गणित

अध्याय-10: शंकु परिच्छेद

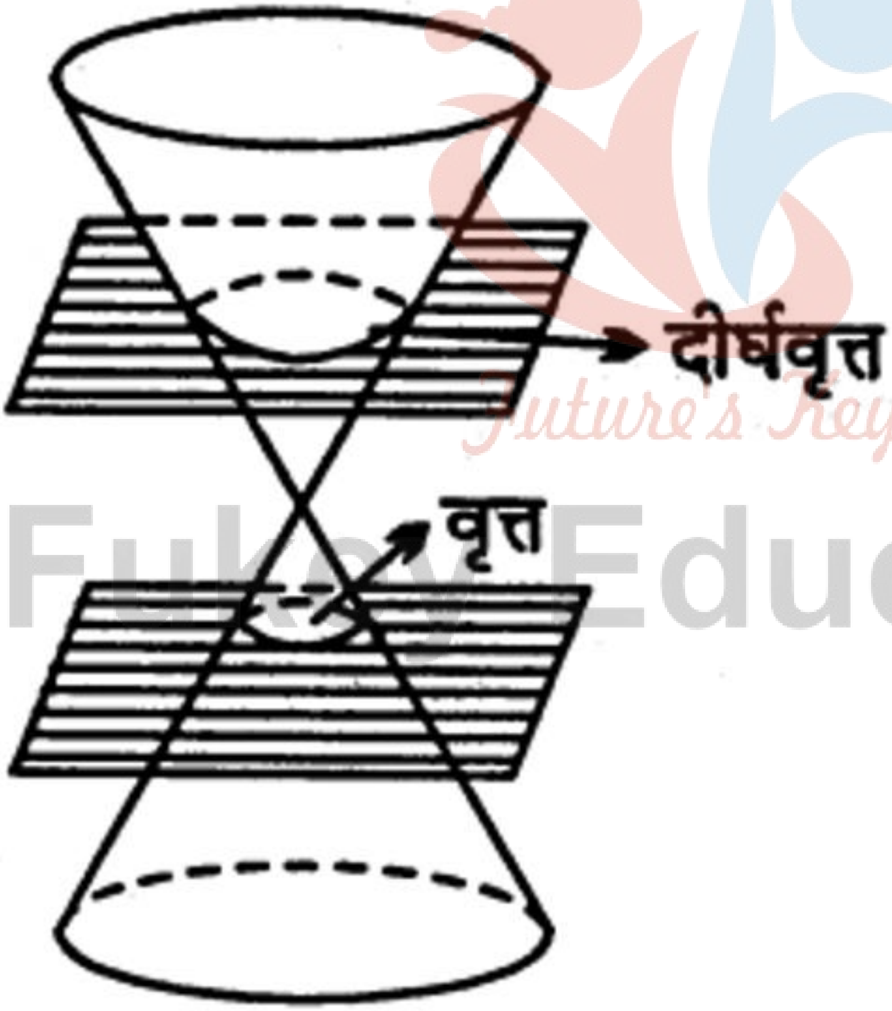
Fukey Education

शंकु परिच्छेद (Sections of a Cone)

ईसा से लगभग 300 वर्ष पूर्व गणितज्ञ तथा ज्यामिति के पिता यूक्लिड (Euclid) ने एक लम्बवृत्तीय शंकु (Right circular cone) के पृष्ठ को भिन्न-भिन्न विधियों से एक समतल द्वारा काटकर अनेक वक्र प्राप्त किए, जो शांकव (Conics) अथवा शंकु परिच्छेद या शंकु काट (Conic sections) कहलाये।

मानलो हमें एक दोहरा लम्बवृत्तीय शंकु (Double right circular cone) दिया हुआ है। तब इस शंकु पर स्थित किसी बिन्दु से होकर जाने वाले विभिन्न समतलों द्वारा जनित शंकु परिच्छेदों पर विचार करने से स्पष्ट हो जायेगा कि :

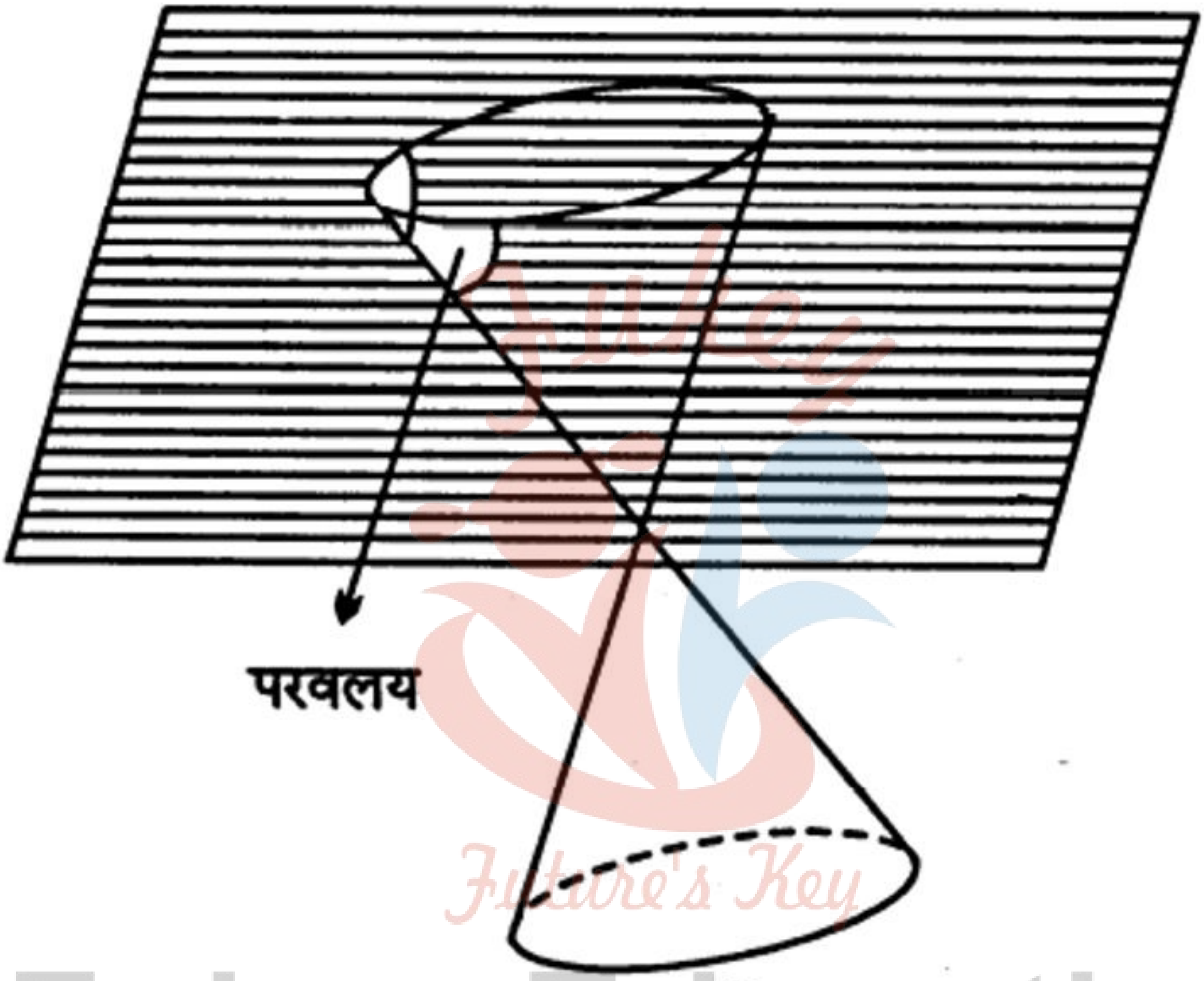
1. यदि छेदक समतल शंकु की अक्ष के लम्बवत् हो, तो प्राप्त परिच्छेद वृत्त होगा। यदि ए छेदक समतल तथा शंकु के अक्ष के बीच का कोण हो, तो इस स्थिति में $\theta = \frac{\pi}{2}$ होगा।



(i)

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

2. यदि छेदक समतल शंकु के एक भाग को पूरा-पूरा अक्ष से झुकी हुई दिशा में काटे, तो प्राप्त परिच्छेद दीर्घवृत्त (Ellipse) होगा [देखिए चित्र (i)]। इस स्थिति में a < $\theta < = \frac{\pi}{2}$, जहाँ a शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण है।

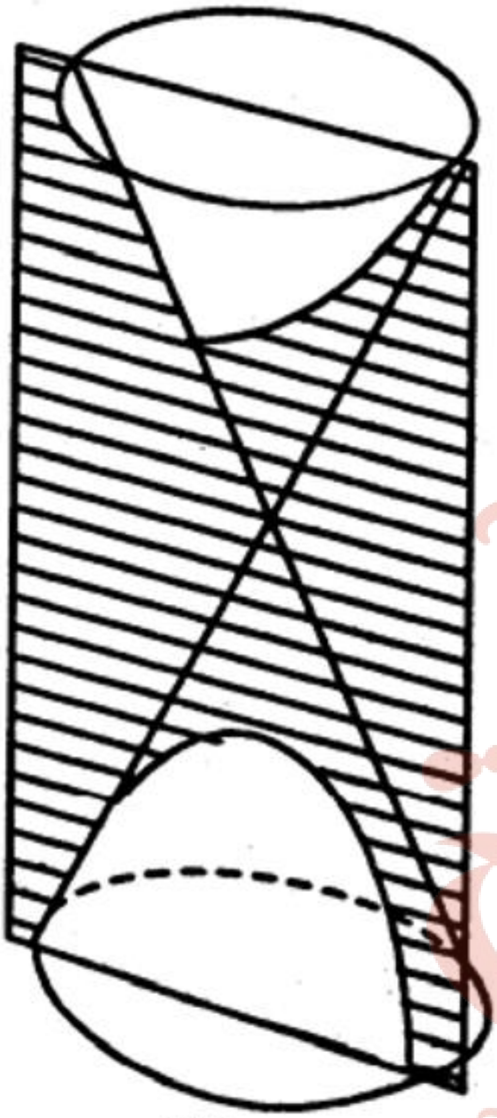


(ii)

Fukey Education

3. यदि छेदक समतल शंकु की किसी जनक रेखा (Generating line) को समान्तर काटे, तो प्राप्त परिच्छेद परवलय (Parabola) होगा [देखिए चित्र (ii)]। इस स्थिति में θ = a होगा।

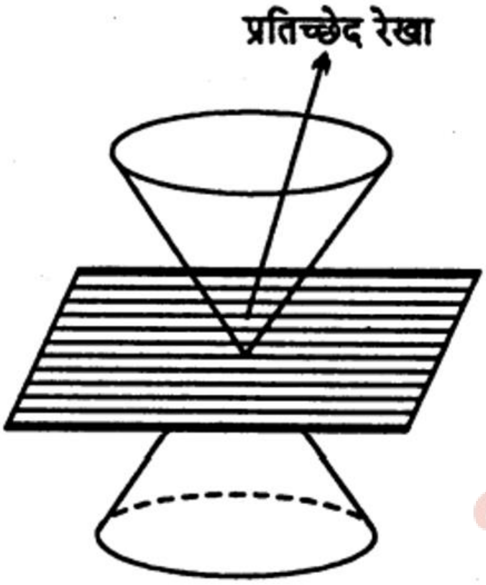
Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



(iii)

4. यदि छेदक समतल शंकु के दोनों भागों को काटे, तो परिच्छेद दो शाखाओं वाला वक्र अतिपरवलय (Hyperbola) होगा [देखिए चित्र (iii)] । इस स्थिति में $\theta < \alpha$ होगा।

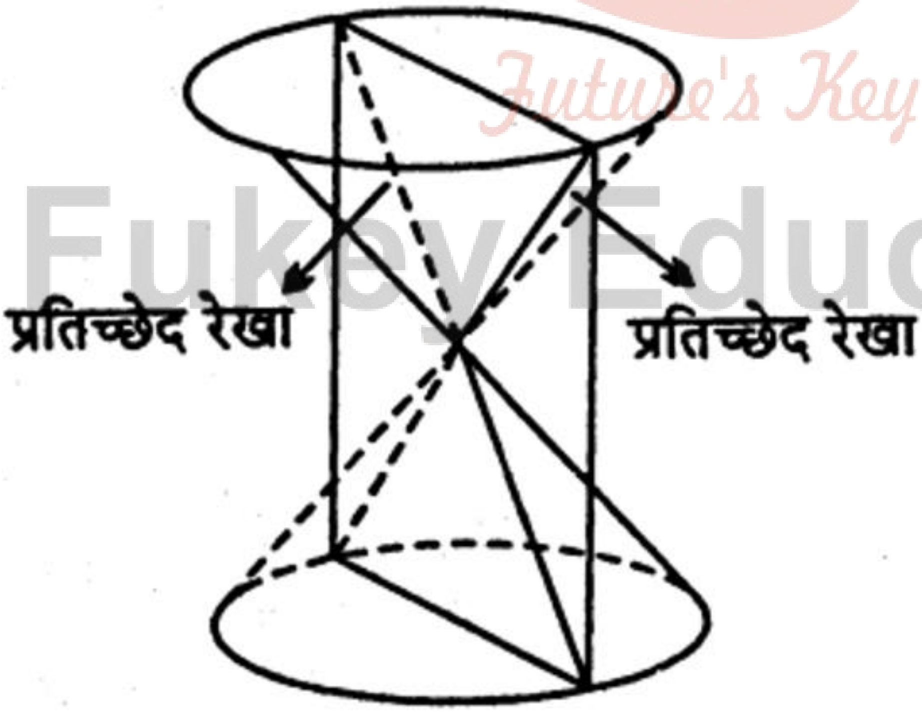
Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



