

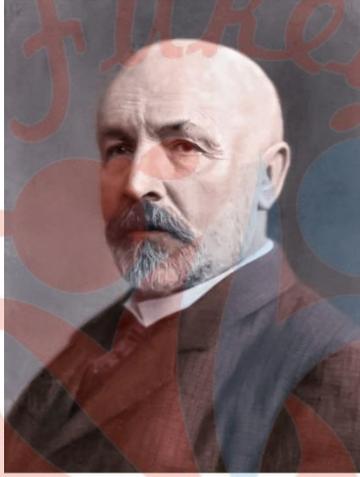
गणित

अध्याय- 1: समुच्चय



भूमिका (Introduction)

समुच्चय सिद्धांत के जनक जर्मन गणितज्ञ जार्ज केन्टर (Georg Cantor) माने जाते हैं। जीवन में प्रतिदिन हम विशेष प्रकार के समूह, झुण्ड, टीम आदि की चर्चा करते हैं। गणित में भी यह विद्यमान है।



3 मार्च 1845 - 6 जनवरी 1918

3 मार्च 1845-6 जनवरी 1918 जार्ज केन्टर का त्रिकोणमिति श्रेणी के अध्ययन के दौरान समुच्चय से सर्वप्रथम परिचय हुआ। समुच्चय की संकल्पना गणित की सभी शाखाओं में आधारभूत है। संबंधों एवं फलनों, अनुक्रमों, ज्यामिति, प्रायिकता सिद्धांत इत्यादि में इसका महत्व प्रतिपादित हो चुका है।

समुच्चय (Sets)

निम्न समूहों के बारे में विचार करें

- (i) अंग्रेजी वर्णमाला के स्वर (vowels) अर्थात् a, e, i, o, u
- (ii) 10 से कम विषम प्राकृत संख्याएँ अर्थात् 1, 3, 5, 7, 9
- (iii) भारत के प्रदेशों (states) के नाम

(iv) भारत की नदियाँ।

उपर्युक्त समूहों में प्रत्येक समूह सुपरिभाषित वस्तुओं का संग्रह है। यहाँ हम प्रमाण के साथ कह सकते हैं कि दी हुई वस्तु उस समूह का सदस्य है अथवा नहीं।

अब उन समूहों के बारे में विचार करते हैं जिसके सदस्य स्पष्ट अथवा प्रमाण पूर्वक अपनी सदस्यता परिभाषित नहीं कर पाते। जैसे-

- (i) विश्व की सुन्दर लड़कियों का समूह
- (ii) बॉलीवुड की लोकप्रिय फिल्मों
- (iii) किसी कक्षा के मेधावी छात्रों का समूह।

उपर्युक्त उदाहरणों में प्रत्येक व्यक्ति का अभिमत भिन्नभिन्न हो सकता है। यह किसी मानक परिणाम पर आधारित नहीं है। दूसरे शब्दों में उपर्युक्त कथन सुपरिभाषित नहीं हैं।

इस प्रकार समुच्चय विशेष गुण वाली वस्तुओं का सुपरिभाषित समूह है।

समुच्चयों का निरूपण (Representation of Sets)

(i) प्रायः समुच्चयों को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों A, B, C, X, Y, z इत्यादि से निरूपित किया जाता है।

(ii) समुच्चय के सदस्यों को अवयव कहते हैं। इन्हें अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों से प्रदर्शित किया जाता है। जैसे-a, b, c, x, y, z आदि।

यदि x समुच्चय A का सदस्य अथवा अवयव है तो हम कहते हैं कि 'x समुच्चय A में है'। (x belongs to A) वाक्यांश सदस्य है या अवयव है को ग्रीक अक्षर ϵ से निरूपित करते हैं इसे $x \epsilon A$ लिखते हैं।

समुच्चय को निरूपित करने की दो विधियाँ हैं-

- (a) रोस्टर (Roster) या सारणी रूप (Tabular form)
- (b) समुच्चय निर्माण रूप (Set builder form)

(a) रोस्टर रूप में समुच्चय के सभी अवयवों को सूचीबद्ध किया जाता है। अवयवों को अर्द्धविराम (comma) से पृथक् किया जाता है तथा इन्हें सर्पाकार कोष्ठक { } में रखते हैं।

(i) 7 से छोटी सम संख्याओं का समुच्चय $A = \{2, 4, 6\}$

(ii) SCHOOL शब्द में प्रयुक्त अक्षरों का समुच्चय $A = \{S, C, H, O, L\}$

उपर्युक्त उदाहरण में ध्यान दें

समुच्चय को रोस्टर के रूप में लिखते समय किसी अवयव को सामान्यतः दोबारा नहीं लिखते हैं, अर्थात् प्रत्येक अवयव दूसरे से भिन्न होता है।

(b) समुच्चय निर्माण रूप में किसी समुच्चय के सभी अवयवों का समान गुणधर्म होता है जो समुच्चय से बाहर के अवयवों में नहीं होता है। यदि $A = \{a, e, i, o, u\}$ पर विचार करें तो इसे निर्माण रूप में इस प्रकार लिखते हैं-

$A = \{x : x \in \text{अंग्रेजी वर्णमाला के स्वर}\}$

समुच्चय के अवयवों के लिये चर x का प्रयोग किया गया है। कोलन चिन्ह : के बाद अवयवों का गुणधर्म लिखते हैं। चिन्ह \in शामिल है प्रदर्शित करता है।

अब इसे इस तरह पढ़ेंगे-

A समुच्चय है x का, जहाँ x अंग्रेजी वर्णमाला के स्वर को शामिल करता है।

उदाहरण 1. निम्नलिखित में कौन-से समुच्चय हैं ? अपने उत्तर का औचित्य बताइए-

(i) वर्ष के उन सभी महीनों का संग्रह जो F से प्रारंभ होते हैं।

(ii) J अक्षर से प्रारंभ होने वाले वर्ष के सभी महीनों का संग्रह।

हल : (i) माना $A =$ वर्ष के उन सभी महीनों का संग्रह है जो F से प्रारंभ होते हैं

$A = \{\text{फरवरी}\}$

स्पष्ट है A स्पष्ट रूप से पारिभाषित वस्तुओं का संग्रह है इसलिए A समुच्चय है।

(ii) माना $A =$ वर्ष के उन सभी महीनों का संग्रह है जो J से प्रारंभ होते हैं

$A = \{\text{जनवरी, जून, जुलाई}\}$

स्पष्ट है A स्पष्ट रूप से पारिभाषित वस्तुओं का संग्रह है इसलिए A समुच्चय है।

उदाहरण 2. निम्नलिखित में कौन-सा समुच्चय है ? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

- (i) संसार के सर्वश्रेष्ठ ग्यारह बल्लेबाजों का संग्रह।
- (ii) विश्व के सबसे अधिक खतरनाक जानवरों का संग्रह।

उत्तर- (i) संसार के सर्वश्रेष्ठ ग्यारह बल्लेबाजों का संग्रह. स्पष्ट रूप से पारिभाषित नहीं है, अतः यह समुच्चय नहीं है।

(ii) विश्व के सबसे अधिक खतरनाक जानवरों का संग्रह स्पष्ट रूप से पारिभाषित नहीं है, अतः यह समुच्चय नहीं है।

