँ गेहूँ उगाया गया है। साथ ही, ACD वह खेत है जिसकी भुजा AD के मध्य-बिन्दु E को C से जोड़कर इस खेत को दो भागों में विभाजित किया गया है।

a = 200 m, b = 240 m, c = 360 m

अतः $s = \frac{200 + 240 + 360}{2}$ m = 400 m

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

इसलिए, गेहूँ उगाने के लिए क्षेत्रफल

$= \sqrt{400(400 - 200)(400 - 240)(400 - 360)}\ m^2$

$= \sqrt{400(200)(160)(40)}\ m^2$

$= 16000\sqrt{2}\ m^2 = 1.6 \times \sqrt{2}$ हेक्टेयर

$= 2.26$ हेक्टेयर

आइए अब Δ ACD के क्षेत्रफल की गणना करते हैं

यहाँ, $s = \dfrac{240 + 320 + 400}{2}$

अत: Δ ACD का क्षेत्रफल $= \sqrt{480(480 - 240)(480 - 320)(480 - 400)}\ m^2$

$= \sqrt{480(240)(160)(80)}\ m^2$

$= 38400\ m^2 = 3.84$ हेक्टेयर

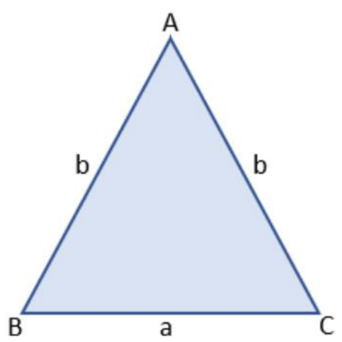
ध्यान दीजिए कि AD के मध्य-बिन्दु E को सम्मुख शीर्ष C से जोड़ने वाला रेखाखंड त्रिभुज ACD को बराबर क्षेत्रफलों वाले दो भागों में विभाजित करता है। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं? वास्तव में, इन दोनों भागों के बराबर आधार AE और ED हैं तथा निःसंदेह इनकी संगत ऊँचाइयाँ भी बराबर हैं।

अतः, आलू उगाने के लिए क्षेत्रफल = प्याज उगाने के लिए क्षेत्रफल

$= (3.84 \div 2)$ हेक्टेयर $= 1.92$ हेक्टेयर

हीरोन के सूत्र द्वारा एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

माना $\triangle$ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है और इसकी भुजाएँ a, b, और b हैं। इस समद्विबाहु $\triangle$ABC, में भुजाएँ AB और AC बराबर भुजाएँ हैं।



Fukey Education

सबसे पहले, हम समद्विबाहु △ABC का अर्ध-परिमाप ज्ञात करेंगे।

समद्विबाहु △ABC का अर्ध-परिमाप, $s = (a + b + b)/2 = (a + 2b)/2$

अब, समद्विबाहु △ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - b)}$

$= \sqrt{s(s - a)(s - b)^2}$

$= (s - b)\sqrt{s(s - a)}$

चूँकि $s = (a + 2b)/2$ इसलिए,

$= \{(a + 2b/2) - b\}\sqrt{\{(a + 2b)/2\}[\{(a + 2b)/2\} - a]}$

$= \{(a + 2b - 2b)/2\}\sqrt{\{(a + 2b)/2\}[\{(a + 2b - 2a)/2\}]}$

$= (a/2)\sqrt{\{(a + 2b)/2\}[\{(2b - a)/2\}]}$

$= (a/2)\sqrt{\{(2b + a)/2\}\{(2b - a)/2\}}$

$= (a/2)\sqrt{[\{(2b)^2 - a^2\}/4]}$

$= (a/2)(1/2)\sqrt{\{4b^2 - a^2\}}$

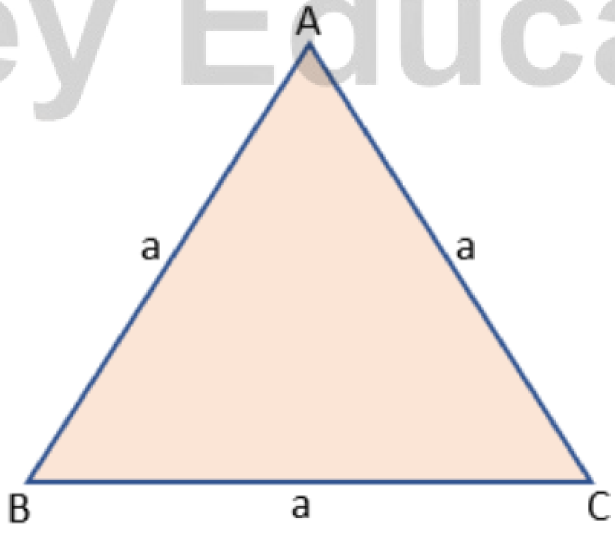
$= (a/4)\sqrt{(4b^2 - a^2)}$

हीरोन के सूत्र द्वारा एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

तीनों भुजाओं की समान माप वाला त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज होता है।

माना △ABC एक समबाहु त्रिभुज है और इसकी तीन भुजाएँ a, a और a हैं।

Fukey Education



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

सबसे पहले, हम समबाहु △ABC का अर्ध-परिमाप ज्ञात करेंगे।

समबाहु △ABC का अर्ध-परिमाप, $s = (a + a + a)/2 = 3a/2$

अब, समबाहु △ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s - a)(s - a)(s - a)}$

$= \sqrt{s(s - a)(s - a)^2}$

$= (s - a)\sqrt{s(s - a)}$

चूँकि $s = 3a/2$ इसलिए,

$= (3a/2 - a)\sqrt{(3a/2)(3a/2 - a)}$

$= \{(3a - 2a)/2\}\sqrt{(3a/2)\{(3a - 2a)/2\}}$

$= (a/2)\sqrt{(3a/2)(a/2)}$

$= (a/2)\sqrt{(3a^2/4)}$

$= (a/2)(a/2)\sqrt{3}$

$= (a^2/4)\sqrt{3}$

स्मरणीय तथ्य:

यदि त्रिभुज की भुजाएँ a, b और c हों, तो हीरोन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल

$\sqrt{\{s(s - a)(s - b)(s - c)\}}$ होता है जहाँ $s = \frac{a + b + c}{2}$ है।

एक चतुर्भुज जिसकी भुजाएँ तथा एक विकर्ण दिए हों, तो उसका क्षेत्रफल उसे दो त्रिभुजों में विभाजित करके और फिर हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है।

उद्देश्य:

इस पाठ के अंत में आप निम्न करने में सक्षम हो जाएंगे।

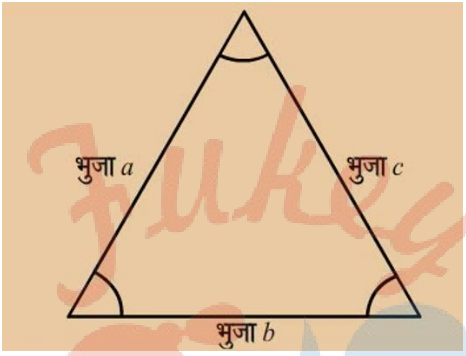
- हीरोन के सूत्र को परिभाषित करना।
- हीरोन के सूत्र के लिए सूत्र लिखना।
- हीरोन के सूत्र के प्रयोग से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना।
- हीरोन के सूत्र के प्रयोग से चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करना।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