(iv)

(v)

विशेष : यदि छेदक समतल शंकु के शीर्ष में होकर जाये तो स्थिति (1) व स्थिति (2) में क्रमशः प्राप्त वक्र वृत्त एवं दीर्घवृत्त एक बिन्दु का रूप धारण कर लेंगे [देखिए चित्र (iv)] । स्थिति (3) में प्राप्त वक्र परवलय दो संपाती रेखाओं (Coincident lines) का रूप धारण कर लेगा [देखिए चित्र (v)]। स्थिति (4) में प्राप्त वक्र अतिपरवलय दो प्रतिच्छेदी रेखाओं का रूप धारण कर लेगा [देखिए चित्र (vi)]।



(vi)

शांकव की परिभाषा (Definition of Conics)

यदि कोई बिन्दु किसी समतल में इस प्रकार गति करता है कि उसकी उस समतल में स्थित किसी नियत बिन्दु (Fixed point) से दूरी तथा उसकी उस समतल में स्थित किसी नियत सरल रेखा (Fixed straight line) से लम्बवत् दूरी का अनुपात सदैव अचर रहता है, तो उस बिन्दु का बिन्दुपथ एक शांकव कहलाता है।

1. नियत बिन्दु को नाभि (Focus) कहते हैं। इसे प्रायः अक्षर Sसे सूचित किया जाता है।

2. नियत सरल रेखा को नियता (Directrix) कहते हैं।

3. अचर अनुपात को उत्केन्द्रता (Eccentricity) कहते हैं। इसे अक्षर e से सूचित किया जाता है।

4. उस सरल रेखा को जो नाभि से होकर गुजरती है तथा नियता पर लम्ब होती है, शांकव की अक्ष (Axis) कहते हैं।

5. वह बिन्दु जहाँ पर शांकव की अक्ष, शांकव से मिलती है, शांकव का शीर्ष (Vertex) कहलाता है।

टिप्पणी : शांकव परवलय (Parabola) कहलाता है, यदि $e = 1$. शांकव दीर्घवृत्त (Ellipse) कहलाता है, यदि $e < 1$. शांकव अतिपरवलय (Hyperbola) कहलाता है, यदि $e > 1$.

वृत्त (Circle)

परिभाषा-यदि कोई बिन्दु किसी समतल में इस प्रकार गति करता है कि उसकी समतल में स्थित किसी नियत बिन्दु से दूरी सदैव अचर रहती है, तो उस बिन्दु का बिन्दुपथ वृत्त कहलाता है।

नियत बिन्दु को वृत्त का केन्द्र तथा नियत दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते हैं।

टिप्पणी : किसी वृत्त का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात होने पर वृत्त को

पूर्णतः ज्ञात किया जा सकता है।

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करना जिसका केन्द्र मूलबिन्दु पर है तथा जिसकी त्रिज्या है (Equation of Circle Whose Centre is the Origin of the Coordinate Axes and Radius is a)

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

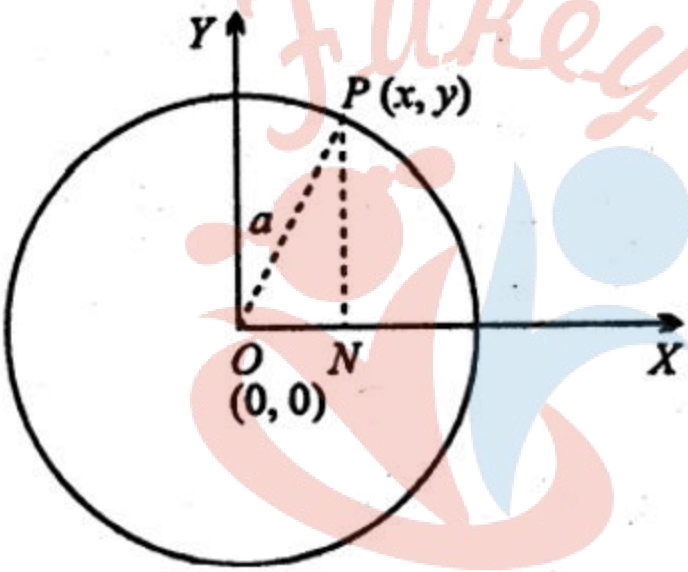
माना P (x,y) उस वृत्त की परिधि पर कोई बिन्दु है जिसका केन्द्र O (0,0) तथा जिसकी त्रिज्या a है।

OP को मिलाया। तब,

$$OP = a$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = a$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = a$$



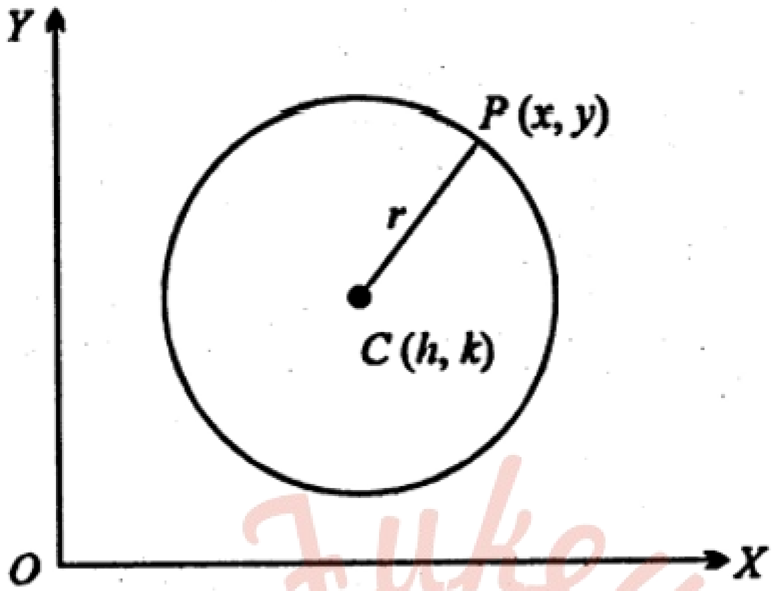
∴ वर्ग करने पर,

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2}$$

चूँकि यह सम्बन्ध वृत्त की परिधि पर स्थित किसी भी बिन्दु P के निर्देशांकों के बीच का बीजीय सम्बन्ध है, अतः यही वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करना जिसका केन्द्र (h,K) तथा त्रिज्या है (Equation of Circle Whose Centre is (h, k) and Radius is r)

माना P (x,y) उस वृत्त की परिधि पर कोई बिन्दु है, जिसका केन्द्र C (h, K) तथा जिसकी त्रिज्या r है।



CP को मिलाया। तब,

$$CP = r$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$\therefore$ वर्ग करने पर,

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

चूँकि यह सम्बन्ध वृत्त की परिधि पर स्थित किसी भी बिन्दु P के निर्देशांकों के बीच का बीजीय सम्बन्ध है, अतः यही वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण (EXAMPLES)

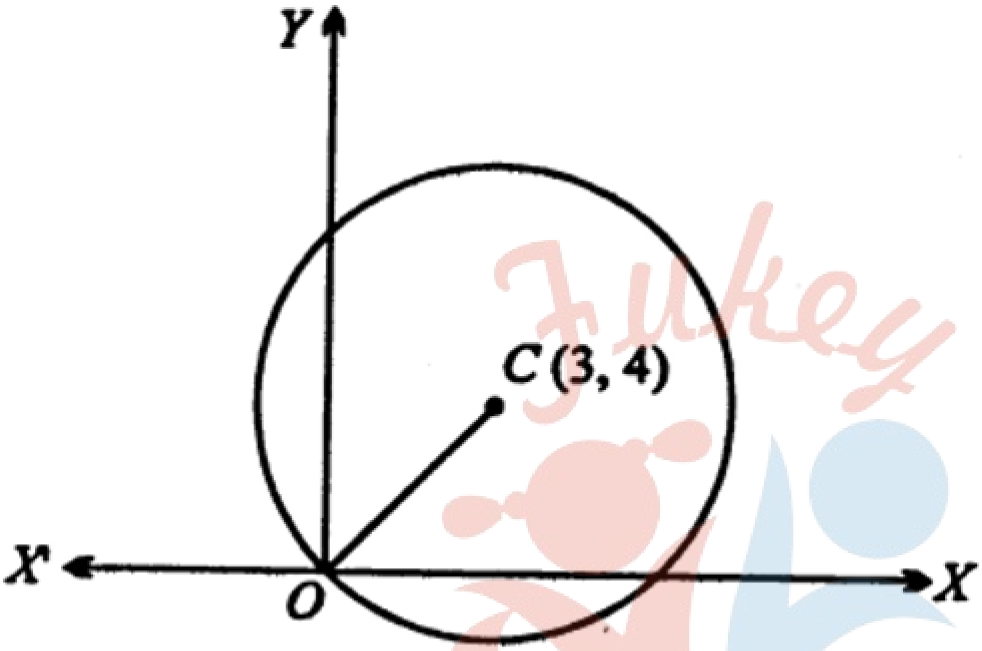
उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिये जो मूलबिन्दु से होकर गुजरता है तथा जिसका केन्द्र (3, 4) है। .

हल : वृत्त की त्रिज्या = OC

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$

$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



∴ वृत्त का समीकरण है—

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y = 25$$

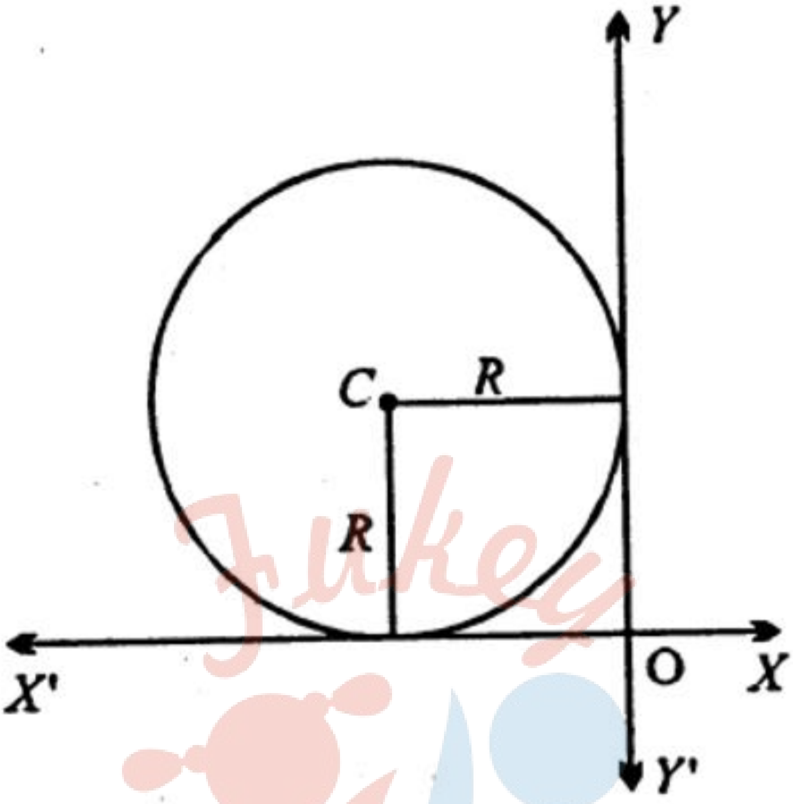
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0.$$

उदाहरण

R त्रिया का वृत्त द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है। यदि वृत्त दोनों अक्षों को स्पर्श करता है तो वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिये।

हल : वृत्त की स्थिति द्वितीय चतुर्थांश में है तथा त्रिज्या R है। अतः उसका केन्द्र (-R, R) होगा।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



अतः अभीष्ट समीकरण है—

$$(x+R)^2+(y-R)^2=R^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2xR+R^2+y^2-2yR+R^2=R^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+2xR-2yR+R^2=0.$$

Fukey Education

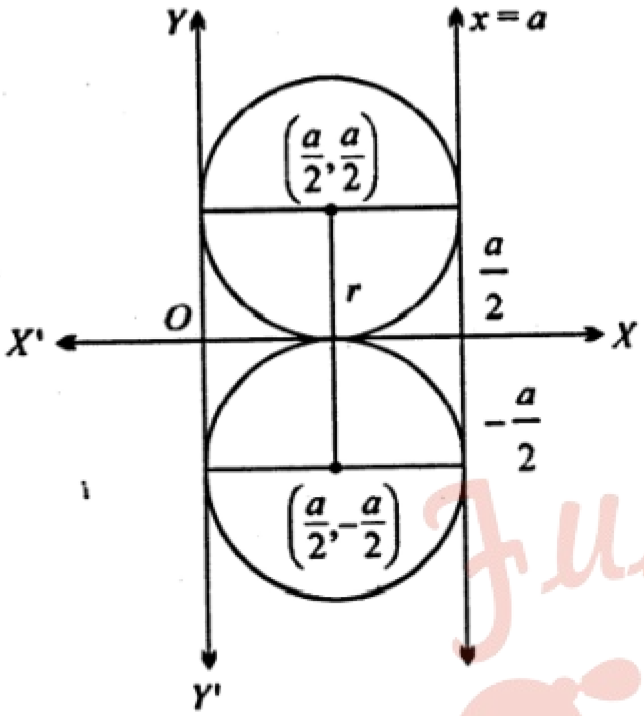
उदाहरण

उन वृत्तों के समीकरण ज्ञात कीजिये जो x- अक्ष, Y-अक्ष और सरल रेखा x = a को स्पर्श करते हैं।

हल : चूँकि वृत्त दोनों अक्षों और रेखा x = a को स्पर्श करता

∴ वृत्त का व्यास = a तथा त्रिज्या = $\frac{a}{2}$.