समुच्चय के प्रकार (Types of Sets)

एकल समुच्चय (Singleton or Unit or One-point Set):

वह समुच्चय जिसमें केवल एक ही अवयव हो, एकल समुच्चय कहलाता है। उदाहरणार्थ -

- (a) {0}, {3}, {a};
- (b) भारत की महिला प्रधानमंत्रियों का समुच्चय;
- (c) {x : x एक विषम संख्या है तथा x - 3 = 0};
- (d) एक समतल में दो सरल रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं का समुच्चय।

रिक्त समुच्चय (Empty Set)

जिस समुच्चय में एक भी अवयव नहीं होता है या जिसका कोई सदस्य नहीं होता है, उसे रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय कहते हैं। रिक्त समुच्चय को प्रतीक ϕ (फाई) से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण 1. कक्षा दसवीं तथा ग्यारहवीं दोनों कक्षाओं में अध्ययनरत विद्यार्थियों का समुच्चय

$$B = \phi$$

उदाहरण 2. (a) A = {x : x² = 4, x एक विषम संख्या है};

- (b) $B = \{x : x^2 + 4 = 0, x \text{ एक वास्तविक संख्या है}\};$
 - (c) $C = \{x : x \text{ विश्व में 300 वर्ष से अधिक उम्र का मनुष्य है}\};$
 - (d) $D = \{x : x \neq x\};$
 - (e) $E = \text{दो विभिन्न त्रिज्या वाले संकेन्द्रीय वृत्तों के प्रतिच्छेदन बिन्दुओं का समुच्चय।}$
- टिप्पणी- ϕ और $\{0\}$ समुच्चयों में अन्तर है। समुच्चय में कोई सदस्य नहीं है जबकि समुच्चय $\{0\}$ का एक सदस्य 0 है। ϕ रिक्त समुच्चय है जबकि $\{0\}$ एकल समुच्चय है।

सान्त या परिमित समुच्चय (Finite Set)

वह समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या सीमित हो, सान्त या परिमित समुच्चय कहलाता है। जैसे-

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

$$C = \{x : x \text{ लोकसभा का मन्त्री है}\}$$

ये सभी परिमित समुच्चय के उदाहरण हैं।

टिप्पणी- ϕ एक परिमित समुच्चय है। इसके अवयवों की संख्या 0 है, जो एक निश्चित संख्या है।

अपरिमित या अनन्त समुच्चय (Infinite Set)

वह समुच्चय जिसके अवयवों की संख्या अनन्त हो, अपरिमित या अनन्त समुच्चय कहलाता है। उदाहरणार्थ - आकाश में तारों का समुच्चय,

$$A = \{x : x \text{ समतल में स्थित बिन्दु है}\}$$

$$B = \{x : x \text{ एक सम संख्या है}\}$$

आदि, अनन्त समुच्चय हैं।

समान और तुल्य समुच्चय (Equal and Equivalent Set)

दो दिये गये समुच्चयों A और B में यदि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव है और B का प्रत्येक अवयव A का भी अवयव है तो समुच्चय A और B समान समुच्चय कहलाते हैं।

$$\text{माना } A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

$$B = \{3, 5, 9, 7, 1\}$$

तो . A = B

परिमित समुच्चय A और B तुल्य कहे जाते हैं यदि उनमें अवयवों की संख्या समान हो,

$$\text{यदि } A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$n(A) = 5$ तथा $n(B) = 5$ तो A और B तुल्य समुच्चय हैं।

सभी समान समुच्चय तुल्य समुच्चय होते हैं किन्तु सभी तुल्य समुच्चय समान समुच्चय नहीं होते।

सम समुच्चय के उदाहरण

(a) यदि $A = \{2, 3\}$ तथा $B = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$, तो $A = B$.

(b) यदि $A = \{a, e, i, o, u\}$ तथा $B = \{x : x \text{ अंग्रेजी वर्णमाला का स्वर है } \}$, तो $A = B$.

उदाहरण 1. निम्न में से कौन-सा रिक्त समुच्चय है?

(i) 2 से भाज्य संख्याओं का समुच्चय।

(ii) $P = \{x : 1 < x < 2, x \text{ एक प्राकृत संख्या है}\}$

हल : (i) 2 से भाज्य संख्याएँ अपरिमित हैं। (अतः यह रिक्त समुच्चय नहीं है)

(ii) $P = \{x : 1 < x < 2, x \text{ एक प्राकृत संख्या है}\}$ 1 और 2 के बीच कोई भी प्राकृत संख्या नहीं है।

∴ यह रिक्त समुच्चय है।

उपसमुच्चय (Subset)

यदि दो समुच्चय A और B इस प्रकार हों कि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव हो, तो हम समुच्चय A को समुच्चय B का उपसमुच्चय कहते हैं। प्रतीकात्मक रूप में इसे निम्न प्रकार से लिखा जाता है-

$$A \subseteq B$$

$$\text{जहाँ } A \subseteq B \Leftrightarrow \{x \in A \Rightarrow x \in B\}.$$

यहाँ B, A का अधिसमुच्चय (super set) कहलाता है।

उदाहरण - यदि $A = \{1, 2, 3\}$ तथा $B = \{1, 2, 3, 4\}$, तो

(a) $A \subseteq B$ क्योंकि A का प्रत्येक अवयव B का अवयव है

तथा (b) $B \not\subseteq A$ क्योंकि B का प्रत्येक अवयव A का अवयव नहीं है।

वास्तविक अथवा उचित उपसमुच्चय (Proper Subset)

यदि दो समुच्चय A और B इस प्रकार हैं कि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव है किन्तु B का कम-से-कम एक अवयव ऐसा है जो A का अवयव नहीं है तो समुच्चय A, समुच्चय B का उचित उपसमुच्चय कहलाता है। इस तथ्य को सांकेतिक रूप में $A \subset B$ से व्यक्त करते हैं। इसे "A उचित उपसमुच्चय B" पढ़ते हैं। इस प्रकार,

$$A \subset B \Rightarrow A \subseteq B \text{ तथा } A \neq B$$

उचित उपसमुच्चय के उदाहरण -

(a) यदि $A = \{1, 2, 3\}$ तथा $B = \{1, 2, 3, 4\}$, तो $A \subset B$

(b) सम संख्याओं का समुच्चय, पूर्णाकों के समुच्चय का उचित उपसमुच्चय है।

टिप्पणी - स्पष्ट है कि यदि $A = B$, तो $A \subseteq B$ तथा $B \subseteq A$.

अतः A और B को सम दिखाने के लिए $A \subseteq B$ तथा $B \subseteq A$ दोनों तथ्य सिद्ध करने होंगे।

उदाहरण - (i) किसी शाला के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय S से तथा उस शाला के कक्षा 11वीं के विद्यार्थियों का समुच्चय T से प्रदर्शित हो तब T का प्रत्येक अवयव का भी अवयव है अतः T, S का उपसमुच्चय है।

(ii) यदि $A = \{1, 3, 5\}$ $B = \{x : x \text{ 6 से छोटी विषम प्राकृत संख्या है}\}$ तो

(a) $A \subseteq B$

(b) $B \subseteq A$

(c) $A = B$.