परिभाषा:

हीरोन के सूत्र का नामकरण 10 ई.पू. से 75 ई.पू. के बीच हुए ग्रीक अभियंता और गणितज्ञ अलेक्जेंड्रिया के हीरोन के नाम पर हुआ था।

हम इस सूत्र का प्रयोग त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई का प्रयोग करते हुए त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए कर सकते हैं।

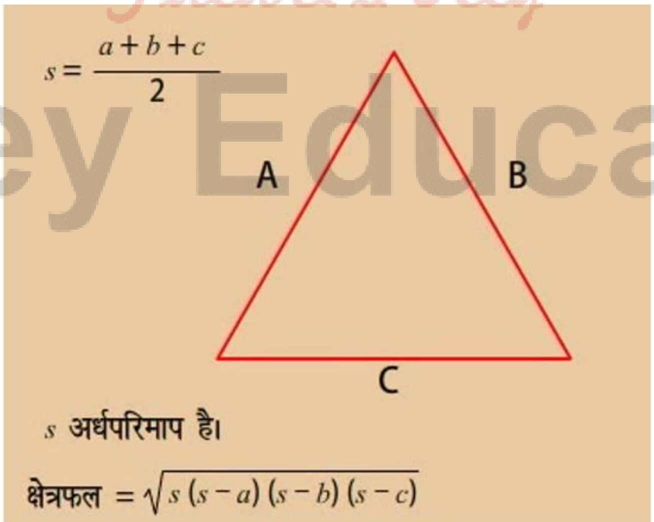


त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए दिए गए हीरोन के सूत्र को हीरो का सूत्र भी कहा जाता है।

सूत्र:

हमें क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए आधार और ऊंचाई के । प्रयोग से क्षेत्रफल ज्ञात करने वाले सूत्र पर विश्वास करने की आवश्यकता नहीं है।

दो चरणों की प्रक्रिया का प्रयोग करना:



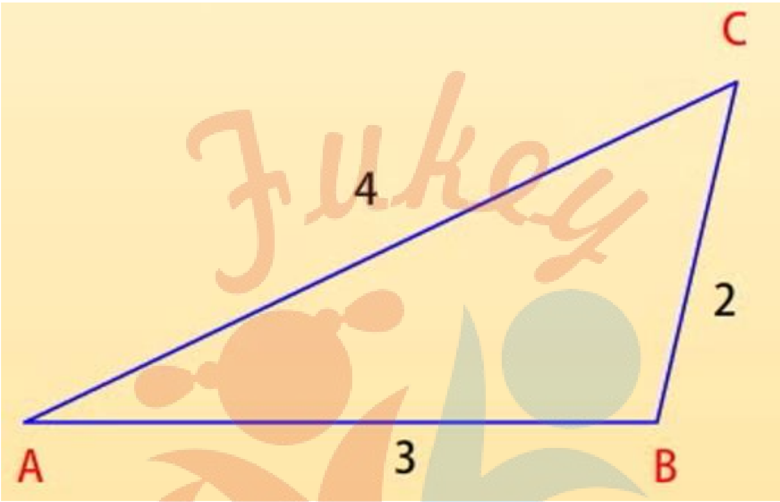
चरण 1: $S = \frac{a+b+c}{2}$ का प्रयोग करके "S" (त्रिभुज के परिमाप का आधा) की गणना करना।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

चरण 2: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ का प्रयोग करके क्षेत्रफल ज्ञात करना। जहां a, b और c त्रिभुज की भुजाएं हैं।

उदाहरण: 1

यदि AB = 3, BC = 2, CA = 4 भुजाएं हों तो हीरोन के सूत्र से त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



चरण 1: अर्धपरिमाप की गणना कीजिए जो कि $s = \frac{a+b+c}{2}$ के बराबर है।

भुजाओं का मान रखने पर हमें प्राप्त होता है।

$$s = \frac{3+2+4}{2}$$

$$s = \frac{9}{2} = 4.5$$

चरण 2:

S का मान $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

सूत्र में रखने पर,

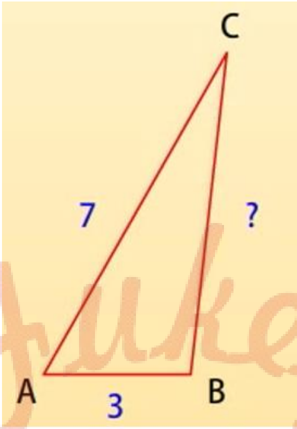
$$A = \sqrt{4.5(4.5-2)(4.5-3)(4.5-4)}$$
$$A = \sqrt{4.5(2.5)(1.5)(.5)}$$
$$A = \sqrt{8.4375} \approx 2.9$$

उदाहरण: 2

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

एक त्रिभुज दिया हुआ है जिसका क्षेत्रफल 8.94 वर्ग इकाई है, परिमाप 16 और भुजाओं की लम्बाई AB = 3 और CA = 7 है, तो भुजा BC की लम्बाई कितनी है?

हल:



चरण 1: अर्धपरिमाप S की गणना कीजिए

$$s = \frac{\text{परिमाप}}{2}$$

यहां परिमाप 16 दिया है।

इसलिए,

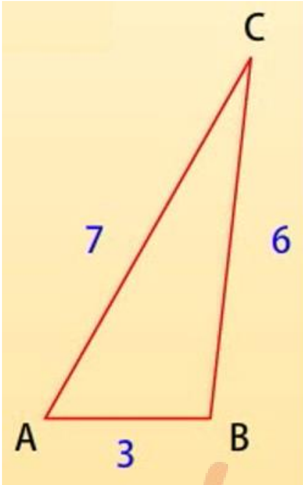
$$s = \frac{16}{2}$$

$$= 8$$

चरण 2: ज्ञात मानक मान को इस सूत्र $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ में रखिए।

चूंकि का मान अज्ञात है, इसलिए मान लीजिए कि भुजा BC की लम्बाई x है।

अतः हमे प्राप्त होता है,



$A = \sqrt{s(s-\overline{AB})(s-\overline{BC})(s-\overline{CA})}$

$8.94 = \sqrt{8(8-3)(8-x)(8-7)}$

अब दोनों पक्षों का वर्ग करके x के लिए हल करिए।

$8.94^2 = \left(\sqrt{8(8-3)(8-x)(8-7)}\right)^2$

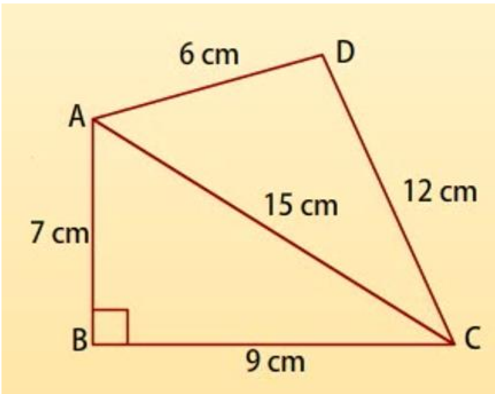
$79.9236 = 8(5)(8-x)(1)$

$79.9236 = 40(8-x)$

$\frac{79.9236}{40} = 8 - x1.999809 = 8 - x$

$x \approx 6.0$

चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में हीरोन के सूत्र का अनुप्रयोग:



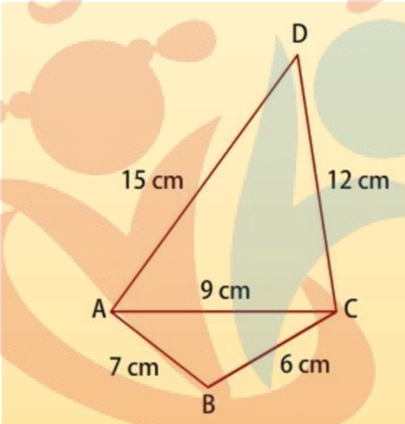
Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

यदि उनकी सभी भुजाओं की माप दी हुई हो तो हीरोन के सूत्र का प्रयोग चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करने में भी किया जाता है।

हम चतुर्भुज को दो त्रिभुजों मे विभाजित करते हैं और फिर इसका क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

यदि उन दोनों त्रिभुजों में से एक त्रिभुज समकोण त्रिभुज है तो पाइथागोरस के नियम के प्रयोग से उसका विकर्ण ज्ञात किया जा सकता है।

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें AB = 7 cm, BC = 6 cm, CD = 12 cm, DA = 15 cm और AC = 9 cm है।



ΔABC के लिए,

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s = \frac{6+7+9}{2}$$

$$= \frac{22}{2}$$

$$= 11$$

अब,

हीरोन के सूत्र से क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

सूत्र में मान रखने से हमें प्राप्त होता है

ΔABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{11 \times 5 \times 4 \times 2}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \sqrt{(440)}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्रफल = 20.98 cm

ΔABC के लिए,

$$s = \frac{9 + 12 + 15}{2}$$

$$s = \frac{36}{2}$$

$$s = 18$$

हीरोन के सूत्र के अनुसार

क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ΔACD का क्षेत्रफल $= \sqrt{18 \times 9 \times 6 \times 3}$

$\Rightarrow \Delta ACD$ का क्षेत्रफल $= \sqrt{(2916)}$

$\Rightarrow \Delta ACD$ का क्षेत्रफल = 54 cm^2

अतः चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

= ΔABC का क्षेत्रफल + ΔACD का क्षेत्रफल

= 20.98 + 54

$\therefore$ चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = 74.98 cm

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

क्या आप जानते हैं?

- हीरोन का जन्म संभवतः 10 AD मिस्र में अलेक्जेंड्रिया नामक स्थान पर हुआ था। उन्होंने अनुप्रायोगिक गणित पर कार्य किया।
- उनका ज्यामितीय कार्य मुख्यतः क्षेत्रमिति की समस्याओं से संबंधित था। यह कार्य तीन पुस्तकों में लिखा गया है।
- इसी पुस्तक में, हीरोन ने त्रिभुज की तीनों भुजाओं के पदों में उसके क्षेत्रफल का प्रसिद्ध सूत्र प्रतिपादित किया है।

सारांश:

आइये हमने जो कुछ सीखा है, उसे संक्षेप में दोहराएं।

- हीरोन के सूत्र द्वारा एक त्रिभुज के क्षेत्रफल जिसकी भुजाएं a, b और c हों, की गणना इस प्रकार की जाती है।

  त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

  जहां $s = \frac{a+b+c}{2}$

- हीरोन के सूत्र का प्रयोग किसी अनियमित चतुर्भुज के क्षेत्रफल की गणना में किया जा सकता है यदि उसकी सभी भुजाएं दी हुई हों। इसके लिए हम चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में परिवर्तित करते हैं और फिर हीरोन के सूत्र का प्रयोग करते हैं।

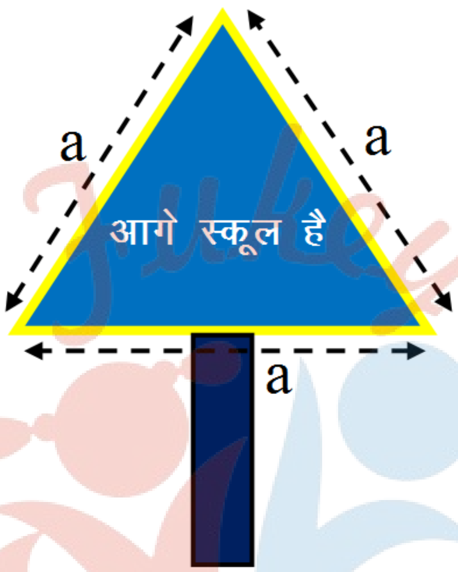
NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 12.1 (पृष्ठ संख्या 242-243)

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 1 एक यातायात संकेत बोर्ड पर 'आगे स्कूल है' लिखा है और यह भुजा 'a' वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार का है। हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके इस बोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि संकेत बोर्ड का परिमाप 180cm है, तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा?

उत्तर-



Future's Key
Fukey Education

$a = a, b = a, c = a$

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{a+a+a}{2}$

$\frac{3a}{2}$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}\right) - a\left(\frac{3a}{2} - a\right)\left(\frac{3a}{2} - a\right)}$

$= \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)}$

$= \sqrt{3.\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 cm^2$

संकेत बोर्ड का परिमाप = 180 सेमी.

$3 \times$ भुजा $=$ परिमाप

$$\text{भुजा} = \frac{\text{परिमाप}}{3}$$

$$\text{भुजा} = \frac{180}{3} = 60 \text{ सेमी}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

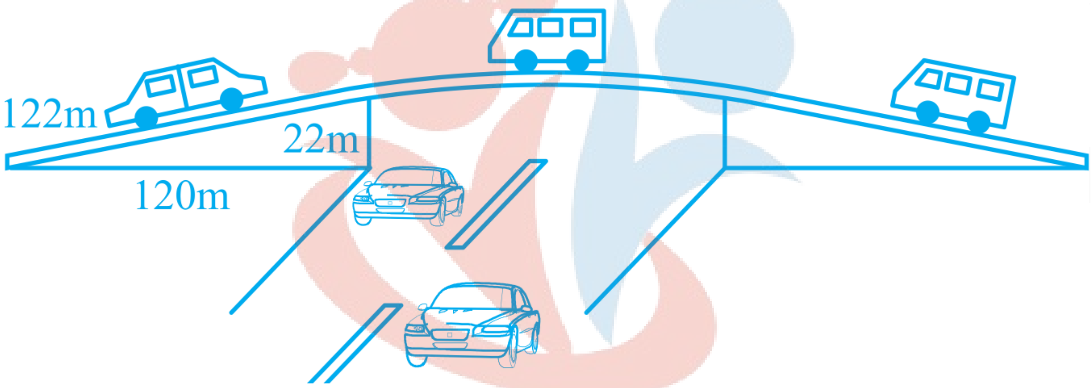
समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 cm^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} 60^2 cm^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} 60 \times 60 cm^2$

$= 900\sqrt{3} cm^2$

प्रश्न 2 किसी फ्लाईओवर (flyover) की त्रिभुजाकार दीवार को विज्ञापनों के लिए प्रयोग किया जाता है। दीवार की भुजाओं की लंबाइयाँ 122m, 22m और 120m हैं (देखिए आकृति 12.9)इस विज्ञापन से प्रति वर्ष 5000 रु प्रति m^2 की प्राप्ति होती है। एक कम्पनी ने एक दीवार को विज्ञापन देने के लिए 3 महीने के लिए किराए पर लिया। उसने कुल कितना किराया दिया?