ऐसे दो वृत्त होंगे जो दोनों अक्षों और रेखा x = a को स्पर्श करेंगे।



इन वृत्तों के केन्द्र $\left(\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}\right)$ तथा त्रिज्या $= \frac{a}{2}$ है।

अत: वृत्तों के समीकरण हैं—

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y\pm\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-ax\pm ay+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2$$

.वृत्त का प्राचलिक समीकरण (Parametric Equation of a Circle)

पिछले अनुच्छेदों में हमने वृत्त के समीकरण को दो चर राशि, जो चर बिन्दु P के x- निर्देशांक तथा y- निर्देशांक हैं, के फलन के रूप में निरूपित किया है।

यदि हम वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु को ध्रुवीय निर्देशांक (Polar coordinates) में दर्शायें तो बिन्दु की स्थिति (r, θ) होगी, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या तथा θ स्थिर रेखा OX से किरण OP के बीच धनात्मक या ऋणात्मक कोण को व्यक्त करती है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

चूँकि वृत्त के लिए स्थिर है, अतएव केवल "एक चर राशि θ के पदों में वृत्त का समीकरण, वृत्त का प्राचलिक समीकरण कहलाता है।

वृत्त $x^2+ y^2 = r^2$ का प्राचलिक रूप प्राप्त करना (Find the Parametric Equation of Circle $x^2 + y^2 = r^2$)

मान लीजिए कि मूलबिन्दु को केन्द्र मानकर खींचे गये वृत्त पर कोई बिन्दु P (x,y) है और OP = r तथा ∠POX = θθθ. बिन्दु P से OX पर PN लम्ब खींचा। तब,

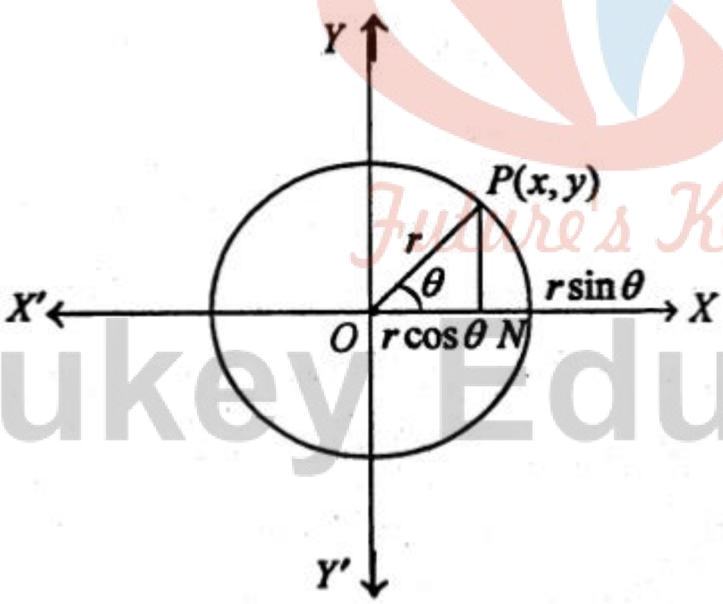
$$\frac{ON}{OP} = \cos\theta \Rightarrow \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad x = r\cos\theta \qquad ...(1)$$

तथा

$$\frac{PN}{OP} = \sin\theta \Rightarrow \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad y = r\sin\theta \qquad ...(2)$$



∴ बिन्दु P के निर्देशांक (r cos θ,r sine θ) होंगे। इस तरह, .

वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ का प्राचलिक रूप है,

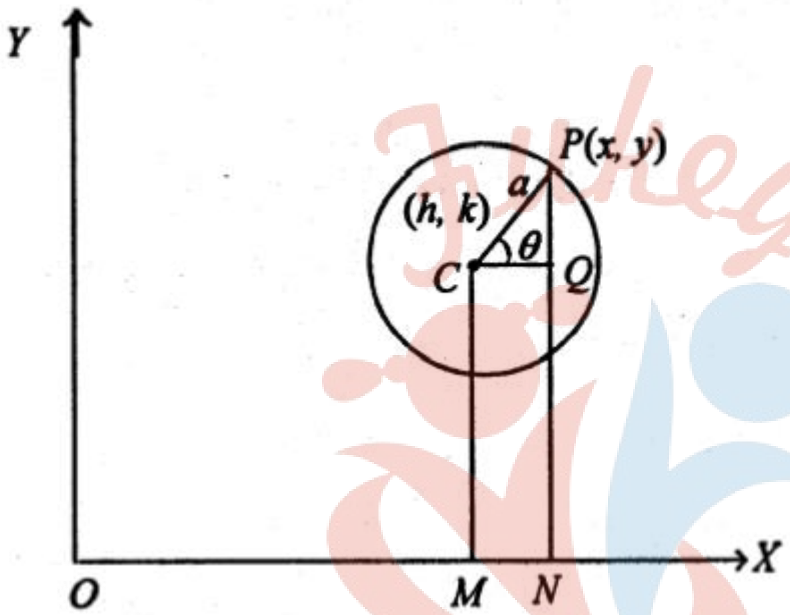
$$\boxed{x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \text{ जब } 0 \le \theta \le 2\pi}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

जहाँ, θ प्राचल है।

सामान्यतया बिन्दु $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ को बिन्दु θ कहते हैं।

वृत्त के व्यापक समीकरण को $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ के रूप में व्यक्त करने पर इसका प्राचलिक रूप आगे ज़ात किया गया है



चित्र से स्पष्ट है कि

$$MN = CQ = r\cos\theta$$

$\therefore$ $$ON = OM + MN$$

$\Rightarrow$ $$x = h + r\cos\theta$$

तथा $$QN = CM, PQ = r\sin\theta$$

$\therefore$ $$PN = QN + PQ$$

$\Rightarrow$ $$y = k + r\sin\theta$$

अतः $$\boxed{\begin{aligned} x &= h + r\cos\theta \\ y &= k + r\sin\theta \end{aligned}}$$

क्योंकि θ के प्रत्येक मान के लिये ये निर्देशांक वृत्त के समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

टिप्पणी $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ से θ को विलोपित करने पर $x^2 + y^2 = r^2$ प्राप्त होता है।

वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक (x, y) अथवा $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ में से किसी भी रूप में लिये जा सकते हैं। प्रथम रूप (x,y) दो चर राशियों से युक्त है लेकिन दूसरे रूप में केवल θ चर है, अतएव प्राचलिक रूप में निर्देशांक को व्यक्त करना अधिक सुविधाजनक है।

दिये गये वृत्त तथा सरल रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण (Equation of the Circle which passes through the Points of Intersection of given Circle and Straight Line)

मान लीजिए कि वृत्त का समीकरण

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1)

तथा सरल रेखा का समीकरण

$P = lx + my + n = 0$ ...(2)

समी. (1) व (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण होगा :

$$S + \lambda P = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) + \lambda(lx + my + n) = 0$$

जिसमें λ का मान एक अतिरिक्त शर्त से ज्ञात करके अभीष्ट वृत्त का समीकरण प्राप्त हो जायेगा।

उदाहरण

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके व्यास के सिरों के निर्देशांक (3,4) व (2,-7) हैं।

हल: माना कि व्यास AB है जहाँ A (x_1, Y_1) तथा B (x_2, y_2)

तब,

$$x_1 = 3, y_1 = 4, x_2 = 2, y_2 = -7$$

अत: अभीष्ट वृत्त का समीकरण है—

$$(x-3)(x-2)+(y-4)(y+7)=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-5x+6+y^2+3y-28=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-5x+3y-22=0.$$

उदाहरण

यदि वृत्त $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ के एक व्यास का एक सिरा (3,4) है तो दूसरे सिरे के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : दिये हुये वृत्त का समीकरण है,

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$

यहाँ $2g = -4$, $2f = -6$ और $c = 11$

$\therefore g = -2, f = -3.$

$\therefore$ वृत्त का केन्द्र (-g,-1) अर्थात् (2,3) है।

माना व्यास के दूसरे सिरे के निर्देशांक (x,y) हैं। तब, दिये हुये वृत्त के एक व्यास के सिरों के निर्देशांक (3, 4) और (x, y) हैं।

परिभाषाएँ Definitions)

1. नाभीय दूरी (Focal Distance) : परवलय पर स्थित किसी बिन्दु की परवलय की नाभि से दूरी, उस बिन्दु की नाभीय दूरी कहलाती है।

2. नाभीय जीवा (Focal Cord): परवलय की वह जीवा जो परवलय की नाभि से गुजरती है, परवलय की नाभीय जीवा कहलाती है।

3. नाभिलम्ब जीवा (Latus Rectum) : परवलय की नाभिलम्ब जीवा, परवलय की वह जीवा है जो परवलय की नाभि से जाती है तथा परवलय की अक्ष के लम्बवत् होती है। दूसरे शब्दों में,

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

परवलय की अक्ष के लम्बवत् परवलय की नाभीय जीवा, परवलय की नाभिलम्ब जीवा कहलाती है।

4. द्विकोटि (Double Ordinate) : परवलय द्वारा उसके अक्ष पर लम्बवत् किसी रेखा पर अन्तःखण्डित भाग (intercepted portion) परवलय की द्विकोटि कहलाती है। अनुच्छेद 3(B)-22 के चित्र में PP' परवलय की एक द्विकोटि है।

नाभिलम्ब परवलय के द्विकोटि की विशेष अवस्था है।

उदाहरण (EXAMPLES)

परवलय $x^2 = -16y$ के नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय का समीकरण है :

$$x^2 = -16y$$

इसकी तुलना $x^2 = -4ay$ से करने पर,

$$-4a = -16 \Rightarrow a = 4$$

∴ परवलय की नाभि $= (0, -a) = (0, -4)$

परवलय का अक्ष = Y-अक्ष

परवलय की नियता $y = a \Rightarrow y = 4$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= 4a = 16.$

Fukey Education

उदाहरण

परवलय $y^2 = 18x$ पर स्थित उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसकी कोटि, भुज की तीन गुनी है।

हल : परवलय का समीकरण है :

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$y^2 = 18x \qquad ...(1)$$

माना दिया हुआ बिन्दु $(\lambda, 3\lambda)$ है, जहाँ $\lambda \neq 0$.

तब, यह बिन्दु समी. (1) से निरूपित परवलय पर स्थित है।

$\therefore \quad (3\lambda)^2 = 18\lambda$

$\Rightarrow \quad 9\lambda^2 = 18\lambda$

$\Rightarrow \quad 9\lambda^2 - 18\lambda = 0$

$\Rightarrow \quad 9\lambda(\lambda - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda(\lambda - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = 0, 2$

$\therefore$ $\lambda = 0$ को छोड़ने पर, $\lambda = 2$

अत: अभीष्ट बिन्दु $(\lambda, 3\lambda) = (2, 6)$ है।

उदाहरण

परवलय $y^2 = 8x$ पर स्थित किसी बिन्दु की नाभीय दूरी 4 है। इस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ परवलय है,

$$y^2 = 8x$$

यहाँ, $\quad 4a = 8 \;\therefore\; a = 2$

माना अभीष्ट बिन्दु (x_1, y_1) है।

इसकी नाभीय दूरी $= a + x_1 = 4$

$\Rightarrow \quad 2 + x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$

$\therefore \quad y_1^2 = 8x_1 = 8.2 = 16$

$\Rightarrow \quad y_1 = \pm 4$

अत: अभीष्ट बिन्दु $(2, 4)$ तथा $(2, -4)$ हैं।

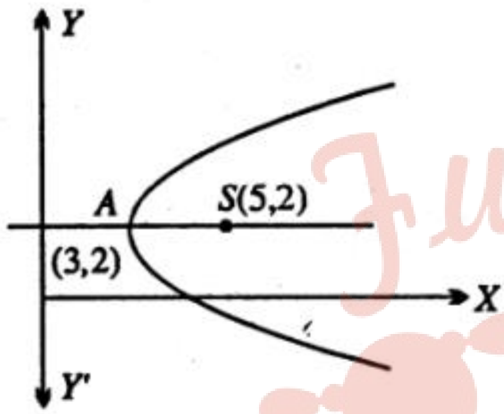
Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उदाहरण