(iii) $A = \{a, e, i, o, u\}$ $B = \{a, b, c, d\}$ तो A, B का उपसमुच्चय नहीं है। $A \not\subseteq B$.

(iv) परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q , वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R का उपसमुच्चय है।

यदि दो समुच्चय A तथा B इस प्रकार हैं कि $A \subseteq B$ किन्तु $A \neq B$ तो समुच्चय A को समुच्चय B का उचित उपसमुच्चय (Proper Subset) कहते हैं तथा इसे $A \subset B$ लिखते हैं।

यदि $A = \{3\}$

$B = \{1, 3, 5\}$

तो $A \subset B$

समुच्चय B , समुच्चय A का अधि समुच्चय हैं।

सार्वत्रिक अथवा समष्टीय समुच्चय (Universal Set)

कभी-कभी सभी विचाराधीन समुच्चय किसी एक ही समुच्चय के उपसमुच्चय होते हैं, जिसे समष्टीय समुच्चय कहते हैं। इसे संकेताक्षर U से प्रकट करते हैं। उदाहरणार्थ,

$A = \{a, e, i, o, u\}$

$B = \{a, c, d, g\}$

तथा $C = \{x, y, z\}$ के लिए अंग्रजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों (small letters) का समुच्चय समष्टीय समुच्चय है।

समुच्चयों का समुच्चय (Set of Sets)

वह समुच्चय जिसके अवयव स्वयं कोई समुच्चय हो, समुच्चयों का समुच्चय कहलाता है। जैसे-

$A = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 3, 4\}\}$ समुच्चयों का समुच्चय है।

घात समुच्चय (Power Set)

किसी समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को समुच्चय A का घात समुच्चय कहा जाता है। इसे प्रतीक $P(A)$ से निरूपित करते हैं। अतः

$$P(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

उदाहरण 1. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो, तो $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$

उदाहरण 2. यदि $A = \{0, \{1, 2\}\}$ हो, तो $P(A) = \{\phi, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, \{1, 2\}\}\}.$

टिप्पणी – n अवयवों वाले समुच्चय के घात समुच्चय में अवयवों की संख्या 2^n होती है।

प्रमेय (Theorem)

1. रिक्त समुच्चय प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है।

उपपत्ति - मान लीजिए कि A कोई समुच्चय है तथा ϕ एक रिक्त समुच्चय है। स्पष्ट है कि ϕ में ऐसा कोई अवयव नहीं है जो A का अवयव न हो। अतः ϕ , समुच्चय A का उपसमुच्चय हुआ।

प्रमेय (Theorem)

2. प्रत्येक समुच्चय स्वयंका उपसमुच्चय होता है।

प्रमेय (Theorem) 3. यदि $A \subseteq B, B \subseteq A$ तो $A = B$.

उपपत्ति - दिया है, $A \subseteq B$

$$\text{अतः } x \in A \Rightarrow x \in B \dots\dots(1)$$

पुनः $B \subseteq A$

$$\text{अतः } x \in B \Rightarrow x \in A \dots\dots(2)$$

अतः समी. (1) तथा (2) से,

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

अर्थात् $A = B$

टिप्पणी - उपसमुच्चयों की संख्या - यदि किसी समुच्चय में अवयवों की संख्या n हो, तो इस समुच्चय के कुल संभव उपसमुच्चयों की संख्या 2^n होती है।

नोट- (i) रिक्त समुच्चय प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है।

(ii) प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है।

(iii) यदि किसी समुच्चय में अवयवों की संख्या n हो, तो समुच्चय के कुल संभव उपसमुच्चयों की संख्या 2^n होती है।

समुच्चय के सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय घात समुच्चय (Power set) कहलाता है।

उदाहरण - $A = \{1, 2\}$ के उपसमुच्चय $\{\phi\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ को $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ से प्रदर्शित करें तो $n\{P(A)\} = 2^2 = 4$.

अंतराल R के उपसमुच्चय के रूप में (Interval as Subsets of R)

माना $a < b$ तथा $a, b \in R$ तब वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\{x : a < x < b\}$ एक विवृत्त अंतराल कहलाता है इसे (a, b) द्वारा निरूपित करते हैं। a और b के बीच स्थित सभी बिन्दु इस अन्तराल में होते हैं परन्तु a और b स्वयं इस अंतराल में स्थित नहीं होते हैं।

जिस अन्तराल में अंत्य बिन्दु भी शामिल होते हैं संवृत्त (बंद) अंतराल कहलाता है और प्रतीक $[a, b]$ द्वारा निरूपित होता है।

इस प्रकार $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$

ऐसे भी अंतराल होते हैं जो एक अंत्य बिन्दु पर बंद और दूसरे पर खुले होते हैं।

इस प्रकार $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ a से b तक खुला अंतराल है जिसमें a शामिल है किन्तु b शामिल नहीं है।

$[a, b) = \{x : a < x \leq b\}$ a से b तक खुला अंतराल है जिसमें b सम्मिलित है किन्तु a शामिल नहीं है।

इन संकेतों द्वारा वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के उपसमुच्चयों के उल्लेख करने की एक विधि मिलती है।

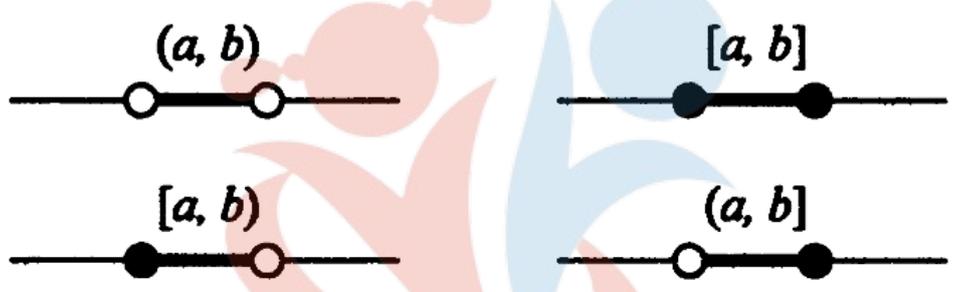
जैसे यदि $A = (5, 9)$ तथा $B = (3, 11)$ तब स्पष्ट है कि

$$A \subset B$$

$(0, \infty)$ ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को प्रदर्शित करता है तथा $(-\infty, 0)$ ऋण वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को निरूपित करता है।

$(-\infty, \infty)$ वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को प्रदर्शित करता है।

वास्तविक रेखा R पर R के उपसमुच्चयों के रूप में वर्णित उपर्युक्त अंतरालों को निम्न आकृति में दर्शाया गया है-



उदाहरण 1. सिद्ध कीजिए कि $n\{P[P(P(\phi))]\} = 4$.

हल : $P(\phi) = \{\phi\}$

$\therefore P(P(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$

$\Rightarrow P[P(P(\phi))] = [\{\phi, \{\phi\}\}, \{\{\phi\}\}, \{\{\phi\}\}\}$

अतः $n\{P[P(P(\phi))]\} = 4$.