उत्तर-

Fukey Education

a = 122m, b = 22m और c = 120m

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{122+22+120}{2}$

$\frac{164}{2} = 132m$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{132(132-122)(132-22)(132-120)}$

$= \sqrt{132(10)(110)(12)}$

$= \sqrt{132 \times 10 \times 110 \times 12}$

$= \sqrt{12 \times 11 \times 10 \times 11 \times 10 \times 2}$

$= \sqrt{12 \times 12 \times 1 \times 10 \times 11 \times 11}$

$= 12 \times 10 \times 11$

$= 1320m^2$

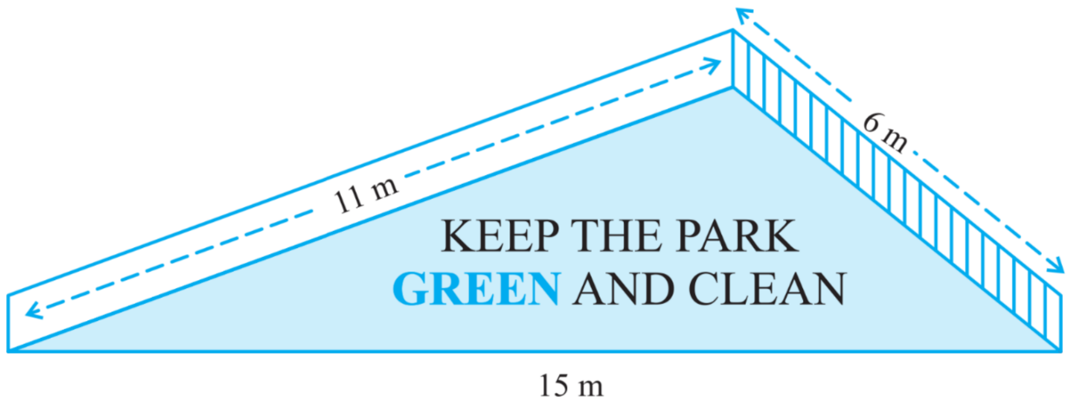
3 महीने का विज्ञापन किराया $= 1320 \times 5000 \times \frac{3}{12}$

$= 1320 \times 5000 \times \frac{1}{4}$

$= 1650000$ रुपये

प्रश्न 3 किसी पार्क में एक फिसल पट्टी (slide) बनी हुई है। इसकी पार्श्वीय दीवारों (side walls) में से एक दीवार पर किसी रंग से पेंट किया गया है और उस पर "पार्क को हरा-भरा और साफ रखिए" लिखा हुआ है। यदि इस दीवार की विमाएँ 15m, 11m और 6m हैं, तो रंग से पेंट हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



उत्तर-

$a = 15m, b = 11m$ और $c = 6m$

$s = \frac{a+b+c}{2}$

$= S = \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{32}{2} = 16m$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16(16-15)(16-11)(16-6)}$

$= \sqrt{16(1)(5)(10)}$

$= \sqrt{4 \times 4 \times 1 \times 5 \times 5 \times 2}$

$= 20\sqrt{2}m^2$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 20\sqrt{2}m^2$

प्रश्न 4 उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 18cm और 10cm हैं तथा उसका परिमाप 42cm है।

उत्तर- a = 18cm, b = 10cm और c = ?

परिमाप = 42cm

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

a + b + c = 42

18 + 10 + c = 42

या c = 42 – 28

c = 14cm

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{42}{2} = 21cm$$

$$\text{हीरोन सूत्र से तरबूज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{21(21-18)(21-10)(21-14)}$$

$$= \sqrt{21 \times 3 \times 11 \times 7}$$

$$= \sqrt{21 \times 21 \times 11}$$

$$= 21\sqrt{11}cm^2$$

$$\text{अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल} = 21\sqrt{11}cm^2$$

प्रश्न 5 एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 12 : 17 : 25 है और उसका परिमाप 540cm है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना भुजाएँ a = 12x, b = 17x और c = 25x है।

अत: a + b + c = 540cm

12x + 17x + 25x = 540

54x = 540

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$x = \frac{540}{54} = 10$

अतः भुजाएँ $a = 12 \times 10 = 120cm$

$b = 17 \times 10 = 170cm$

$c = 25 \times 10 = 250cm$

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{540}{2} = 270cm$

हीरोन त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{270(270-120)(270-170)(270-250)}$

$= \sqrt{270(150)(100)(20)}$

$= \sqrt{270 \times 150 \times 100 \times 20}$

$= \sqrt{3 \times 3 \times 30 \times 30 \times 5 \times 10 \times 10 \times 4 \times 5}$

$= \sqrt{3 \times 3 \times 30 \times 30 \times 5 \times 5 \times 10 \times 10 \times 2 \times 2}$

$= 3 \times 30 \times 5 \times 0 \times 2$

$= 9000cm^2$

प्रश्न 6 एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 30cm है और उसकी बराबर भुजाएँ 12cm लम्बाई की हैं। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दिया है : a = 12cm, b = 12cm और c = ?

अत: a + b + c = 30cm

12 + 12 + c = 30cm

या c = 30 – 24cm

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

c = 6cm

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{30}{2} = 15cm$

हीरों सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{15(15-12)(15-12)(15-6)}$

$= \sqrt{15(3)(3)(9)}$

$= \sqrt{5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$

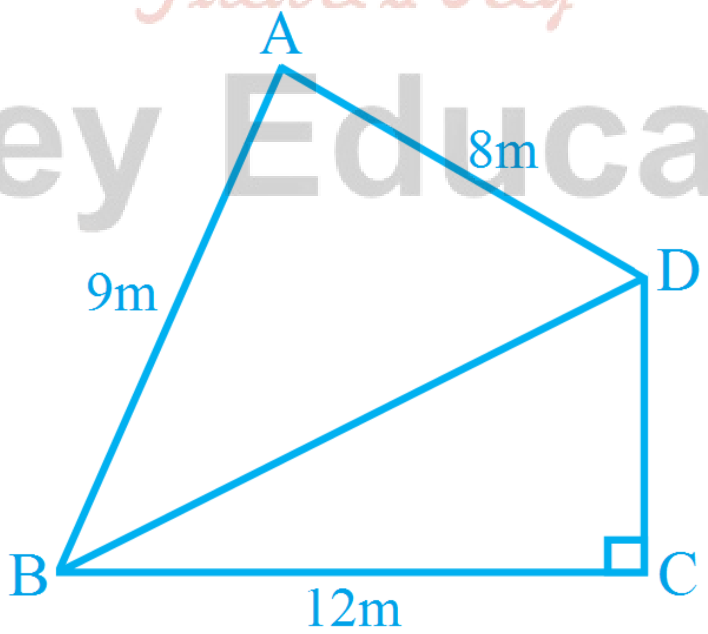
$= 9\sqrt{15} cm^2$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 9\sqrt{15} cm^2$

प्रश्नावली 12.2 (पृष्ठ संख्या 247-248)

प्रश्न 1 एक पार्क चतुर्भुज ABCD के आकार का है, जिसमें ∠c = 90°, AB = 9m, BC = 12m, CD = 5m और AD = 8m है। इस पार्क का कितना क्षेत्रफल है?