उस परवलय का समीकरण ज़ात कीजिए जिसका शीर्ष (3, 2) और नाभि (5, 2) है।

हल : उस परवलय का समीकरण जिसका अक्ष X- अक्ष के समान्तर तथा शीर्ष (α,β) है, होगा :

$$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$$



यहाँ, $\alpha = 3, \beta = 2$

$\therefore \quad (y-2)^2 = 4a(x-3) \quad ...(1)$

$\because \quad AS = a = \sqrt{(3-5)^2 + (2-2)^2} = 2$

अत: समी. (1) से परवलय का अभीष्ट समीकरण है :

$$(y-2)^2 = 4 \times 2(x-3)$$

$\Rightarrow \quad y^2 + 4 - 4y = 8x - 24$

$\Rightarrow \quad y^2 - 4y - 8x + 28 = 0.$

Fukey Education

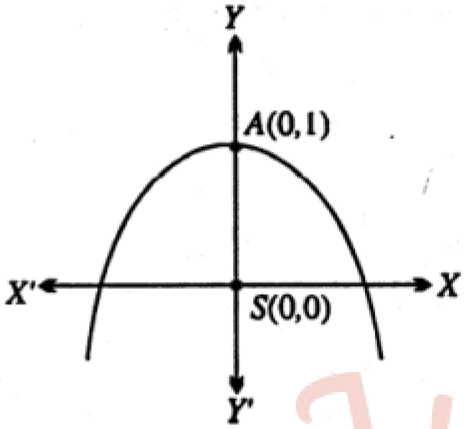
उदाहरण

उस परवलय का समीकरण ज़ात कीजिए जिसका शीर्ष (0, 1) तथा नाभि (0,0) है।

हल: परवलय का समीकरण जिसका अक्ष Y- अक्ष के समान्तर तथा शीर्ष (α,β) हो तथा अवतलता Y-अक्ष की ऋण दिशा में हो, है :

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$(x-\alpha)^2 = -4a(y-\beta) \qquad ...(1)$$



यहाँ, $\alpha = 0, \beta = 1$

तथा $AS = a = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2}$

$\Rightarrow$ $a = 1$

अत: समी. (1) में α, β तथा a के मान रखने पर परवलय का अभीष्ट समीकरण है :

$$(x-0)^2 = -4 \times 1(y-1)$$

$\Rightarrow$ $x^2 = -4y + 4$

$\Rightarrow$ $x^2 + 4y - 4 = 0.$

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 11.1 (पृष्ठ संख्या 256-257)

Fukey Education

प्रश्न 1 प्रश्न में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए:

केंद्र (0, 2) और त्रिज्या 2 इकाई

उत्तर- यहाँ h = 0, k = 2 तथा r = 2 रखने पर,

वृत्त का समीकरण $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

अतः वृत्त का अभीष्ट समीकरण, $x^2 + y^2 - 4y = 0$

प्रश्न 2 प्रश्न में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए:

केंद्र (-2, 3) और त्रिज्या 4 इकाई

उत्तर- वृत्त का समीकरण $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$

या $(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 16$

या $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

प्रश्न 3 प्रश्न में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए:

केंद्र $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ और त्रिज्या $\frac{1}{12}$ इकाई

उत्तर-

यहाँ $h = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{4}$ तथा $r = \frac{1}{12}$ हो, तब

वृत्त का समीकरण, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}\right)^2$

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{144}$$

$$x^2 + y^2 - x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{16} - \frac{1}{144} = 0$$

या $144x^2 + 144y^2 - 144x - 72y - 44 = 0$

या $36x^2 + 36y^2 - 36x - 18y + 11 = 0$

प्रश्न 4 प्रश्न में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए:

केंद्र (1, 1) और त्रिज्या $\sqrt{2}$ इकाई

उत्तर-

यहाँ h = 1, k = 1 तथा $r = \sqrt{2}$ हों, तब

वृत्त का समीकरण,

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

प्रश्न 5 प्रश्न में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए:

केंद्र (-a, -b) और त्रिज्या $\sqrt{a^2 - b^2}$ है।

उत्तर- वृत्त का समीकरण,

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = \{\sqrt{(a^2 - b^2)}\}^2$$

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2by + b^2 = a^2 - b^2$$

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0$$

प्रश्न 6 प्रश्न में वृत्त का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए:

$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$

उत्तर- वृत्त $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$ की $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ से तुलना करने पर,

$-h = 5, -k = -3, r^2 = 36$

$h = -5, k = 3, r = 6$

केन्द्र (-5, 3), त्रिज्या = 6

प्रश्न 7 प्रश्न में वृत्त का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए:

$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर-

$$(x^2 - 4x) + (y^2 - 8y) = 45$$

या $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) = 45 + 4 + 16 = 65$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 65$$

$$\therefore h = 2, k = 4, r = \sqrt{65}$$

$\Rightarrow$ केंद्र (2, 4) और त्रिज्या $= \sqrt{65}$

दूसरी विधि: $2g = -4, 2f = -8, c = -45$

$$g = -2, f = -4, r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$r = \sqrt{4 + 16 + 45}$$

$$= \sqrt{65}$$

केंद्र (-g, -f) अर्थात् (2, 4) त्रिज्या $= r = \sqrt{65}$

प्रश्न 8 प्रश्न में वृत्त का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए:

$x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

उत्तर- $(x^2 - 8x) + (y^2 + 10y) = 12$

या $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 12 + 16 + 25$

$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 53$

केन्द्र (4, -5), त्रिज्या $= \sqrt{53}$

प्रश्न 9 प्रश्न में वृत्त का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए:

$2x^2 + 2y^2 - x = 0$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर-

$$2x^2 + 2y^2 - x = 0$$

या $x^2 + y^2 - \frac{x}{2} = 0$

या $\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + y^2 = 0$

$$\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right) + y^2 = \frac{1}{16}$$

या $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

केंद्र $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ तथा त्रिज्या $= \frac{1}{4}$

प्रश्न 10 बिन्दुओं (4, 1) और (6, 5) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र रेखा 4x + y = 16 पर स्थित है।

उत्तर- वृत्त का व्यापक समीकरण

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

बिन्दु (4, 1) इस पर स्थित है।

16 + 1 + 8g + 2f + c = 0

8g + 2f + c = -17 ...(1)

बिन्दु (6, 5) वृत्त पर स्थित है।

36 + 25 + 12g + 10f + c = 0

12g + 10f + c = -61 ...(2)

केंद्र (-g, -f) रेखा 4x + y = 16 पर स्थित है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$-4g - f = 16$

$4g + f = -16$ ...(3)

समीकरण (1) को (2) में से घटाने पर

$4g + 8f = -44$

समीकरण (3) को (4) में से घटाने पर

$7f = -44 + 16 = -28$

$f = -4$

समीकरण (3) में का मान रखने पर

$4g - 4 = -16$ या $4g = -12$

$g = -3$

f और g का मान समी (1) में रखने पर

$-24 - 8 + c = -17$

$c = 32 - 17 = 15$

अत: वृत्त का समीकरण

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$

प्रश्न 11 बिन्दुओं (2, 3) और (-1, 1) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र रेखा $x - 3y - 11 = 0$ पर स्थित है।

उत्तर- मान लीजिए वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1)

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

इस पर बिन्दु (2, 3) स्थित है।

4 + 9 + 4g + 6f + c = 0

4g + 6f + c = -13 ...(2)

इसी प्रकार (-1, 1) भी वृत्त (1) पर स्थित है।

1 + 1 - 2g + 2 + c = 0

-2g + 2f + c = -2 ...(3)

केंद्र (-g, -f) रेखा x - 3y - 11 = 0 पर स्थित है।

-g + 3f - 11 = 0

या -g + 3f = 11 ...(4)

समीकरण (2) में से (3) को घटाने पर

6g + 4f = -11 ...(5)

समी. (4) को 6 से गुणा करने पर,

-6g + 18f = 66 ...(6)

समी. (5) और समी (6) को जोड़ने पर,

22f = 55

$\Rightarrow f = \frac{5}{2}$

f का मान समी (5) में रखने पर,

6g + 10 = -11

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

6g = -21

$g = \frac{-7}{2}$

g और f का मान समी (3) में रखने पर,

7 + 5 + c = -2 या c = -14

g, और c के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$

यह वृत्त का वांछित समीकरण है।

प्रश्न 12 त्रिज्या 5 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र x-अक्ष पर हो और जो बिन्दु (2, 3) से जाता है।

उत्तर- केंद्र x-अक्ष पर है। मान लीजिए ऐसा बिन्दु (p, 0) है। त्रिज्या 5 वाले वृत्त का समीकरण

$(x - p)^2 + (y - 0)^2 = 25$

बिन्दु (2, 3) इस वृत्त से होकर जाता है।

$(2 - p)^2 + 9 = 25$

$(2 - p)^2 = 25 - 9 = 16$

2 – p – = ±4

+ve चिन्ह लेने पर, 2 - p = 4 या p = 2 - 4 = -2

-ve चिन्ह लेने पर, 2 - p = -4 या 2 = 4 + 2 = 6

जब p = -2, वृत्त का समीकरण

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$(x + 2)^2 + y = 25$

$x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$

जब $p = 6$, वृत्त का समीकरण

$(x - 6)^2 + y^2 = 25$

$x^2 + y^2 - 12x + 36 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$

वृत्त के अभीष्ट समीकरण

$x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$ और $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$

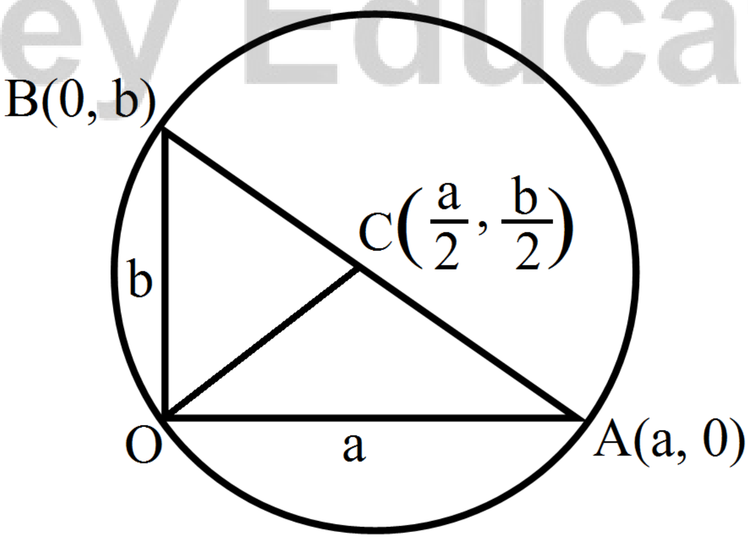
प्रश्न 13 (0, 0) से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षों पर a और B अंतः खण्ड बनाता है।

उत्तर- वृत्त मूल बिन्दु से होकर जाता है और अक्षों पर अंत:खण्ड a, b बनाता है।

OA = a, A के निर्देशांक (a, 0)

OB = b, B के निर्देशांक (0, b)

Fukey Education



केंद्र के निर्देशांक $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right)$ या $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

त्रिज्या $OC = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

∴ वृत्त का समीकरण

$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2$

या $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - by + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4}$

या $x^2 + y^2 - ax - by = \frac{a^2+b^2}{4}$

∴ वृत्त का अभीष्ट समीकरण

$x^2 + y^2 - ax - by = 0$

प्रश्न 14 उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (2, 2) हो तथा (4, 5) से जाता है।

उत्तर- वृत्त की त्रिज्या = केंद्र (2, 2) और बिंदु (4, 5) के बिच की दूरी

$= \sqrt{(2-4)^2 + (2-5)^2}$

$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

केंद्र (2, 2) और त्रिज्या $= \sqrt{13}$

∴ वृत्त का समीकरण,

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 13$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y - 4) = 13$$

या $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0$

प्रश्न 15 क्या बिन्दु (-2.5, 3.5) वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ के अंदर, बाहर या वृत्त पर स्थित है।

उत्तर- वृत्त का केंद्र O(0, 0) है।

दिया हुआ बिंदु P(-2.5, 3.5) है।

$$\therefore OP = \sqrt{(-2.5)^2 + (3.5)^2}$$

$$= \sqrt{6.25 + 12.25}$$

$$= \sqrt{18.50}$$

$$= 4.25$$

यह त्रिज्या जो 5 इकाई से कम है।

अतः बिंदु (-2.5, 3.5) वृत्त के अंदर स्थित होगा।

प्रश्नावली 11.2 (पृष्ठ संख्या 262)

प्रश्न 1 प्रश्न में नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

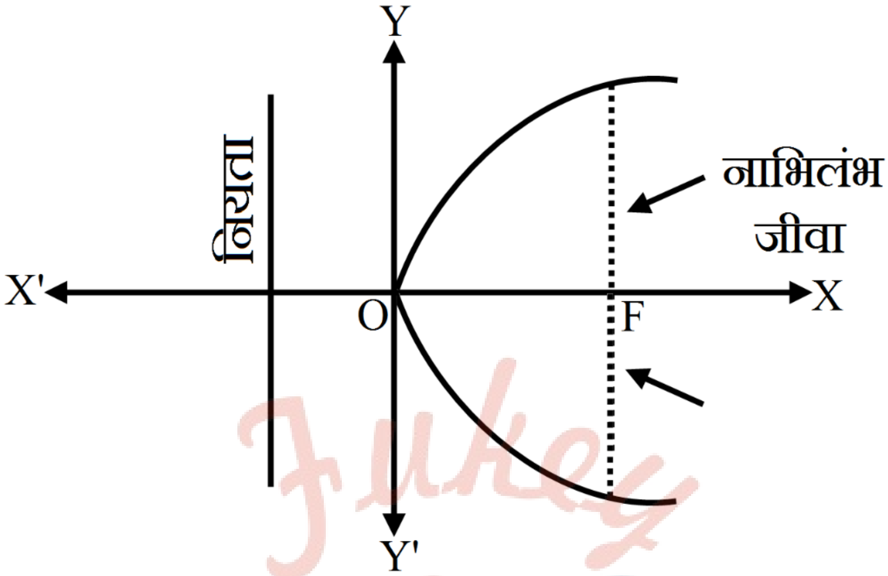
$y^2 = 12x$

उत्तर- परवलय का समीकरण, $y^2 = 12x$

$y^2 = 4ax$ से तुलना करने पर।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