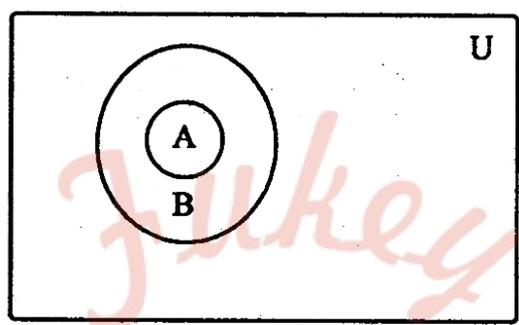
उदाहरण 2. मान लीजिए A, B और C तीन समुच्चय हैं यदि $A \in B$ तथा $B \subset C$ तो क्या यह सत्य है कि $A \subset C$? यदि नहीं तो एक उदाहरण दीजिए।

हल: माना $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$, $C = \{\{1\}, 2, 3\}$.

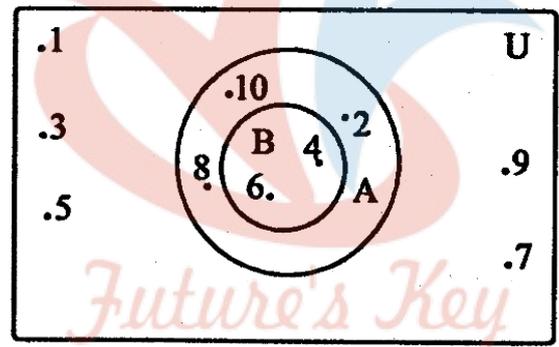
$A \in B$ क्योंकि $A = \{1\}$ तथा $B \subset C$ सत्य है किन्तु $A \not\subset C$ क्योंकि $1 \in A$ और $1 \notin C$.

वेन आरेख (Venn Diagrams)

समुच्चयों के बीच स्थापित संबंधों को आरेखों द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। समतल में परिबद्ध क्षेत्र के रूप में समुच्चयों को प्रदर्शित करने वाली आकृतियाँ ब्रिटिश तर्कशास्त्री जॉन वेन (John Venn) (1834-1883) की स्मृति में वेन आरेख कहलाती हैं। ___ सार्वत्रिक समुच्चय U को आयत के अन्तः क्षेत्र द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। अन्य समुच्चयों को वृत्तों या बन्द वक्रों के अन्तः क्षेत्र से प्रदर्शित किया जाता है।



यदि सार्वत्रिक समुच्चय $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. जिसमें $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{4, 6\}$ स्पष्ट है कि $A \subseteq B$ तब निम्न वेन आरेख होगा-



समुच्चयों का सम्मिलन या संघ (Union of Sets)

माना A और B दो समुच्चय हैं। A और B का सम्मिलन या संघ वह समुच्चय है जिसमें A के सभी अवयव तथा B के सभी अवयव शामिल हैं। उभयनिष्ठ अवयवों अर्थात् जो दोनों समुच्चयों में शामिल हैं उन्हें केवल एक बार लिया गया है।

संकेत के रूप में इसे $A \cup B$ से प्रकट करते हैं तथा A संघ B या A यूनियन B पढ़ते हैं।

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ या } x \in B\}$$

उदाहरण 1. यदि $A = \{1, 3, 5, 7\}$

$$B = \{5, 7, 9, 11\}$$

तो $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

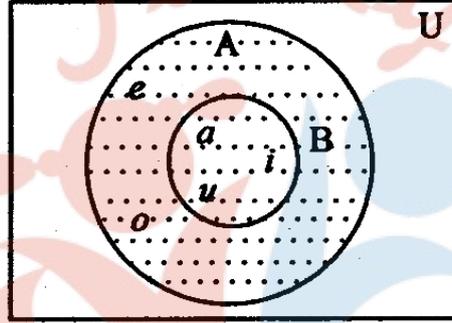
ध्यान दें कि उभयनिष्ठ अवयवों 5, 7 को केवल एक बार लिया गया है।

उदाहरण 2. यदि $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, i, u\}$ को दिखाइए $A \cup B = A$

$A = \{a, e, i, o, u\}$

$B = \{a, i, u\}$

$A \cup B = \{a, e, i, o, u\} = A$ इससे यह तथ्य प्रकट होता है कि समुच्चय A और उसके उपसमुच्चय B का संघ स्वयं समुच्चय A है। वेन आरेख द्वारा $A \cup B$ का प्रदर्शन-



समुच्चयों के सम्मिलन के नियम (Laws of Union of Sets)

यदि A, B, C दिये हुए समुच्चय हों तो इनके सम्मिलन (union) निम्न नियमों का पालन करते हैं:

(i) वर्गसम नियम (Idempotent Law): $A \cup B = A$.

(ii) क्रमविनिमेय नियम (Commutative Law): $A \cup B = B \cup A$

(iii) साहचर्य नियम (Associative Law): $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(iv) तत्समक नियम (Identity Law): (a) $A \cup \phi = A$, (b) $A \cup U = U$.

जहाँ U समष्टीय समुच्चय और ϕ रिक्त समुच्चय है।

(i) वर्गसम नियम (Idempotent Law):

सिद्ध करना है कि-

$$A \cup B = A$$

उपपत्ति-मान लीजिए कि $A \cup A$ का एक अवयव x है।

$$\begin{aligned} \text{तब, } & x \in A \cup A \\ \Rightarrow & x \in A \text{ या } x \in A \\ \Rightarrow & x \in A \\ \therefore & A \cup A \subseteq A \quad \dots(1) \end{aligned}$$

पुनः मान लीजिए A का एक अवयव x है। तब,

$$\begin{aligned} & x \in A \Rightarrow x \in A \text{ या } x \in A \\ \Rightarrow & x \in A \cup A \\ \therefore & A \subseteq A \cup A \quad \dots(2) \end{aligned}$$

अतः समी. (1) व (2) से;

$$A \cup B = A$$

(ii) क्रमविनिमेय नियम (Commutative Law):

सिद्ध करना है कि-

$$A \cup B = B \cup A.$$

उपपत्ति - मान लीजिए कि $A \cup B$ का एक अवयव x है।

$$\begin{aligned} \text{तब, } & x \in A \cup B \\ \Rightarrow & x \in A \text{ या } x \in B \\ \Rightarrow & x \in B \text{ या } x \in A \\ \Rightarrow & x \in B \cup A \\ \therefore & A \cup B \subseteq B \cup A \quad \dots(1) \end{aligned}$$

पुनः मान लीजिए $B \cup A$ का एक अवयव x है। तब,

$$x \in B \cup A$$

$$\Rightarrow x \in B \text{ या } x \in A$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ या } x \in B$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B$$

$$\therefore B \cup A \subseteq A \cup B \quad \dots(2)$$

अतः समी. (1) व (2) से,

$$A \cup B = B \cup A.$$

(iii) साहचर्य नियम (Associative Law):

सिद्ध करना है कि-

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

उपपत्ति - मान लीजिए कि $(A \cup B) \cup C$ का एक अवयव x है।

$$\text{तब, } x \in (A \cup B) \cup C$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \text{ या } x \in C$$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ या } x \in B) \text{ या } x \in C$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ या } (x \in B \text{ या } x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ या } x \in (B \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C) \quad \dots(1)$$

पुनः मान लीजिए $A \cup (B \cup C)$ का एक अवयव x है।

- तब, $x \in A \cup (B \cup C)$
- $\Rightarrow x \in A$ या $x \in (B \cup C)$
- $\Rightarrow x \in A$ या $\{x \in B$ या $x \in C\}$
- $\Rightarrow \{x \in A$ या $x \in B\}$ या $x \in C$
- $\Rightarrow x \in (A \cup B)$ या $x \in C$
- $\Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$
- $\Rightarrow A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C \dots(2)$