उत्तर-



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

समकोण $\triangle BCD$ में,

पाइथागोरस प्रमेय से,

$= BD^2 = CD^2 + BC^2$

$= BD^2 = 5^2 + 12^2$

$= BD^2 = 25 + 144$

$= BD^2 = 169$

या $BD = \sqrt{169} = 13m$

$\triangle BCD$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ लम्ब

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5$

$= 6 \times 5$

$= 30m^2$

$\triangle ABD$ में,

$AB = 9m, BD = 13m$ और $AD = 8m$

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{9+13+8}{2}$

$= \frac{30}{2} = 15m$

Fukey Education

हीरों सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{15(15-9)(15-13)(15-8)}$

$= \sqrt{15(6)(2)(7)}$

$= \sqrt{5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 7}$

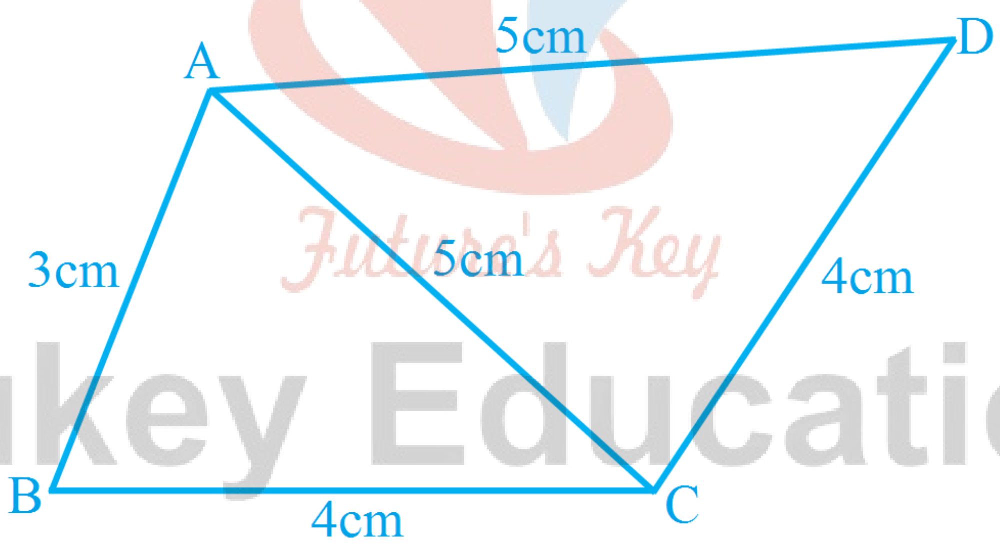
$= 6\sqrt{35} = 6 \times 5.91 m^2$

$= 35.04 m^2$

अतः पार्क के आकर के चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= 30 m^2 + 35.04 m^2 = 65.04 m^2$

प्रश्न 2 एक चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसमें AB = 3cm, BC = 4cm, CD = 4cm, DA = 5cm और AC = 5cm है।

उत्तर-



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\triangle ABC$ में,

$a = 3cm, b = 4cm$ और $c = 5cm$

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{3+4+5}{2}$

$= \frac{12}{2} = 6cm$

हीरों सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$

$= \sqrt{6(3)(2)(1)}$

$= 6cm^2$

अब $\triangle ACD$ मे,

$a = 5cm, b = 4cm$ और $c = 5cm$

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{5+4+5}{2}$

$= \frac{14}{2} = 7cm$

हीरों सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{7(7-5)(7-4)(7-5)}$

$= \sqrt{7(2)(3)(2)}$

$= 2\sqrt{21}cm^2$

$= 2 \times 4.583cm^2$

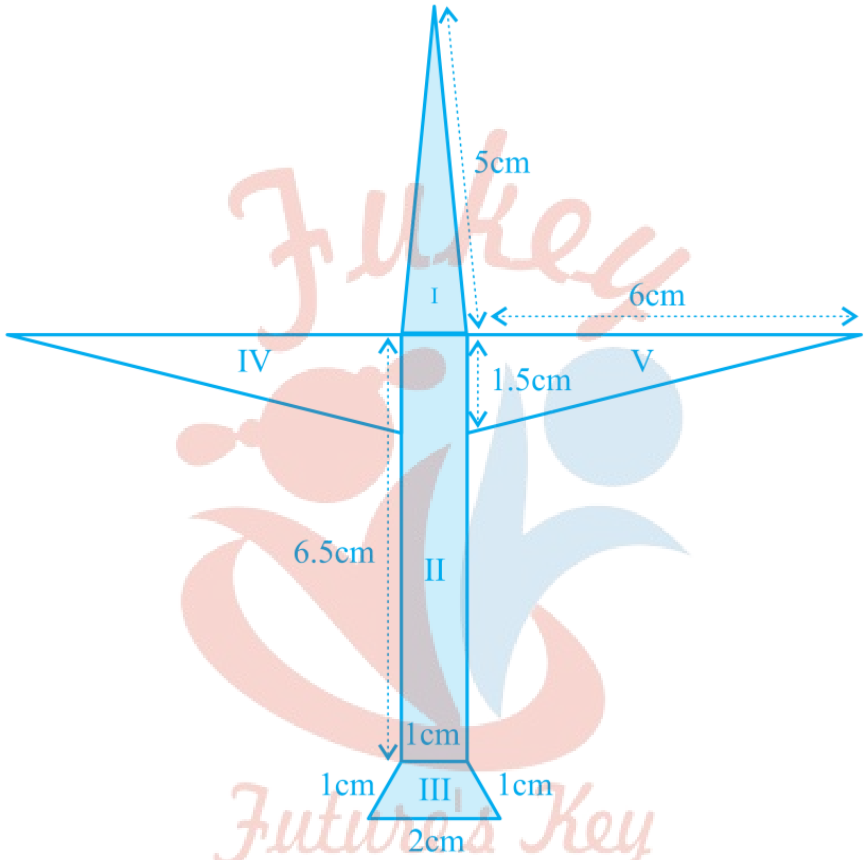
$= 9.166cm^2$

Fukey Education

अत: चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \triangle ABC$ का क्षेत्रफल + $\triangle ACD$ का क्षेत्रफल