4a = 12 या a = 3



(i) नाभि के निर्देशांक (a, 0) या (3, 0)

(ii) परवलय का अक्ष OX

(iii) इसका समीकरण y = 0

(iv) नियता का समीकरण: x = -a अर्थात् x = -3

(v) नाभिलंब जीवा की लंबाई = 4a = 12

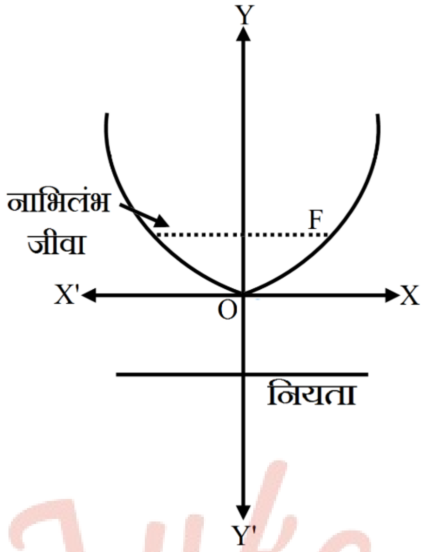
प्रश्न 2 प्रश्न में नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

$x^2 = 6y$

उत्तर- परवलय का समीकरण $x^2 = 6y$

4a = 6 या $a = \frac{3}{2}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



इसका अक्ष y-अक्ष है जिसका

(i) समीकरण x = 0 है।

(ii) नाभि F(0, a) के निर्देशांक $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ है।

(iii) नियता y = -a का समीकरण $y = \frac{-3}{2}$

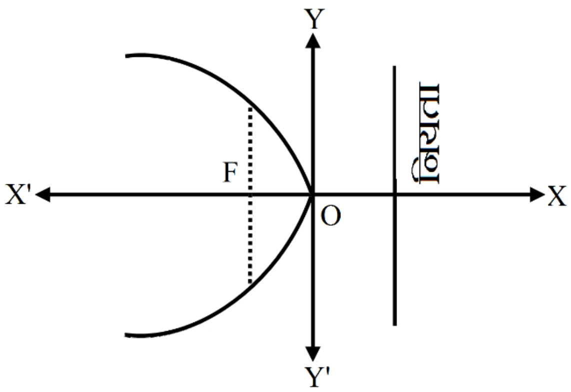
(iv) नाभिलंब जीवा की लम्बाई 4a = 6

प्रश्न 3 प्रश्न में नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

$y^2 = -8x$

उत्तर- परवलय का समीकरण $y^2 = -8x$

$4a = 8 \Rightarrow a = 2$



(i) नाभि F(-a, 0) के निर्देशांक (-2, 0)

(ii) परवलय का अक्ष x-अक्ष

इसका समीकरण y = 0

(iii) नियता x = a का समीकरण x = 2

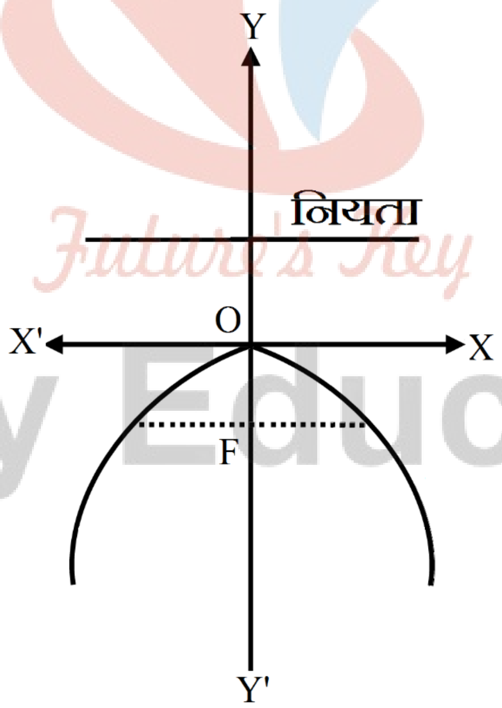
(iv) नाभिलंब जीवा की लंबाई = 4a = 8

प्रश्न 4 प्रश्न में नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

$x^2 = -16y$

उत्तर- परवलय का समीकरण $x^2 = -16y$

4a = 16 या a = 4



(i) नाभि F(0, -a) के निर्देशांक (0, -4)

(ii) परवलय अक्ष का समीकरण x = 0

(iii) नियता y = 0 का समीकरण y = 4

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

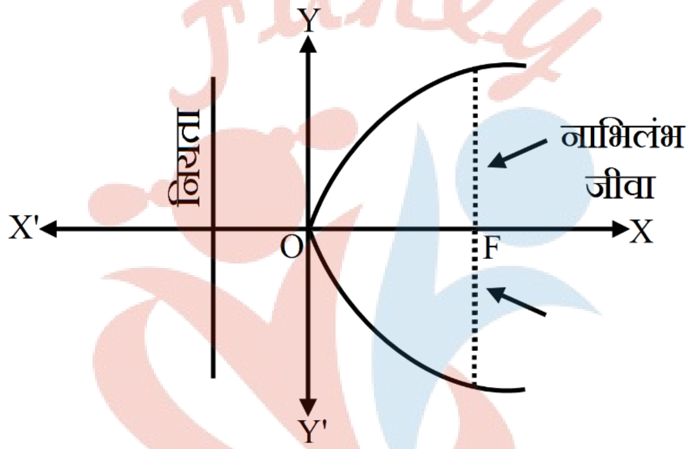
(iv) नाभिलंब जीवा की लंबाई 4a = 16

प्रश्न 5 प्रश्न में नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

$y^2 = 10x$

उत्तर- परवलय का समीकरण $y^2 = 10x$

$4a = 10$ या $a = \frac{5}{2}$



(i) नाभि F (a, O) के निर्देशांक $\left(\frac{5}{2}, O\right)$

(ii) परवलय को अक्ष: x-अक्ष, समीकरण y = 0

(iii) नियता x = -a का समीकरण $x = \frac{-5}{2}$

(iv) नाभिलंब जीवा की लंबाई 4a = 10

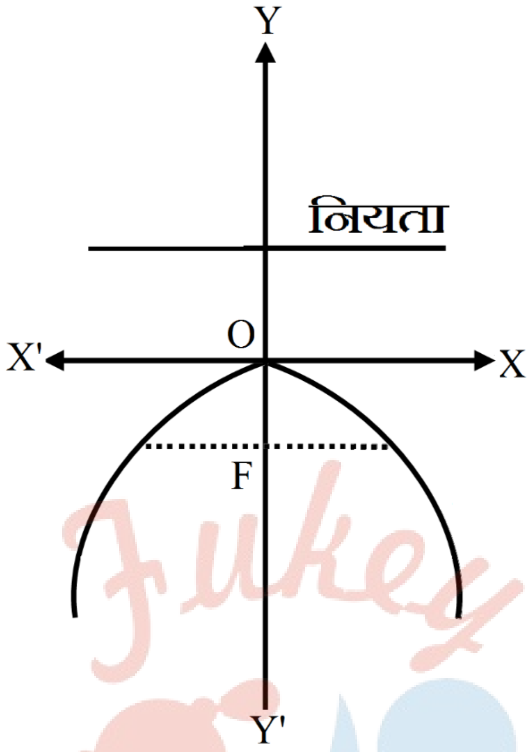
प्रश्न 6 प्रश्न में नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

$x^2 = -9y$

उत्तर- परवलय का समीकरण $x^2 = -9y$

$4a = 9$ या $a = \frac{9}{4}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



(i) नाभि (0, -a) के निर्देशांक $\left(0, \frac{-9}{4}\right)$

(ii) परवलय का अक्ष: y-अक्ष, समीकरण x = 0

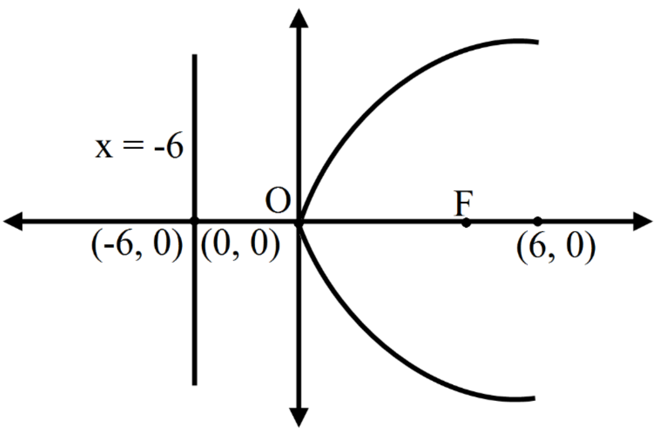
(iii) नियता y = a का समीकरण $y = \frac{9}{4}$

(iv) नाभिलंब जीवा की लंबाई 4a = 9

प्रश्न 7 प्रश्न में परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

नाभि (6, 0), नियता x = -6

उत्तर- परवलंय का अक्ष: x-अक्ष, y = 0



Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

शीर्ष (0, 0) है, नाभि के निर्देशांक (6, 0)

परवलय का अक्ष, धन x-अक्ष के अनुदिश है।

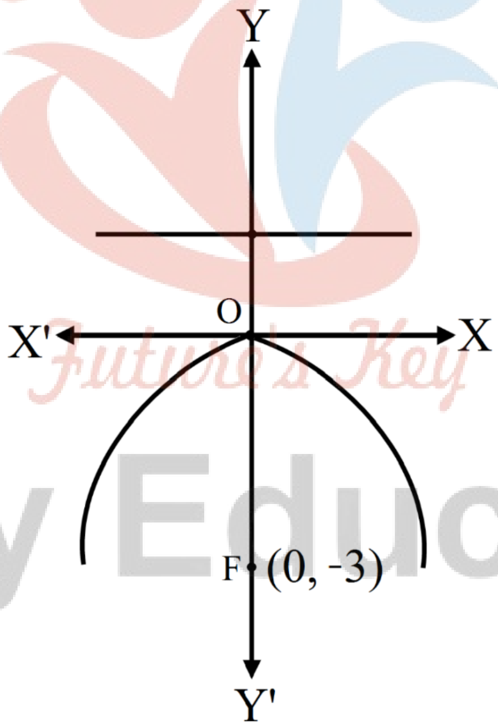
परवलय का समीकरण $y^2 = 24x$

प्रश्न 8 प्रश्न में परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

नाभि (0, -3), नियता y = 3

उत्तर- परवलय का अक्ष y-अक्ष है।

शीर्ष (0, -3), (0, 3) का मध्य बिन्दु (0, 0) है। नाभि (0, -3) से स्पष्ट होता है कि परवलय की अक्ष OY के अँनुदिश है।



परवलय के समीकरण का रूप $x^2 = -4ay$

यहाँ पर a = 3, 4a = 12

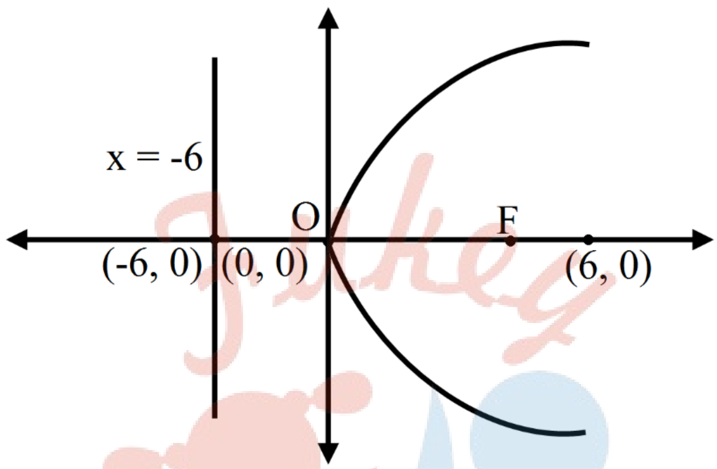
परवलय का समीकरण x = -12y

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 9 प्रश्न में परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

शीर्ष (0, 0), नाभि (3, 0)

उत्तर- परवलय का अक्ष OX के अनुदिश हैं।



परवलय के समीकरण का रूप $y = 4ax$

नाभि (3, 0) है।

$a = 3$

$4a = 4 \times 3 = 12$

परवलय का समीकरण $y^2 = 12x$

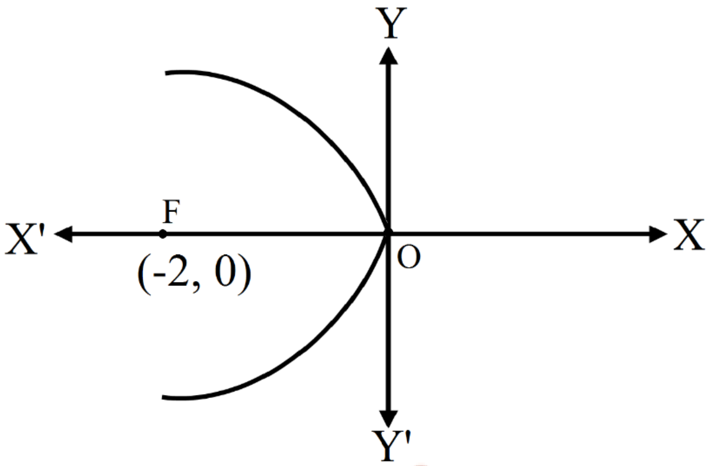
प्रश्न 10 प्रश्न में परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

शीर्ष (0, 0), नाभि (-2, 0)

उत्तर- परवलय का अक्ष OX' के अनुदिश

नाभि (-2, 0) है तो $a = 2$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



4a = 8

परवलय का रूप $y^2 = -4ax$

परवलय का समीकरण $y^2 = -8x$

प्रश्न 11 प्रश्न में परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

शीर्ष (0, 0), (2, 3) से जाता है और अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

उत्तर- परवलय का शीर्ष (0, 0) है और अक्षः x-अक्ष है।

परवलय के समीकरण का रूप $y^2 = 4ax$

यह बिन्दु (2, 3) से होकर जाता है।

$9 = 4a \times 2$

या $4a = \frac{9}{2}$

अतः परवलय का समीकरण $y^2 = \frac{9}{2}x$ या $2y^2 = 9x$.