अतः समी. (1) व (2) से,

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

(iv) तत्समक नियम (Identity Law):

सिद्ध करना है कि-

(a) $A \cup \phi = A.$

उपपत्ति - मान लिया कि (a) $x \in A \cup \phi$ तब,

$$x \in A \cup \phi \Rightarrow x \in A \text{ या } x \in \phi$$

$$\Rightarrow x \in A, \text{ [क्योंकि रिक्त समुच्चय की परिभाषा से } x \in \phi]$$

$$\therefore A \cup \phi \subseteq A. \dots(1)$$

$$\text{किन्तु स्पष्टतः } A \subseteq A \cup \phi, \text{ [प्रमेय 1 से]} \dots(2)$$

अतः समी. (1) और (2) से,

$$A \cup \phi = A.$$

(b) $A \cup U = U.$

उपपत्ति- परिभाषा से,

$$A \cup U \subseteq U \dots(1)$$

पुनः चूँकि U, प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय है।

$$\therefore U \subseteq A \cup U \dots(2)$$

अतः समी. (1) व (2) से,

$$A \cup U = U.$$

उदाहरण 1. यदि $A = \{ 1, 3, 5\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$, $C = \{7, 8, 9\}$ हो, तो दिखाइए कि-

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

हल : $A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{5, 6, 7, 8\}$

$$\Rightarrow A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\} \cup \{7, 8, 9\}$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cup C = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\} \dots(1)$$

$$B \cup C = \{5, 6, 7, 8\} \cup \{7, 8, 9\}$$

$$\Rightarrow B \cup C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\Rightarrow A \cup (B \cup C) = \{1, 3, 5\} \cup \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\Rightarrow A \cup (B \cup C) = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\} \dots(2)$$

समी. (1) और (2) से,

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of Sets)

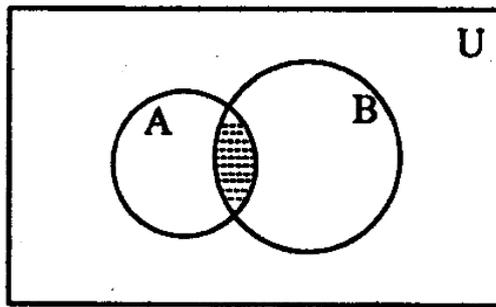
समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हैं।

संकेत के रूप में इसे $A \cap B$ से प्रकट करते हैं।

$$A \cap B = \{x : x \in \text{तथा } A \text{ x } \in B\}$$

$A \cap B$ को A सर्वनिष्ठ B पढ़ते हैं।

वेन आरेख से प्रदर्शन-



उदाहरण - यदि $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{6, 8, 10, 12\}$ तो $A \cap B = \{6, 8\}$.

असंयुक्त या विसंघीत समुच्चय (Disjoint Sets)

यदि दो समुच्चयों A और B का कोई भी अवयव उभयनिष्ठ न हो, तो समुच्चय A और B असंयुक्त या विसंघीत या परस्पर अपवर्जी (mutually exclusive) समुच्चय कहलाते हैं। अतः यदि A और B दो असंयुक्त समुच्चय हों, तो

$$A \cap B = \phi.$$

उदाहरण : यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$ तो $A \cap B = \{\}$ या ϕ

अतः A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।

समुच्चयों के प्रतिच्छेद के नियम (Laws of Intersection of Sets)

यदि A, B, C तीन समुच्चय हों, तो इनके प्रतिच्छेद निम्न नियमों का पालन करते हैं

(i) वर्गसम नियम (Idempotent Law):

$$A \cap A = A.$$

(ii) क्रमविनिमेय नियम (Commutative Law):

$$A \cap B = B \cap A.$$

(iii) साहचर्य नियम (Associative Law):

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(iv) तत्समक नियम (Identity Law):

- (a) $A \cap U = A,$
- (b) $A \cap \phi = \phi.$

(v) वितरण अथवा बंटन नियम (Distributive Law):

(a) समुच्चयों का प्रतिच्छेद, समुच्चयों के सम्मिलन पर बंटनीय है, अर्थात्

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(b) समुच्चयों का सम्मिलन, समुच्चयों के प्रतिच्छेद पर बंटनीय है, अर्थात्

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(i) वर्गसम नियम (Idempotent Law):

सिद्ध करना है कि-

$$A \cap A = A.$$

उपपत्ति-मान लीजिए कि $A \cap A = A$ का अवयव x है।

$$\begin{aligned} & x \in A \cap A \\ \Rightarrow & x \in A \text{ और } x \in A, \text{ [परिभाषा से]} \\ \Rightarrow & x \in A \\ \therefore & A \cap A \subseteq A \quad \dots(1) \end{aligned}$$

पुनः मान लीजिए कि A का एक अवयव x है।

$$\begin{aligned} & x \in A \text{ और } x \in A \\ \Rightarrow & x \in A \cap A \\ \therefore & A \subseteq A \cap A \quad \dots(2) \end{aligned}$$

अतः समी. (1) व (2) से,

$$A \cap A = A.$$

(ii) क्रमविनिमेय नियम (Commutative Law):

सिद्ध करना है कि-

$$A \cap B = B \cap A.$$

उपपत्ति-मान लीजिए कि $A \cap B$ का एक अवयव x है।

$$\begin{aligned} \text{तब, } & x \in A \cap B \\ \Rightarrow & x \in A \text{ और } x \in B \\ \Rightarrow & x \in B \text{ और } x \in A \\ \Rightarrow & x \in B \cap A \\ \therefore & A \cap B \subseteq B \cap A \quad \dots(1) \end{aligned}$$

पुनः मान लीजिए कि $B \cap A$ का एक अवयव x है।

$$\begin{aligned} \text{तब, } & x \in B \cap A \\ \Rightarrow & x \in B \text{ और } x \in A \\ \Rightarrow & x \in A \text{ और } x \in B \\ \Rightarrow & x \in A \cap B \\ \therefore & B \cap A \subseteq A \cap B \quad \dots(2) \end{aligned}$$

अतः समी. (1) व (2) से,

$$A \cap B = B \cap A.$$

(iii) साहचर्य नियम (Associative Law):

सिद्ध करना है कि-

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

उपपत्ति-मान लीजिए कि $(A \cap B) \cap C$ का एक अवयव x है।

$$\begin{aligned}
 &\text{तब, } x \in (A \cap B) \cap C \\
 &\Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ और } x \in C \\
 &\Rightarrow (x \in A \text{ और } x \in B) \text{ और } x \in C \\
 &\Rightarrow x \in A \text{ और } (x \in B \text{ और } x \in C) \\
 &\Rightarrow x \in A \text{ और } (x \in B \cap C) \\
 &\Rightarrow x \in A \cap (B \cap C) \\
 &\therefore (A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C) \dots(1)
 \end{aligned}$$