$= 7cm^2 + 9.166cm^2 = 15.2cm^2$ सिध्दम्

प्रश्न 3 राधा ने एक रंगीन कागज से एक हवाई जहाज का चित्र बनाया, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। प्रयोग किए गए कागज का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तर-

भाग- I एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

अतः $a = 5cm, b = 5cm$ और $c = 1cm$

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{5+5+1}{2}$

$= \frac{11}{2} = 5.5cm$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

हीरों सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{5.5(5.5-5)(5.5-5)(5.5-1)}$

$= \sqrt{5.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 4.5}$

$= \sqrt{6.1875} = 2.49cm^2$

भाग- II का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$= 6.5 \times 1$

$= 6.5cm^2$

भाग- III में,

समलम्ब की ऊंचाई $= \sqrt{1^2 + 0.5^2}$

$= \sqrt{1 + 0.25}$

$= \sqrt{1.25} = 1.12cm$

अतः $h = 1.12cm,\ a = 1cm,\ b = 2cm$

समलम्ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times (a+b) \times h$

$= \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1.12$

$= 0.56 \times 3$

$= 1.68cm^2$

Fukey Education

भाग- IV का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 1.5$

$= 3 \times 1.5$

$= 4.5cm^2$

भाग- V का क्षेत्रफल $= 4.5cm^2$

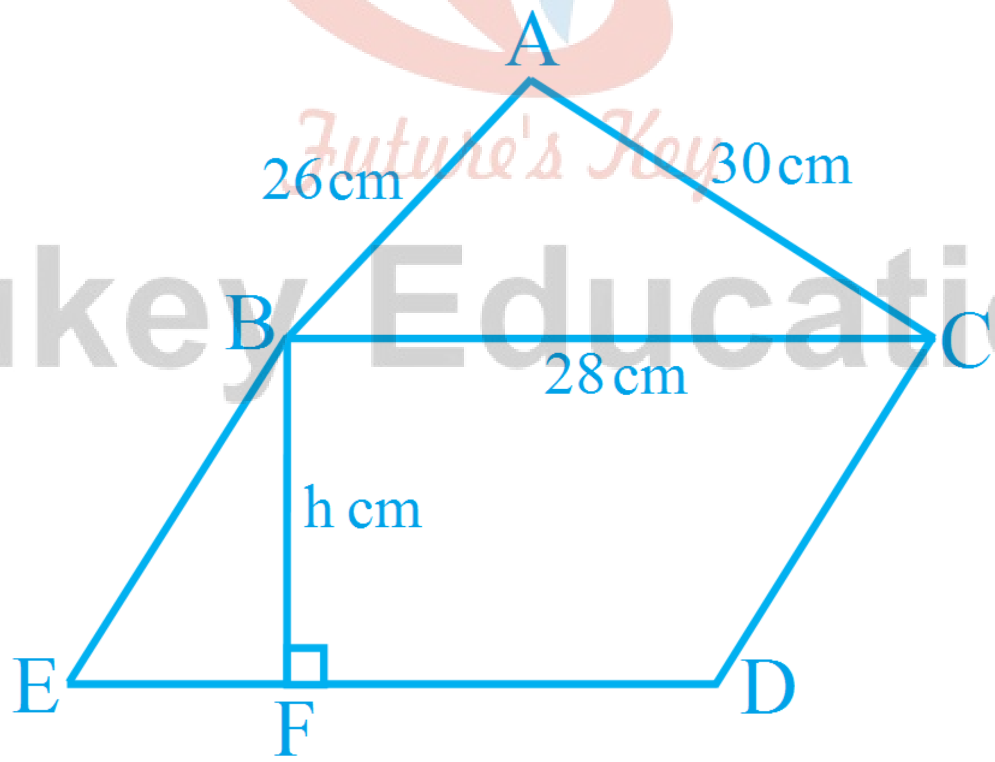
हवाई जहाज का क्षेत्रफल = $2.49cm^2 + 6.5cm^2 + 1.68cm^2 + 4.5cm^2 + 4.5cm^2$

= $19.67cm^2$

अत: हवाई जहाज का क्षेत्रफल $19.67cm^2$ है।

प्रश्न 4 एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज का एक ही आधर है और क्षेत्रफल भी एक ही है। यदि त्रिभुज की भुजाएँ 26cm, 28cm और 30cm हैं तथा समांतर चतुर्भुज 28cm के आधर पर स्थित है, तो उसकी संगत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\triangle ABC$ में,

$a = 26cm,\ b = 28cm$ और $c = 30cm$

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{26+28+30}{2}$

$= \frac{84}{2} = 42cm$

हीरों सूत्र से त्रिबुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}$

$= \sqrt{42 \times 16 \times 14 \times 12}$

$= \sqrt{14 \times 3 \times 4 \times 4 \times 14 \times 4 \times 3}$

$= \sqrt{14 \times 14 \times 4 \times 4 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}$

$= 14 \times 4 \times 2 \times 3$

$= 336cm^2$

या $h = \frac{336}{28}cm$

$h = 12cm$

अतः समलम्ब की ऊंचाई =12cm है।

अब चूँकि समांतर चतुर्भुज BCDE का क्षेत्रफल $\triangle ABC$ के बराबर है।

अत: समांतर चतुर्भुज BCDE का क्षेत्रफल = $336cm^2$

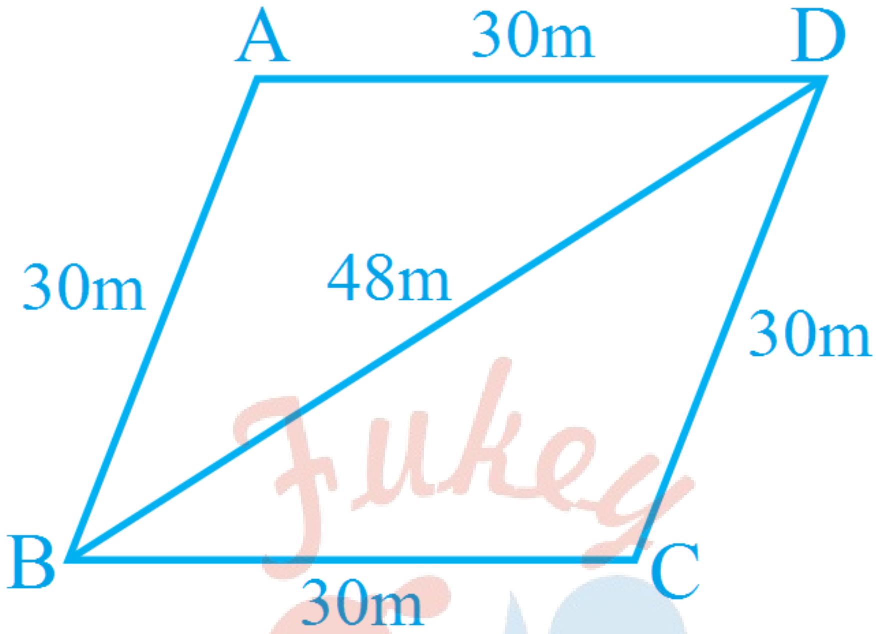
या $b \times h = 336cm^2$

$28 \times h = 336cm^2$

प्रश्न 5 एक समचतुर्भुजाकार घास के खेत में 18 गायों के चरने के लिए घास है। यदि इस समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा 30m है और बड़ा विकर्ण 48m है, तो प्रत्येक गाय को चरने के लिए इस घास के खेत का कितना क्षेत्रफल प्राप्त होगा?