प्रश्न 12 प्रश्न में परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

शीर्ष (0, 0), (5, 2) से जाता है और y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर- शीर्ष (0, 0), परवलय y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

समीकरण का रूप $x^2 = 4ay$ है।

यह बिन्दु (5, 2) से गुजरता है।

$25 = 4a \times 2$

$4a = \frac{25}{2}$

परवलय का समीकरण, $x^2 = \frac{25}{2}y$ या $2x^2 = 25y$.

प्रश्नावली 11.3 (पृष्ठ संख्या 270)

प्रश्न 1 दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा नाभिलंब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

उत्तर-

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से तुलना करने पर,

$a^2 = 36, b^2 = 16$

$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20$

$\therefore c = 2\sqrt{5}, e = \frac{c}{a}$

$= \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

नाभियों के निर्देशांक $(\pm c, 0)$ अर्थात् $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$

शीर्ष $(\pm a, 0)$ या $(\pm 6, 0)$,

दीर्घ अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2 \times 6 = 12$

लघु अक्ष की लम्बाई $= 2b = 2 \times 4 = 8$

उत्केंद्रता $= e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

नाभिलंब जीवा $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times16}{6} = \frac{16}{3}$

प्रश्न 2 दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा नाभिलंब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

उत्तर-

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

$\therefore a^2 = 25, b^2 = 4$ या $a = 5, b = 2$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21$

$\therefore c = \sqrt{21}$

नाभि के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm\sqrt{21})$

शीर्ष निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 5)$

दीर्घ अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2 \times 5 = 10$

लघु अक्ष की लम्बाई $= 2b = 2 \times 2 = 4$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्केंद्रता $= e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

नाभिलंब जीवा की लम्बाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times4}{5} = \frac{8}{5}$

प्रश्न 3 दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा नाभिलंब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

उत्तर-

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 16, b^2 = 9$ अर्थात् $a = 4, b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$

$\therefore c = \sqrt{7}$

नाभि के निर्देशांक $(\pm c, 0)$ या $(\pm\sqrt{7}, 0)$

शीर्ष के निर्देशांक $(\pm a, 0)$ या $(\pm 4, 0)$

दीर्घ अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2 \times 4 = 8$

लघु अक्ष की लम्बाई $= 2b = 2 \times 3 = 6$

उत्केंद्रता $= e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

नाभिलंब जीवा की लम्बाई $= \frac{2b^2}{2} = \frac{2\times9}{4} = \frac{9}{2}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 4 दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा नाभिलंब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$$

उत्तर-

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$

$\therefore a^2=100, b^2=25$

$\therefore a=10, b=5$

$\therefore c^2=a^2-b^2=100-25=75$

$\therefore c=5\sqrt{3}$

नाभि के निर्देशांक $(0,\pm c)$ या $(0,\pm 5\sqrt{3})$

शीर्ष के निर्देशांक $(0,\pm a)$ या $(0,\pm 10)$

दीर्घ अक्ष की लम्बाई $=2a=2\times 10=20$

लघु अक्ष की लम्बाई $=2b=2\times 5=10$

उत्केंद्रता $=e=\frac{c}{a}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

नाभिलंब जीवा की लम्बाई $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 25}{10}=5$

प्रश्न 5 दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा नाभिलंब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर-

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$

$\therefore a^2 = 49, b^2 = 36$

$\therefore a = 7, b = 6$

दीर्घ अक्ष, x-अक्ष अनुदिश है

$c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 36 = 13$

$\therefore c = \sqrt{3}$

नाभि के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm\sqrt{13}, 0)$

शीर्ष के निर्देशांक $(\pm a, 0)$ या $(\pm 7, 0)$

दीर्घ अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2 \times 7 = 14$

लघु अक्ष की लम्बाई $= 2b = 2 \times 6 = 12$

उत्केंद्रता $= e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{7}$

नाभिलंब जीवा की लम्बाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 36}{7} = \frac{72}{7}$

प्रश्न 6 दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा नाभिलंब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{400} = 1$$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{400} = 1$

$\therefore a^2 = 400, b^2 = 100$

$\therefore a = 20, b = 10$

$c^2 = a^2 - b^2 = 400 - 100 = 300$

$\therefore c = 10\sqrt{3}$

दीर्घ अक्ष, y- अक्ष के अनुदिश है

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm 10\sqrt{3})$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 20)$

दीर्घ अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2 \times 20 = 40$

लघु अक्ष की लम्बाई $= 2b = 2 \times 10 = 20$

नाभिलंब जीवा की लम्बाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 100}{20} = 10$

उत्केंद्रता $= e = \frac{c}{a} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Fukey Education

प्रश्न 7 दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा नाभिलंब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

$36x^2 + 4y^2 = 144$

उत्तर-

दीर्घवृत्त का समीकरण $36x^2 + 4y^2 = 144$

या $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$

$\therefore a^2 = 36, b^2 = 4$

$\therefore a = 6, b = 2$

$\therefore c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 4 = 32$

$\therefore c = 4\sqrt{2}$

दीर्घवृत्त का अक्ष, y-अक्ष अनुदिश है

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm 4\sqrt{2})$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 6)$

दीर्घ अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2 \times 6 = 12$

लघु अक्ष की लम्बाई $= 2b = 2 \times 2 = 4$

नाभिलंब जीवा की लम्बाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{6} = \frac{4}{3}$

उत्केंद्रता $= e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

प्रश्न 8 दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा नाभिलंब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

$16x^2 + y^2 = 16$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

दीर्घवृत्त का समीकरण $16x^2 + y^2 = 16$

या $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$

दीर्घवृत्त का अक्ष, y-अक्ष अनुदिश है।

$\therefore a^2 = 16, b^2 = 1$

$\therefore a = 4, b = 1$

$\therefore c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 1 = 15$

$\therefore c = \sqrt{15}$

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm\sqrt{15})$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 4)$

दीर्घ अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2 \times 4 = 8$

लघु अक्ष की लम्बाई $= 2b = 2 \times 1 = 2$

नाभिलंब जीवा की लम्बाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times1}{4} = \frac{1}{2}$

उत्केंद्रता $= e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Fukey Education

प्रश्न 9 दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा नाभिलंब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

$4x^2 + 9y^2 = 36$

उत्तर-

दीर्घवृत्त का समीकरण $4x^2 + 9y^2 = 36$

या $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

दीर्घ अक्ष, x-अक्ष अनुदिश है।

$\therefore a^2 = 9, b^2 = 4$

$\therefore a = 3, b = 2$

$\therefore c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$

$\therefore c = \sqrt{5}$

नाभियों के निर्देशांक $(\pm c, 0)$ या $(\pm\sqrt{5}, 0)$

शीर्षों के निर्देशांक $(\pm a, 0)$ या $(\pm 3, 0)$

दीर्घ अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2 \times 3 = 6$

लघु अक्ष की लम्बाई $= 2b = 2 \times 2 = 4$

नाभिलंब जीवा की लम्बाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times4}{3} = \frac{8}{3}$

उत्केंद्रता $= e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Fukey Education

प्रश्न 10 प्रश्न में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

शीर्षों (±5, 0), (±5, 0), नाभियाँ (±4, 0)

उत्तर- $a = 5, c = 4, c^2 = a^2 - b^2$

या $16 = 25 - b^2$

$\therefore b^2 = 25 - 16 = 9$

और $a^2 = 25$

दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

प्रश्न 11 प्रश्न में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

शीर्षों (0, ±13), (0, ±13), नाभियाँ (0, ±5)

उत्तर-

दीर्घ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है।

$\therefore c = 5, a = 13, c^2 = a^2 - b^2$

$\therefore 25 = 169 - b^2$

$\therefore b^2 = 169 - 25 = 144,$

और $a^2 = 13^2 = 169$

∴ दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$$

प्रश्न 12 प्रश्न में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

शीर्षों (±6, 0), (±6, 0), नाभियाँ (±4, 0)

उत्तर- दीर्घ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है।

$a = 6,$

$\therefore a^2 = 36, c = 4$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$c^2 = a^2 - b^2$ या $16 = 36 - b^2$

$\therefore b^2 = 36 - 16 = 20$

∴ दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

प्रश्न 13 प्रश्न में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

दीर्घ अक्ष के अंत्य बिन्दु (±3, 0), (±3, 0), लघु अक्ष के अंत्य बिन्दु (0, ±2)

उत्तर- दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

$a = 3, b = 2,$

$\therefore a^2 = 9, b^2 = 4$

दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

प्रश्न 14 प्रश्न में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

दीर्घ अक्ष के अंत्य बिन्दु $(0, \pm\sqrt{5})$, लघु अक्ष के अंत्य बिन्दु (±1, 0)

उत्तर- दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

$a = \sqrt{5}, b = 1,$

$a^2 = 5, b^2 = 1$

दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 15 प्रश्न में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

दीर्घ अक्ष की लंबाई 26, नाभियाँ (±5, 0)

उत्तर- दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

और 2b = 26,

∴ b = 13 या $a^2 = 169$

c = 5, $c^2 = 25 = a^2 - b^2 = 169 - b^2$

∴ $b^2 = 169 - 25 = 144$

अतः $a^2 = 169$, $b^2 = 144$

∴ दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

प्रश्न 16 प्रश्न में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

दीर्घ अक्ष की लंबाई 16, नाभियाँ (0, ±6)

उत्तर- दीर्घ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है।

और 2b = 16,

∴ b = 8 या $b^2 = 64$,

c = 6, $c^2 = 36$,

$c^2 = a^2 - b^2$

या $36 = a^2 - b^2$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

∴ $a^2 = 64 + 36 = 100$

∴ दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

प्रश्न 17 प्रश्न में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

नाभियाँ (±3, 0), a = 4

उत्तर- दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

∴ c = 3, a = 4

अब $c^2 = a^2 - b^2$

या $9 = 16 - b^2$

∴ $b^2 = 16 - 9 = 7$

∴ दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

प्रश्न 18 प्रश्न में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

b = 3, c = 4, केन्द्र मूल बिन्दु पर, नाभियाँ x-अक्ष पर

उत्तर- दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

$c^2 = a^2 - b^2$

या $16 = a^2 - 9$

∴ $a^2 = 16 + 9 = 25$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

∴ दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

प्रश्न 19 प्रश्न में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

केंद्र (0, 0) पर, दीर्घ अक्ष y-अक्ष पर और बिन्दुओं (3, 2) और (1, 6) से जाता है।

उत्तर-

माना दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

बिन्दु (3, 2) पर, $\frac{9}{b^2}+\frac{4}{a^2}=1$

और बिन्दु (1, 6) पर, $\frac{1}{b^2}+\frac{36}{a^2}=1$

समीकरण (1) को 9 से गुणा करने पर, $\frac{81}{b^2}+\frac{36}{a^2}=9$

इसमें से समीकरण (2) को घटाने पर,

$\frac{80}{b^2}=8$ या $b^2=\frac{80}{8}=10$

b^2 का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{a^2}=1$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

या $\frac{4}{a^2} = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

$\therefore a^2 = 40$

दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1$$

प्रश्न 20 प्रश्न में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

दीर्घ अक्ष, x-अक्ष पर और बिन्दुओं (4, 3), (6, 2) से जाता है।

उत्तर-

मान लीजिए दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

यह बिन्दु (4, 3)

और (6, 2) से जाता है

$$\therefore \frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$$

$$\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$$

समीकरण (1) को 4 से और समीकरण (2) को 9 से गुणा करने पर

$$\frac{64}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 4$$

$$\frac{324}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 9$$

समीकरण (4) में से समीकरण (3) घटाने पर,

$$\frac{260}{a^2} = 5$$

या $a^2 = \frac{260}{5} = 52$

a^2 का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{16}{52} + \frac{9}{b^2} = 1$$

या $\frac{9}{b^2} = 1 - \frac{16}{52} = \frac{36}{52}$

$$\frac{9}{b^2} = \frac{36}{52}$$

या $b^2 = \frac{9 \times 52}{36} = 13$

∴ दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$$

प्रश्नावली 11.4 (पृष्ठ संख्या 277-278)

प्रश्न 1 अतिपरवलयों के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

उत्तर-

अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$a^2 = 16, b^2 = 9$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$