पुनः मान लीजिए कि $A \cap (B \cap C)$ का एक अवयव x है।

$$\begin{aligned}
 &\text{तब, } x \in A \cap (B \cap C) \\
 &\Rightarrow x \in A \text{ और } x \in (B \cap C) \\
 &\Rightarrow x \in A \text{ और } (x \in B \text{ और } x \in C) \\
 &\Rightarrow (x \in A \text{ और } x \in B) \text{ और } x \in C \\
 &\Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ और } x \in C \\
 &\Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C \\
 &\therefore A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C \dots(2)
 \end{aligned}$$

अतः समी. (1) व (2) से,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(iv) तत्समक नियम (Identity Law):

सिद्ध करना है कि-

$$(a) A \cap U = A$$

$$(b) A \cap \phi = \phi$$

उपपत्ति - (a) मान लीजिए कि $A \cap U$ का एक अवयव x है।

$$\begin{aligned}
 &\text{तब, } x \in A \cap U \\
 &\Rightarrow x \in A \text{ और } x \in U \\
 &\Rightarrow x \in A, \quad [:\because A \subset U] \\
 &\therefore A \cap U \subseteq A \quad \dots(1)
 \end{aligned}$$

पुनः मान लीजिए कि $x \in A$

$$\begin{aligned}
 &\text{तब, } x \in A \\
 &\Rightarrow x \in A \text{ और } x \in U, [:\because A \subset U] \\
 &\Rightarrow x \in A \cap U \\
 &\therefore A \subseteq A \cap U \quad \dots(2)
 \end{aligned}$$

अतः समी. (1) व (2) से,

$$A \cap U = A$$

जहाँ U , प्रतिच्छेद का तत्समक कहलाता है।

$$(b) \text{ परिभाषा से, } A \cap \phi \subseteq \phi \dots(1)$$

पुनः चूँकि, प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय है।

$$\therefore \phi \subseteq A \cap \phi \dots(2)$$

अतः समी. (1) व (2) से,

$$A \cap \phi = \phi$$

(v) वितरण नियम अथवा बंटन नियम (Distributive Law):

सिद्ध करना है कि

(a) समुच्चयों का प्रतिच्छेद, समुच्चयों के सम्मिलन पर बंटनीय है (Intersection of sets is distributive over the union of sets) अर्थात्

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

उपपत्ति-मान लीजिए कि $A \cap (B \cup C)$ का एक अवयव x है। तब,

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ और } x \in (B \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ और } (x \in B \text{ या } x \in C)$$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ और } x \in B) \text{ या } (x \in A \text{ और } x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ या } x \in (A \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\therefore A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \dots(1)$$

पुनः मान लीजिए कि $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ का एक अवयव x है। तब,

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ या } x \in (A \cap C)$$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ और } x \in B) \text{ या } (x \in A \text{ और } x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ और } (x \in B \text{ या } x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ और } x \in (B \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\therefore (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \dots(2)$$

अतः समी. (1) व (2) से,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(b) समुच्चयों का सम्मिलन, समुच्चयों के प्रतिच्छेद पर बंटनीय है (Union of sets is distributive over the intersection of sets) अर्थात्

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

उपपत्ति-मान लीजिए कि $A \cup (B \cap C)$ का एक अवयव x है। तब,

$$x \in A \cup (B \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ या } x \in (B \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ या } (x \in B \text{ और } x \in C)$$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ या } x \in B) \text{ और } (x \in A \text{ या } x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \text{ और } x \in (A \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\therefore A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C) \dots (1)$$

पुनः मान लीजिए कि $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ का एक अवयव x है। तब,

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \text{ और } x \in (A \cup C)$$

$$\Rightarrow (x \in A \text{ या } x \in B) \text{ और } (x \in A \text{ या } x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ या } (x \in B \text{ और } x \in C)$$

$$\Rightarrow x \in A \text{ या } x \in (B \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$$

$$\therefore (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C) \dots (2)$$

अतः समी. (1) व (2) से,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

उदाहरण 1. यदि $A = \{2, 3, 4, 8, 10\}$, $B = \{3, 4, 5, 10, 12\}$ और $C = \{4, 5, 6, 7, 12, 14\}$ हो, तो $A \cup (B \cap C)$ तथा $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $A = \{2, 3, 4, 8, 10\}$
 $B = \{3, 4, 5, 10, 12\}$
 तथा $C = \{4, 5, 6, 7, 12, 14\}$
 $\therefore B \cap C = \{4, 5, 12\}$
 $A \cap B = \{3, 4, 10\}$
 और $A \cap C = \{4\}$
 $\therefore A \cup (B \cap C) = \{2, 3, 4, 5, 8, 10, 12\}$.
 तथा $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3, 4, 10\}$.

समुच्चयों का अन्तर (Difference of Sets)

समुच्चयों A और B का अन्तर उन अवयवों का समुच्चय है जो A में हैं परन्तु B में नहीं। संकेत रूप में इसे A-B लिखते हैं।

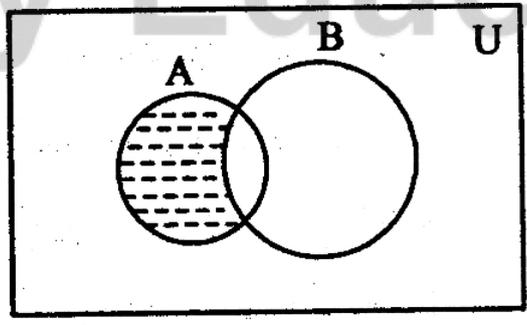
$$A - B = \{x : x \in A \text{ तथा } x \notin B\}$$

उदाहरण - $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ और

$$B = \{2, 4, 6, 8\} \text{ तो } A - B = \{1, 3, 5\}$$

$$B - A = \{8\}$$

वेन आरेख द्वारा इसे इस प्रकार प्रदर्शित करेंगे

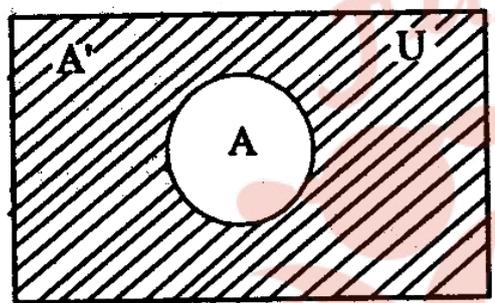


A - B

- नोट— (i) $A - B \neq B - A$
(ii) $A - B \subseteq A$
(iii) $B - A \subseteq B$
(iv) $(A - B) \cap (B - A) = \phi$.