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर-



$\triangle ABD$ में,

$a = 30m,\ b = 30m,\ c = 48m$

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{30+30+48}{2}$

$\frac{108}{2} = 54m$

हीरों सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{54(54-30)(54-30)(54-48)}$

$= \sqrt{54(24)(24)(6)}$

$= \sqrt{9 \times 6 \times 24 \times 24 \times 6}$

$= 3 \times 24m^2$

$= 432m^2$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

अतः खेत ABCD का क्षेत्रफल = 2 × क्षेत्रफल (ABD)

$= 2 \times 432m^2$

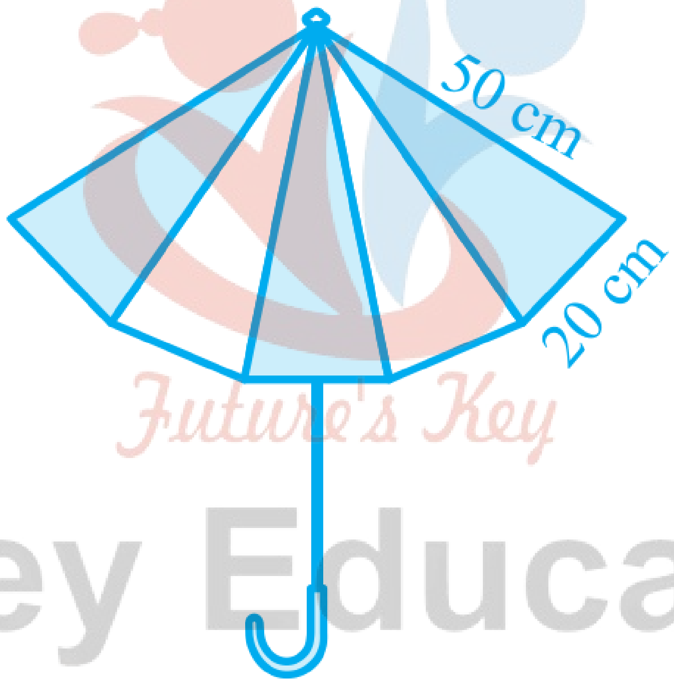
$= 864m^2$

तो प्रत्येक गाय को चरने के लिए क्षेत्रफल $= \frac{864}{18} m^2$

$= 48m^2$

अतः प्रत्येक गाय को चरने के लिए क्षेत्रफल $48m^2$ है।

प्रश्न 6 दो विभिन्न रंगों के कपड़ों के 10 त्रिभुजाकार टुकड़ों को सीकर एक छाता बनाया गया है (देखिए आकृति)। प्रत्येक टुकड़े के माप 20cm, 50cm और 50cm हैं। छाते में प्रत्येक रंग का कितना कपड़ा लगा है?



उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$a = 20cm, \ b = 50cm$ और $c = 50cm$

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{20+50+50}{2}$

$= \frac{120}{2} = 60cm$

हीरों सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{60(60-20)(60-50)(60-50)}$

$= \sqrt{60(40)(10)(10)}$

$= \sqrt{10 \times 6 \times 10 \times 4 \times 10 \times 10}$

$= 200\sqrt{6}cm^2$

चूँकि प्रत्येक त्रिभुजाकार टुकड़ा का क्षेत्रफल $= 200\sqrt{6}cm^2$

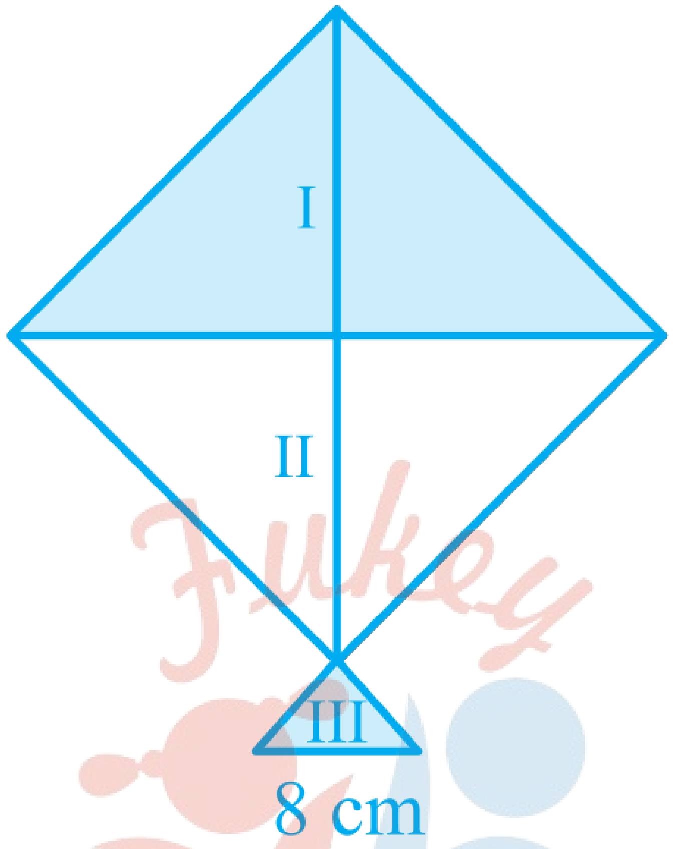
कुल 10 टुकडो में से प्रत्येक रंग का 5 टुकड़ा है।

इसलिए प्रत्येक रंग के लिए कपडा का क्षेत्रफल $= 5 \times 200\sqrt{6}cm^2$

$= 1000\sqrt{6}cm^2$

प्रश्न 7 एक पतंग तीन भिन्न-भिन्न शेडों (shades) के कागजों से बनी है। इन्हें आकृति में I, II और III से दर्शाया गया है। पतंग का ऊपरी भाग 32cm विकर्ण का एक वर्ग है और निचला भाग 6cm, 6cm और 8cm भुजाओं का एक समद्विबाहु त्रिभुज है। ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक शेड का कितना कागज प्रयुक्त किया गया है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



उत्तर-

पतंग के भाग- I का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \mathrm{b} \times \mathrm{h}$

$= \frac{1}{2} \times 32 \times 16$

$= 16 \times 16$

$= 256\mathrm{cm}^2$

अतः भाग- II का क्षेत्रफल $= 256\mathrm{cm}^2$

भाग- III में,

$a = 6cm,\ b = 6cm$ और $c = 8cm$

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{6+6+8}{2}$

$= \frac{20}{2} = 10cm$

हीरों सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{10(10-6)(10-6)(10-8)}$