$\therefore a = 4, b = 3, c = 5$

शीर्षों के निर्देशांक (±a, 0) या (±4, 0)

नाभियों के निर्देशांक (±c, 0) या (±5, 0)

उत्केंद्रता $= e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times9}{4} = \frac{9}{2}$

प्रश्न 2 अतिपरवलयों के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$$

उत्तर-

अतिपरवलय का समीकरण $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$

अनुप्रस्थ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है।

$a^2 = 9, b^2 = 27$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 27 = 36$

$\therefore a = 3, b = 3\sqrt{3}, c = 6$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

शीर्षों के निर्देशांक $(\pm a, 0)$ या $(0, \pm 3)$

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm 6)$

उत्केंद्रता $e = \frac{c}{a} = \frac{6}{3} = 2$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 27}{3} = 18$

प्रश्न 3 अतिपरवलयों के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

$9y^2 - 4x^2 = 36$

उत्तर-

अतिपरवलय का समीकरण $9y^2 - 4x^2 = 36$

36 से भाग देने पर, $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

⇒ अनुप्रस्थ अक्ष x-अक्ष के अनुदिश है।

$a^2 = 4$, $b^2 = 9$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$

$\therefore a = 2, b = 3, c\sqrt{13}$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 2)$

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm\sqrt{13})$

उत्केंद्रता $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 9}{2} = 9$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 4 अतिपरवलयों के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

$16x^2 - 9y^2 = 576$

उत्तर- अतिपरवलय का समीकरण: $16x^2 - 9y^2 = 576$

576 से भाग देने पर,

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

$a^2 = 36, b^2 = 64$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100$

$\therefore a = 6, b = 8, c = 10$

शीर्षों के निर्देशांक $(\pm a, 0)$ या $(\pm 6, 0)$

नाभियों के निर्देशांक $(\pm c, 0)$ या $(\pm 10, 0)$

उत्केंद्रता $e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times64}{6} = \frac{64}{3}$

प्रश्न 5 अतिपरवलयों के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

$5y^2 - 9x^2 = 36$

उत्तर-

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

अतिपरवलय का समीकरण: $5y^2 - 9x^2 = 36$

36 से भाग देने पर,

$$\frac{y^2}{\frac{36}{5}} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$a^2 = \frac{36}{5}, b^2 = 4$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = \frac{36}{5} + 4$$

$$= \frac{36+20}{5} = \frac{56}{5}$$

$$\therefore a = \frac{6}{\sqrt{5}}, b = 2, c = \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $\left(0, \pm \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $\left(0, \pm \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}\right)$

उत्केंद्रता $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}}$

$$= \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{3}$$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times4}{\sqrt{\frac{36}{5}}}$

$$= 8 \times \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

प्रश्न 6 अतिपरवलयों के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

$49y^2 - 16x^2 = 784$

उत्तर-

अतिपरवलय का समीकरण: $49y^2 - 16x^2 = 784$

784 से भाग देने पर, $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$

अनुप्रस्थ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है।

$a^2 = 16, b^2 = 49$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 49 = 65$

$\therefore a = 4, b = 7, c = \sqrt{65}$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 4)$

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm\sqrt{65})$

उत्केंद्रता $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{65}}{4}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 49}{4} = \frac{49}{2}$

प्रश्न 7 दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

शीर्ष (±2, 0), नाभियाँ (±3, 0)

उत्तर- अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

$a = 2, c = 3, c^2 = a^2 + b^2$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

या 9 = 4 + b^2

∴ $b^2 = 5$

अतिपरवलय का समीकरण: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

या $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

प्रश्न 8 दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

शीर्ष (0, ±5), नाभियाँ (0, ±8)

उत्तर- अनुप्रस्थ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है।

$a = 5, c = 8, c^2 = a^2 + b^2$

या $64 = 25 + b^2$

∴ $b^2 = 64 - 25 = 39, a^2 = 25$

अतिपरवलय का समीकरण: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$

प्रश्न 9 दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलयका समीकरण ज्ञात कीजिए।

शीर्ष (0, ±3), नाभियाँ (0, ±5)

उत्तर-

अनुप्रस्थ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है।

शीर्ष $(0, \pm 3) \Rightarrow a = 3, a^2 = 9$

नाभियाँ $(0, \pm 5) \Rightarrow c = 5$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$

या $25 = 9 + b^2$

$\therefore b^2 = 16$

$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

प्रश्न 10 दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

नाभियाँ (±5, 0), अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = 8

उत्तर- नुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = 2a = 8

$a = 4$

$a^2 = 16$

नाभियाँ (±5, 0)

$c = 5, c^2 = a^2 + b^2$

या $25 = 16 + b^2$

$\therefore b^2 = 9$

$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

प्रश्न 11 दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

नाभियाँ (0, ±13), संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = 24 है।

उत्तर- नाभियाँ (0, ±13)

अनुप्रस्थ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

और $c = 13$, $c^2 = 169$

संयुग्मी अक्ष की लम्बाई, $2b = 24$

$\therefore b = 12$, $b^2 = 144$

$c^2 = a^2 + b^2$

या $169 = a^2 + 144$

$\therefore a^2 = 169 - 144 = 25$

$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$

प्रश्न 12 दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, नाभिलंब जीवा की लंबाई 8 है।

उत्तर-

नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

और $c = 3\sqrt{5}$ या $c^2 = 45$

या $c^2 = a^2 + b^2, \therefore a^2 + b^2 = 45$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = 8$

$\therefore b^2 = 4a$

समीकरण (1) और (2) से,

$a^2 + 4a - 45 = 0$ या $(a + 9)(a - 5) = 0$

$a = -9$ या $a = 5$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

परन्तु $a \neq -9$

$\therefore a = 5, a^2 = 25$

$\therefore b^2 = 4a$

या $b^2 = 4 \times 5 = 20$

$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण, $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$

प्रश्न 13 दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

नाभियाँ (±4, 0), नाभिलंब जीवा की लंबाई 12 है।

उत्तर-

नाभियाँ $(\pm 4, 0)$

अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

और $c = 4$ या $c^2 = 16$

या $c^2 = a^2 + b^2, \therefore a^2 + b^2 = 16 \ldots (1)$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = 12$

$\therefore b^2 = 6a \ldots (2)$

समीकरण (1) और (2) से,

$a^2 + 6a - 16 = 0$

या $(a + 8)(a - 2) = 0$

$a = -8$ या $a = 2$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

परन्तु $a \neq -8 \therefore a = 2, a^2 = 4$

$\therefore b^2 = 6a = 6 \times 2 = 12$

$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

प्रश्न 14 दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

शीर्ष $(\pm 7, 0)$, $e = \frac{4}{3}$.

उत्तर-

शीर्ष $(\pm 7, 0)$

अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

और $a = 7, a^2 = 49$

$e = \frac{c}{a}$

$\therefore \frac{4}{3} = \frac{c}{7}$

$\therefore c = \frac{28}{3}$

$c^2 = a^2 + b^2$

या $\left(\frac{28}{3}\right)^2 = 49 + b^2$

$b^2 = \frac{784}{9} - 49$

$= \frac{784-441}{9} = \frac{343}{9}$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण, $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{\frac{343}{9}} = 1$

या $\frac{x^2}{49} - \frac{9y^2}{343} = 1$

प्रश्न 15 दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$, हैं तथा (2, 3) से होकर जाता है।

उत्तर-

नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$

अनुप्रस्थ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है।

और $c = \sqrt{10}$ या $c^2 = 10 = a^2 + b^2$

$\therefore a^2 + b^2 = 10$

मान लीजिए अतिपरवलय का समीकरण

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

यह बिन्दु (2, 3) से, जाता है

$\therefore \frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$ या $9b^2 - 4a^2 = a^2b^2$

समीकरण (1) में से b^2 का मान रखने से

$$9(10 - a^2) - 4a^2 = a^2(10 - a^2)$$

या $90 - 9a^2 - 4a^2 = 10a^2 - a^4$

$$a^4 - 23a^2 + 90 = 0$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

या $(a^2 - 18)(a^2 - 5) = 0$

जब $a^2 = 18, b^2 = 10 - a^2$

$= 10 - 18 = -8$

$= -ve$

अतः $a^2 \neq 18$

जब $a^2 = 5, b^2 = 10 - 5 = 5$

$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण

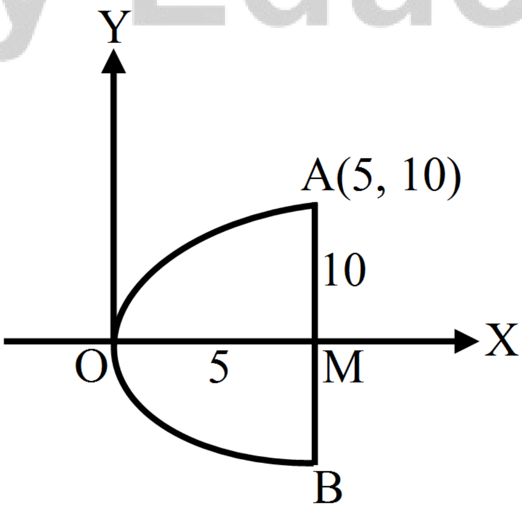
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

या $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} = 1$

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 280)

प्रश्न 1 यदि एक परवलयाकार परावर्तक का व्यास 20 सेमी और गहराई 5 सेमी है, तो नाभि ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



परवलयाकार परावर्तक AOB का व्यास,

AB = 20 सेमी

AM = 10 सेमी

परावर्तक की गहराई, OM = 5 सेमी

यदि OX, OY निर्देशांक अक्ष हो तो बिन्दु परवलय पर स्थित है।

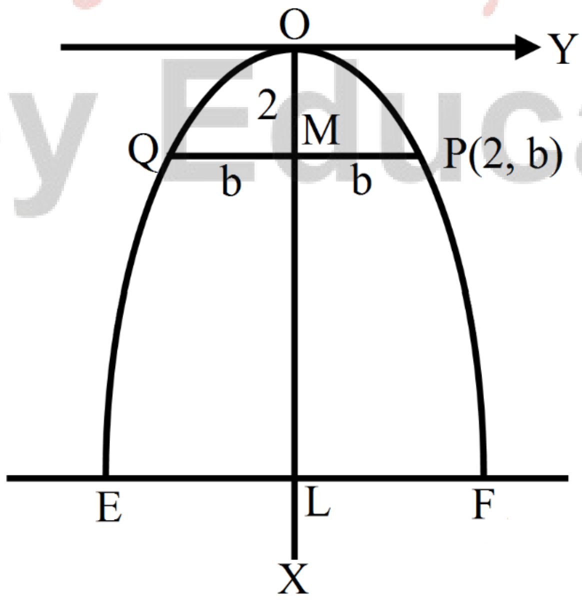
माना परवलय का समीकरण, $y^2 = 4ax$

$10^2 = 4a \times 5$ या $100 = 20a$ या $a = 5$

परवलय की नाभि $(a, 0)$ या $(5, 0)$ है।

प्रश्न 2 एक मेहराब परवलय के आकार का है और इसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है। मेहराब 10 मीटर ऊँचा है और आधार में 5 मीटर चौड़ा है। यह परवलय के दो मीटर की दूरी पर शीर्ष से कितना चौड़ा होगा?

उत्तर-



इसका आकार परवलय की आकृति का है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

माना OX, OY इसके निर्देशांक अक्ष है, और समीकरण $y^2 = 4ax$ है।

मेहराब की ऊँचाई, OL = 10 मीटर

चौड़ाई EF = 5 मीटर

$$LF = \frac{1}{2}$$

$$Ef = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

बिन्दु F के निर्देशांक $\left(10, \frac{5}{2}\right)$

चूँकि बिन्दु $\left(10, \frac{5}{2}\right)$ परवलय $y^2 = 4ax$ स्थित है

$$\therefore \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4a \times 10a = \frac{25}{4}$$

$$\therefore 4a = \frac{25}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{8}$$

$\therefore$ परवलय का समीकरण, $y^2 = \frac{5}{8}x$

शीर्ष O से 2 मीटर निचे, मान लिया कि मेहराब की चौड़ाई 2b है।

$$\therefore PM = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2} \times 2b = b$$

$\therefore$ P बिन्दु के निर्देशांक (2, b) है जो परवलय $y^2 = \frac{5}{8}x$ पर स्थित है।

$$\therefore b^2 = \frac{5}{8} \times 2 = \frac{5}{4}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\therefore b = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

इस स्थान पर मेहराब की चौड़ाई,

$$= 2b = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \text{ मीटर}$$

$$= 2.24 \text{ मीटर (लगभग)}$$

प्रश्न 3 एक सर्वसम भारी झूलते पुल की केबिल (cable) परवलय के रूप में लटकी हुई है। सड़क पथ जो क्षैतिज है 100 मीटर लम्बा है तथा केबिल से जुड़े अर्ध्वाधर तारों पर टिका हुआ है, जिसमें सबसे लम्बा तार 30 मीटर और सबसे छोटा तार 6 मीटर है। मध्य से 18 मीटर दूर सड़क पथ से जुड़े समर्थक (supporting) तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना OX, OY निर्देशांक अक्ष हैं। AOB परवलय के रूप में केबिल है। इसका समीकरण $x^2 = 4ay$ के रूप में होगा।