परक समुच्चय (Complement of Sets)

यदि A एक समुच्चय है तथा U एक समष्टीय समुच्चय है तो U के उन अवयवों का समुच्चय जो A में नहीं है, A का पूरक समुच्चय कहलाता है। दूसरे शब्दों में, $U - A$, A का पूरक समुच्चय है। A के पूरक समुच्चय को A' अथवा $C(A)$ से निरूपित करते हैं। प्रतीकात्मक रूप में,



$C(A)$ या $A' = U - A = \{x : x \in U \text{ और } x \notin A\}$

टिप्पणी-परिभाषा से स्पष्ट है कि-

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| (i) $A \cup A' = U$ | (ii) $A \cap A' = \phi$ |
| (iii) $(A')' = A$ | (iv) $U' = \phi$ |
| (v) $\phi' = U$. | |

दो समुच्चयों का सममित अन्तर (Symmetric Difference of Two sets)

दो समुच्चयों A और B का सममित अन्तर वह समुच्चय है जिसमें A और B के वे सभी अवयव हों जो उनमें उभयनिष्ठ नहीं है इसे $A \Delta B$ से निरूपित करते हैं। इसे "A सममित अन्तर B" पढ़ते हैं।

प्रतीकात्मक भाषा में,

$$A \Delta B = \{x : x \in A \text{ और } x \notin B \text{ या } x \in B \text{ और } x \notin A\}$$

$$= (A - B) \cup (B - A)$$

उदाहरण— यदि, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ और

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

तो $A - B = \{1, 2, 3\}$

$$B - A = \{6, 7, 8\}$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$= \{1, 2, 3\} \cup \{6, 7, 8\}$$

$$= \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$$

इसी प्रकार, $B \Delta A = (B - A) \cup (A - B)$

$$= \{6, 7, 8\} \cup \{1, 2, 3\}$$

$$= \{6, 7, 8, 1, 2, 3\}$$

$$= \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$$

अतः $A \Delta B = B \Delta A$.

डिमॉर्गन के नियम (Demorgan's Laws)

प्रमेय - यदि A, B, C समुच्चय हों, तो

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

(iii) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(iv) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

टिप्पणी—

(i) $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \text{ या } x \in B$

(ii) $x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ और } x \notin B$

(iii) $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \text{ और } x \in B$

(iv) $x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ और } x \notin B$.

उपपत्ति-(i) मान लीजिए कि $(A \cup B)'$ का एक अवयव x है। तब,

$$\begin{aligned}
 & x \in (A \cup B)' \\
 \Rightarrow & x \notin (A \cup B) \\
 \Rightarrow & x \notin A \text{ और } x \notin B \\
 \Rightarrow & x \in A' \text{ और } x \in B' \\
 \Rightarrow & x \in A' \cap B' \\
 \therefore & (A \cup B)' \subseteq A' \cap B' \quad \dots(1)
 \end{aligned}$$

पुनः मान लीजिए कि $(A \cap B)'$ का एक अवयव x है। तब,

$$\begin{aligned}
 & x \in (A \cap B)' \\
 \Rightarrow & x \notin (A \cap B) \\
 \Rightarrow & x \notin A \text{ और } x \notin B \\
 \Rightarrow & x \in A' \text{ और } x \in B' \\
 \Rightarrow & x \in A' \cap B' \\
 \therefore & (A \cap B)' \subseteq A' \cap B' \quad \dots(2)
 \end{aligned}$$

अतः समी. (1) व (2) से,

$$(A \cup B)' = A' \cap B'.$$

(ii) मान लीजिए कि $(A \cap B)'$ का एक अवयव x है। तब,

$$\begin{aligned}
 & x \in (A \cap B)' \\
 \Rightarrow & x \notin (A \cap B) \\
 \Rightarrow & x \notin A \text{ या } x \notin B \\
 \Rightarrow & x \in A' \text{ या } x \in B' \\
 \Rightarrow & x \in A' \cup B' \\
 \therefore & (A \cap B)' \subseteq A' \cup B' \quad \dots(1)
 \end{aligned}$$

पुनः मान लीजिए कि $(A \cup B)'$ का एक अवयव x है। तब,

$$\begin{aligned}
 & x \in A' \cup B' \\
 \Rightarrow & x \in A' \text{ या } x \in B' \\
 \Rightarrow & x \notin A \text{ या } x \notin B \\
 \Rightarrow & x \notin (A \cap B) \\
 \Rightarrow & x \in (A \cap B)' \\
 \therefore & A' \cup B' \subseteq (A \cap B)' \quad \dots(2)
 \end{aligned}$$

(2) अतः समी. (1) व (2) से,

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

(iii) मान लीजिए कि $(A - B) \cap (A - C)$ का एक अवयव है। तब,

$$\begin{aligned}
 & x \in (A - B) \cap (A - C) \\
 \Rightarrow & x \in (A - B) \text{ और } x \in (A - C) \\
 \Rightarrow & (x \in A \text{ और } x \notin B) \text{ और } (x \in A \text{ और } x \notin C) \\
 \Rightarrow & x \in A \text{ और } (x \notin B \text{ और } x \notin C) \\
 \Rightarrow & x \in A \text{ और } x \notin (B \cup C) \\
 \Rightarrow & x \in A - (B \cup C) \\
 \therefore & (A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C) \quad \dots(1)
 \end{aligned}$$

पुनः मान लीजिए कि $A - (B \cup C)$ का एक अवयव x है।

$$\begin{aligned}
 & x \in A - (B \cup C) \\
 \Rightarrow & x \in A \text{ और } x \notin (B \cup C) \\
 \Rightarrow & x \in A \text{ और } (x \notin B \text{ और } x \notin C) \\
 \Rightarrow & (x \in A \text{ और } x \notin B) \text{ और } (x \in A \text{ और } x \notin C) \\
 \Rightarrow & x \in (A - B) \text{ और } x \in (A - C) \\
 \Rightarrow & x \in (A - B) \cap (A - C) \\
 \therefore & A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C) \quad \dots(2)
 \end{aligned}$$

(2) अतः समी. (1) व (2) से,

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

(iv) मान लीजिए कि $(A - B) \cup (A - C)$ का एक अवयव x है। तब,

$$\begin{aligned} & x \in (A - B) \cup (A - C) \\ \Rightarrow & x \in (A - B) \text{ या } x \in (A - C) \\ \Rightarrow & \{x \in A \text{ और } x \notin B\} \text{ या } \{x \in A \text{ और } x \notin C\} \\ \Rightarrow & x \in A \text{ और } \{x \notin B \text{ या } x \notin C\} \\ \Rightarrow & x \in A \text{ और } x \notin (B \cap C) \\ \Rightarrow & x \in A - (B \cap C) \\ \therefore & (A - B) \cup (A - C) \subseteq A - (B \cap C) \quad \dots(1) \end{aligned}$$

पुनः मान लीजिए कि $A - (B \cap C)$ का एक अवयव x है। तब,

$$\begin{aligned} & x \in A - (B \cap C) \\ \Rightarrow & x \in A \text{ और } x \notin (B \cap C) \\ \Rightarrow & x \in A \text{ और } (x \notin B \text{ या } x \notin C) \\ \Rightarrow & (x \in A \text{ और } x \notin B) \text{ या } (x \in A \text{ और } x \notin C) \\ \Rightarrow & x \in (A - B) \text{ या } x \in (A - C) \\ \Rightarrow & x \in (A - B) \cup (A - C) \\ \therefore & A - (B \cap C) \subseteq (A - B) \cup (A - C) \quad \dots(2) \end{aligned}$$

अतः समी. (1) व (2) से,

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

उदाहरण 1. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ हो, तो $A \Delta B$ का मान ज्ञात कीजिये।

$$\text{हल : } A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A - B = \{ 1 \}$$

$$B - A = \{ 5, 6 \}$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$\therefore A \Delta B = \{1\} \cup \{5, 6\}$$

$$\Rightarrow A \Delta B = \{1, 5, 6\}.$$

उदाहरण 2. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ हो, तो निम्नलिखित समुच्चयों के पूरक ज्ञात कीजिए-