$= \sqrt{10(4)(4)(2)}$

$= 8\sqrt{5}cm^2$

$= 8 \times 2.24$

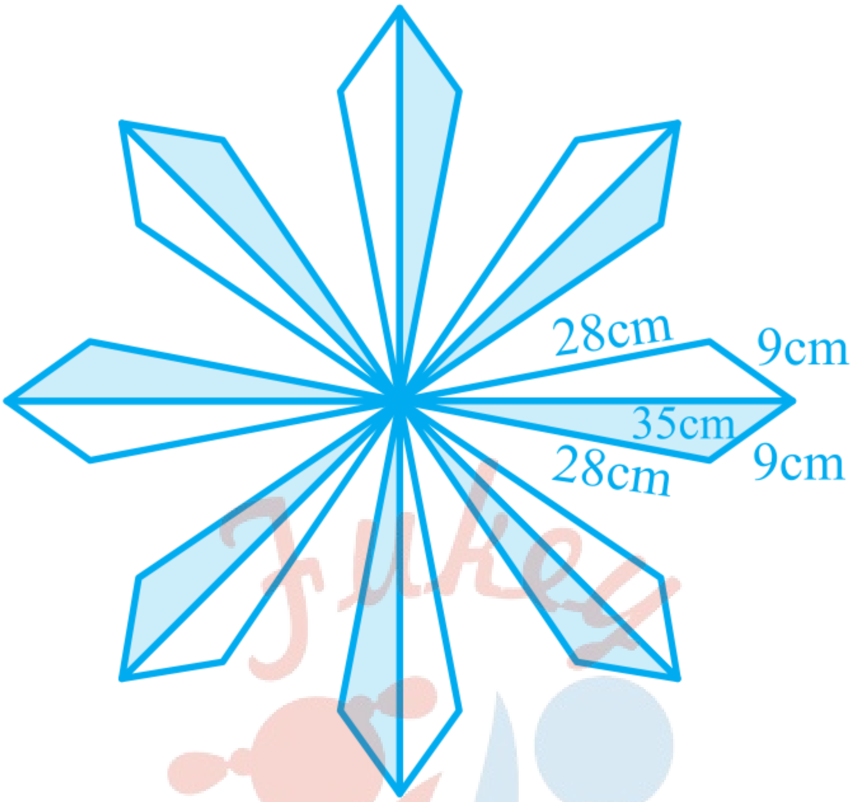
भाग I का क्षेत्रफल $= 256cm^2$

भाग II का क्षेत्रफल $= 256cm^2$

भाग III का क्षेत्रफल $= 17.92cm^2$

प्रश्न 8 फर्श पर एक फूलों का डिज़ाइन 16 त्रिभुजाकार टाइलों से बनाया गया है, जिनमें से प्रत्येक की भुजाएँ 9cm, 28cm और 35cm हैं (देखिए आकृति) इन टाइलों को 50 पैसे प्रति cm^2 की दर से पालिश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

Fukey Education



उत्तर-

टाइल में,

$a = 9\text{cm},\ b = 28\text{cm}$ और $c = 35\text{cm}$

$S = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{9+28+35}{2}$

$= \frac{72}{2} = 36\text{cm}$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{36(36-9)(36-28)(36-35)}$

$= \sqrt{36(27)(8)(1)}$

$= 36\sqrt{6}$

$= 36 \times 2.45 = 88.2\text{cm}^2$

अत: इन सभी 16 टाइल्स का क्षेत्रफल = 88.2 × 16

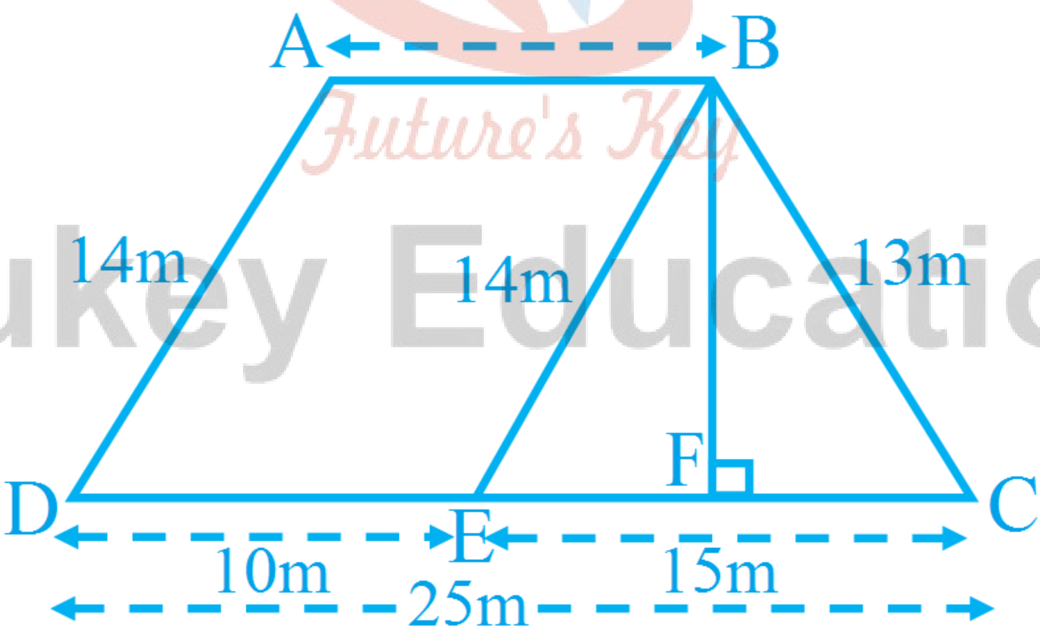
$= 1411.2\text{cm}^2$

टाइलों पर पॉलिश कराने का खर्च = 1411.2 × 0.50

= 705.60 रुपये

प्रश्न 9 एक खेत समलंब के आकार का है जिसकी समांतर भुजाएँ 25m और 10m हैं। इसकी असमांतर भुजाएँ 14m और 13m हैं। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



AB के बराबर भुजा BC पर DE काटा

अत: DE = 10m

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

इसलिए, EC = DC − DE

= 25 − 10 = 15m

अब चूँकि AB = DE है और AB || DE इसलिए ABED एक समांतर चतुर्भुज है |

अतः AD = BE = 14m

DBCE में,

a = 14m, b = 15m और c = 13m

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{14+15+13}{2}$$

$$= \frac{42}{2} = 21\text{m}$$

हीरोन सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{a(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{21(21-14)(21-15)(21-13)}$$

$$= \sqrt{21 \times 7 \times 6 \times 8}$$

$$= \sqrt{7 \times 3 \times 7 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$$

$$= 7 \times 3 \times 2 \times 2$$

$$= 84\text{m}^2$$

क्षेत्रफल $(\triangle BCE) = 84\text{m}^2$

या $\frac{1}{2} \times b \times h = 84\text{m}^2$

$$= \frac{1}{2} \times 15 \times h = 84\text{m}^2$$

या $h = 84 \times \frac{2}{15}$

$$h = \frac{168}{15} = 11.2\text{m}$$

समान्तर भुजाओ का योग $(a + b) = (10 + 25) = 35m$

ऊंचाई $h = 11.2m$

अब समलम्ब ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

$= \frac{1}{2} \times 35 \times 11.2$

$= 35 \times 5.6 = 196m^2$

Future's Key
Fukey Education