सबसे छोटे तार की लम्बाई OL = 6 मीटर

सबसे बड़े तार की लम्बाई BM = 30 मीटर

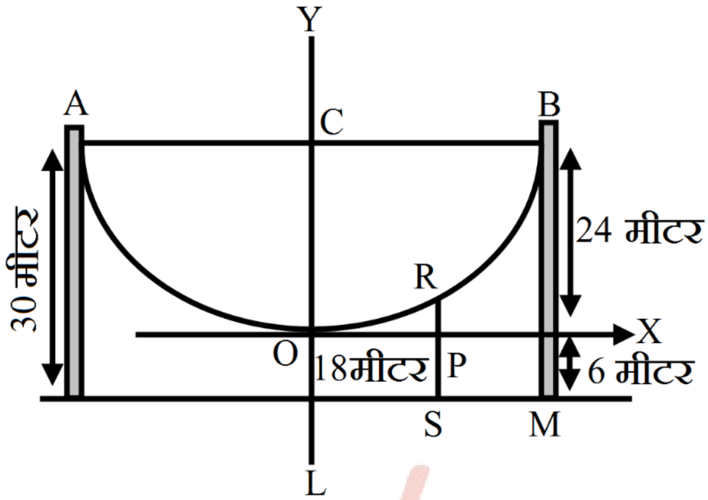
शीर्ष O से रेखा LM की दूरी OL = 6 मीटर है।

सड़क की लंबाई AB = 100 मीटर, यदि C मध्य बिन्दु हो तो

$$CB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 100 = 50 \text{ मीटर}$$

$$OC = CL - OL = 30 - 6 = 24 \text{ मीटर}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com



इस प्रकार B के निर्देशांक (50, 24) है

यह परवलय $x^2 = 4ay$ पर स्थित है

$$\therefore (50)^2 = 4a \times 24$$

$$\Rightarrow 4a = \frac{50 \times 50}{24} = \frac{625}{6}$$

$\therefore$ परवलय का समीकरण $x^2 = \frac{625}{6}y$

OY से 18 मीटर दुरी पर एक बिन्दु R लिया गया है। OX से R की दुरी b हो, तब R के निर्देशांक (18, b)

यह परवलय $x^2 = \frac{625}{6}y$ स्थित है

$$\therefore 18 \times 18 = \frac{625}{6}b$$

$$\therefore RP = b = \frac{18 \times 18 \times 6}{625}$$

$$= \frac{1944}{625}$$

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$= 3.11$ मीटर

आधार LM से R की दुरी = RS = RP + PS

= 3.11 + 6

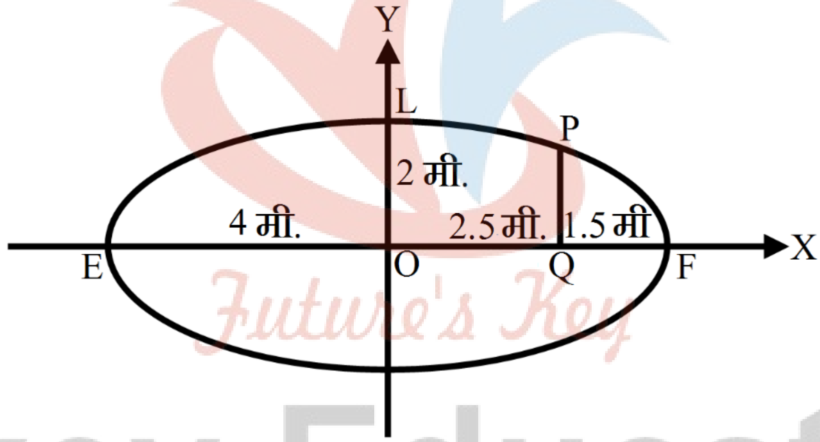
= 9.11 मीटर

∴ तार की लंबाई = 9.11 मीटर।

प्रश्न 4 एक मेहराब अर्ध-दीर्घवृत्ताकार रूप का है। यह 8 मीटर चौड़ा है और केंद्र से 2 मीटर ऊँचा है। एक सिरे से 1.5 मीटर दूर बिन्दु पर मेहराब की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- आकृति में ELF एक मेहराब है जिसकी चौड़ाई EF = 8 मीटर और ऊंचाई = 2 मीटर है।

माना OX, OY निर्देशांक अक्ष है। ELF एक दीर्घवृत्त है जिसमें a = 4, b = 2



Fukey Education

∴ दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

या $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

एक बिन्दु Q सिरे F से 1.5 मीटर की दूरी पर है।

∴ Q की O से दूरी = 4 - 1.5 = 2.5 मीटर

मान लीजिए बिन्दु Q पर मेहराब की ऊंचाई p है।

∴ P(2.5, p) दीर्घवृत्त पर स्थित है।

$$\therefore \frac{(2.5)}{16} + \frac{p^2}{4} = 1$$

$$\text{या } \frac{p^2}{4} = 1 - \frac{6.25}{16} = \frac{9.75}{16}$$

$$p^2 = \frac{9.75}{16} \times 4 = \frac{9.75}{4}$$

$$p = \frac{\sqrt{9.75}}{2}$$

$$= \frac{3.122}{2}$$

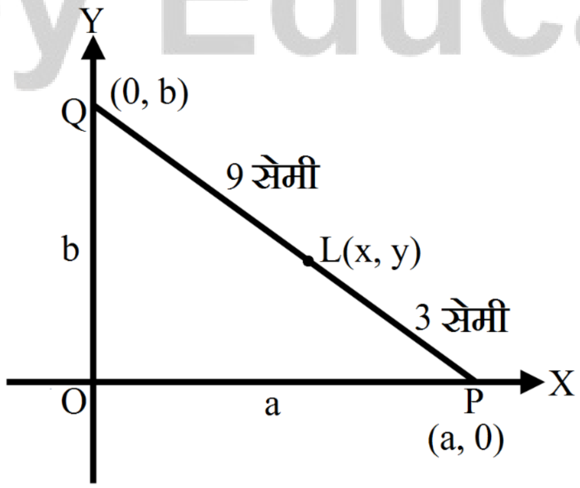
$= 1.56$ मीटर (लगभग)

अतः Q बिन्दु पर मेहराब की ऊंचाई = 1.56 मीटर (लगभग) है।

प्रश्न 5 एक 12 सेमी छड़ इस प्रकार चलती है कि इसके सिरे निर्देशांक्षों को स्पर्श करते हैं। छड़ के बिन्दु P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष के संपर्क वाले सिरे से 3 सेमी दूर है।

उत्तर-

Fukey Education



माना OX, OY निर्देशांक्ष है। इन अक्षों पर रेखा PQ = 12 सेमी चलती है।

$\therefore$ POQ में, $PQ^2 + OP^2 + OQ^2$

$$12^2 = a^2 + b^2$$

या $a^2 + b^2 = 144$

जहाँ OA = a, OB = b अक्षों पर अंतःखण्ड है।

बिन्दु L(x, y), PQ को 3 : 9 = 1 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है। जब कि P और Q के निर्देशांक क्रमशः (a, 0) और (0, b) है।

$\therefore$ L के निर्देशांक इस प्रकार होंगे

$$x = \frac{3a+1\times0}{3+1} = \frac{3a}{4}$$

$$\therefore a = \frac{4x}{3}$$

$$y = \frac{3\times0+1\times b}{3+1} = \frac{b}{4}$$

$$\therefore b = 4y$$

इनका मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\left(\frac{4}{3}x\right)^2 + (4y)^2 = 144$$

या $\frac{16x^2}{9} + \frac{16y^2}{1} = 144$

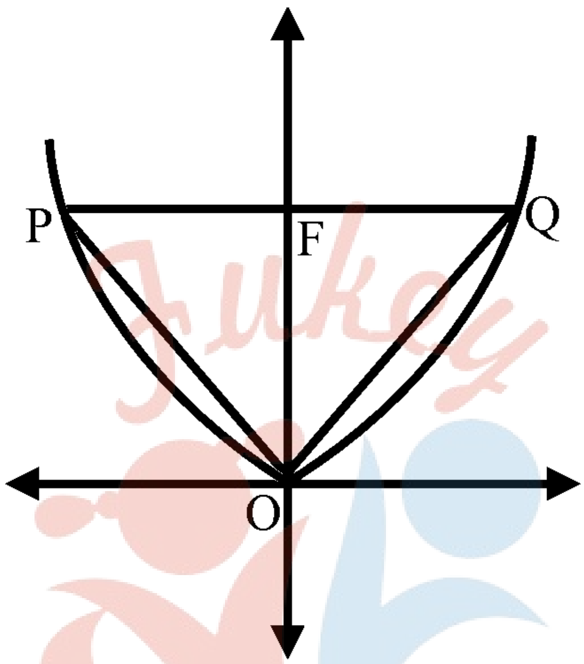
या $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 9$

अतः L का बिन्दुपथ एक दीर्घवृत्त है। जिसका समीकरण $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$ है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

प्रश्न 6 त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $x^2 = 12y$ के शीर्ष को इसकी नाभिलंब जीवा के सिरों को मिलाने वाली रेखाओं से बना है।

उत्तर-



परवलय का समीकरण, $x^2 = 12y$

नाभि के निर्देशांक (a, 0) या (3, 0) हैं।

OF = 3 इकाई

नाभिलंब जीवा की लंबाई = 4a = 12

$\triangle POQ$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times OF \times PQ$

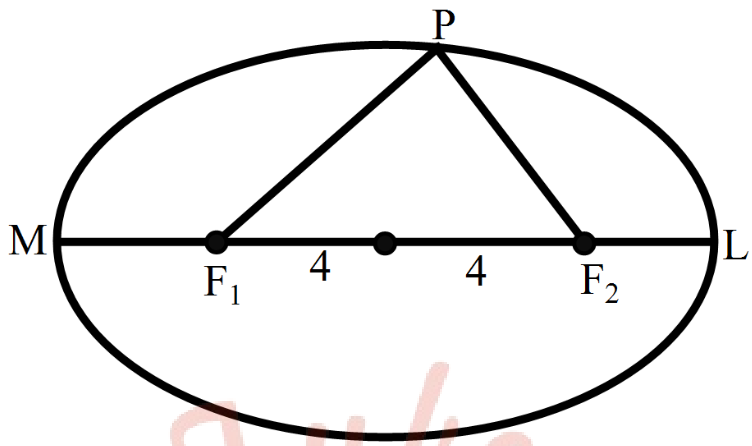
$= \frac{1}{2} \times 3 \times 12$

$= 18$ वर्ग इकाई।

प्रश्न 7 एक व्यक्ति दौड़पथ पर दौड़ते हुए अंकित करता है कि उससे दो झंडा चौकियों की दूरियों का योग सदैव 10 मीटर रहता है। और झंडा चौकियों के बीच की दूरी 8 मीटर है। व्यक्ति द्वारा बनाए पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

उत्तर-



F_1, F_2 दो झंडा चौकियाँ है। वह व्यक्ति पथ LPM पर दौड़ रहा है। दिया है कि

$PF_1 + PF_2 = 10$

और $F_1F_2 = 8$

स्पष्ट है कि P का बिन्दुपथ एक दीर्घवृत्त है।

$PF_1 + PF_2 = 10 = 2a$

$\therefore a = 5$

$F_1F_2 = 8 = 2c$

$\therefore c = 4$

$c^2 = a^2 - b^2$

या $16 = 25 - b^2$

$\therefore b^2 = 9$

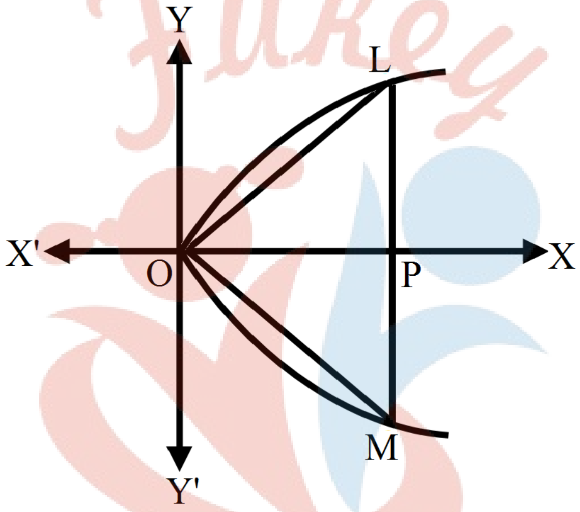
दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

अर्थात् $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

प्रश्न 8 परवलय $y^2 = 4ax$ के अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज है जिसका एक शीर्ष परवलय का शीर्ष है। त्रिभुज की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



परवलय $y^2 = 4ax$, एक समबाहु त्रिभुज बनाई गई है।

मान लीजिए इसकी भुजा की लंबाई P है।

$\triangle OPL$ में, $OL^2 = OP^2 + LP^2$

$$P^2 = OP^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\therefore OP^2 = P^2 - \frac{p^2}{4} = \frac{3}{4}P$$

$\therefore$ L के निर्देशांक $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{P}{2}\right)$ है।

यह परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित है।

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com

$$\therefore \left(\frac{P}{2}\right)^2 = 4a.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}p\right)$$

या $\frac{p^2}{4} = 4a.\frac{\sqrt{3}}{2}P$

$$P = 8\sqrt{3}a$$

अतः समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई $8\sqrt{3}a$ है।

Fukey Future's Key
Fukey Education

Website - www.fukeyeducation.com, Email :- fukeyeducation@gmail.com