(i). $A = \{a, b, c\}$

(ii) $B = \{d, e, f, g\}$

हल : (i) $A' = U - A$

$$= \{U \text{ के वे अवयव जो } A \text{ में नहीं हैं}\}$$

$$= \{a, b, c, d, e, f, g, h\} - \{a, b, c\}$$

$$\therefore A' = \{d, e, f, g, h\}.$$

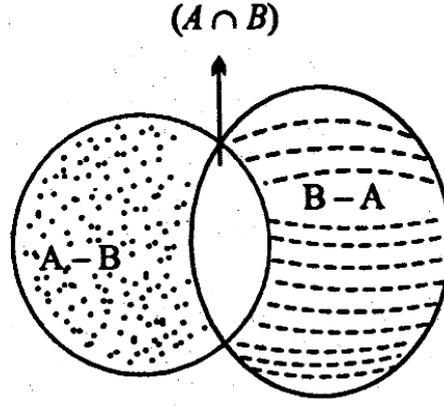
(ii) $B' = U - B$

$$= \{U \text{ के वे अवयव जो } B \text{ में नहीं हैं}\}$$

$$= \{a, b, c, d, e, f, g, h\} - \{d, e, f, g\}$$

$$= \{a, b, c, h\}.$$

वेन आरेख से प्राप्त महत्वपूर्ण परिणाम (Important Result of Venn Diagram)



(i) माना A और B दो परिमित समुच्चय हैं तथा $A \cap B = \phi$ हो तब

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

प्रमाण: $A \cup B$ के अवयव या तो A में हैं या B में है परन्तु दोनों में नहीं होंगे क्योंकि $A \cap B = \phi$

अतः $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

(ii) माना A और B दो परिमित समुच्चय हैं तथा प्रतिच्छेदी हैं तब,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

प्रमाण: $A - B$, $A \cap B$ तथा $B - A$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

स्पष्ट है $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

$$n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिए } n(A \cup B) &= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) \\ &= n(A) - n(A \cap B) + n(A \cap B) \\ &\quad + n(B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(iii) यदि A, B, C परिमित समुच्चय है तब,

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\ &\quad - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

प्रमाण: हम जानते हैं कि-

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)]$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

अतः

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

महत्वपूर्ण सूत्र:

- (i) $n(A - B) + n(A \cap B) = n(A)$
- (ii) $n(B - A) + n(A \cap B) = n(B)$
- (iii) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$
- (iv) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
- (v) $n(A' \cup B') = n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B)$
- (vi) $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$
- (vii) $n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B)$
- (viii) $n(A' \cap B) = n(B) - n(A \cap B)$

उदाहरण 1. एक सर्वेक्षण में 400 व्यक्तियों के समूह में 100 व्यक्ति चाय पीना पसंद करते हैं तथा 150 व्यक्ति कॉफी पीना पसंद करते हैं। 75 व्यक्ति चाय और कॉफी दोनों पीना पसंद करते हैं। बताइए कितने व्यक्ति न तो चाय पीना पसंद करते हैं न ही कॉफी?

हल: $n(U) = 400$

चाय पसंद करने वाले व्यक्ति $n(A) = 100$

कॉफी पसंद करने वाले व्यक्ति $n(B) = 150$

चाय और कॉफी दोनों पसंद करने वाले व्यक्ति $n(A \cap B) = 75$

ज्ञात करना है : $n(A' \cap B')$

$$\begin{aligned} n(A' \cap B') &= n(A \cup B)' \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] \\ &= 400 - 100 - 150 + 75 \\ &= 225. \end{aligned}$$

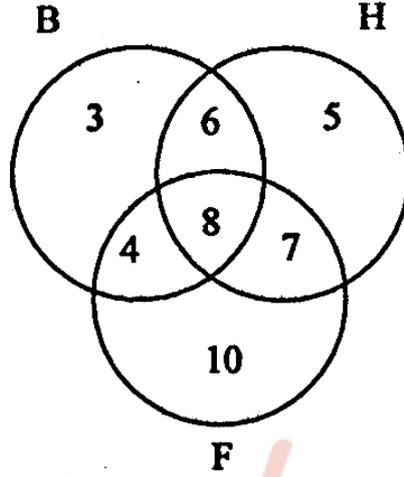
उदाहरण 2. किसी विद्यालय की बास्केट बॉल टीम में 21, हॉकी टीम में 26 तथा फुटबॉल टीम में 29 लड़के हैं। अब यदि 14 लड़के हॉकी और बास्केट बॉल, 15 लड़के हॉकी और फुटबॉल, 12 लड़के फुटबॉल और बास्केट बॉल खेलते हैं तथा 8 लड़के हॉकी, फुटबॉल और बास्केट बॉल तीनों खेलखेलते हैं, तो खेलनेवाले कुल लड़कों की संख्या बताइए।

हल: मान लीजिए कि B, H, F क्रमशः बास्केट बॉल, हॉकी और फुटबॉल खेलने वाले लड़कों का समुच्चय है। तब प्रश्नानुसार,

$$\begin{aligned} n(B) &= 21, n(H) = 26, n(F) = 29, n(H \cap B) = 14, \\ n(H \cap F) &= 15, n(F \cap B) = 12 \text{ तथा } n(B \cap H \cap F) = 8. \\ \therefore n(B \cup H \cup F) &= n(B) + n(H) + n(F) \\ &\quad - n(B \cap H) - n(H \cap F) - n(F \cap B) + n(B \cap H \cap F) \\ &= 21 + 26 + 29 - 14 - 15 - 12 + 8 = 43. \end{aligned}$$

वैकल्पिक विधि (वेन आरेख द्वारा):

- (i) 8 लड़के तीनों खेल खेलते हैं अतः $B \cap H \cap F$ क्षेत्र में 8 होगा।
- (ii) 14 लड़के B और H दोनों खेलते हैं अतः $B \cap H$ क्षेत्र में $14 - 8 = 6$ होगा।



(iii) 15 लड़के H और F दोनों खेलते हैं अतः $H \cap F$ क्षेत्र में $15 - 8 = 7$ होगा।

(iv) 12 लड़के F और B दोनों खेलते हैं अतः $B \cap F$ क्षेत्र में $12 - 8 = 4$ होगा।

(v) बास्केट बॉल खेलने वालों की कुल संख्या 21 है। अतः B के बचे क्षेत्र में

$$21 - (8 + 6 + 4) = 3.$$

(vi) हॉकी खेलने वालों की कुल संख्या 26 है। अतः H के बचे क्षेत्र में

$$26 - (8 + 6 + 7) = 5.$$

(vii) फुटबॉल खेलने वालों की कुल संख्या 29 है। अतः F के बचे क्षेत्र में

$$29 - (8 + 7 + 4) = 10.$$

अतः कुल खिलाड़ियों की संख्या = $3 + 6 + 5 + 8 + 4 + 10 + 7 = 43$.

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 1.1 (पृष्ठ संख्या 5-6)

प्रश्न 1 निम्नलिखित में से समुच्चय हैं या नहीं? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

- j अक्षर से प्रारम्भ होने वाले वर्ष के सभी महीनों का संग्रह।
- भारत के दस सबसे अधिक प्रतिभाशाली लेखकों का संग्रह।
- विश्व के सर्वश्रेष्ठ ग्यारह बल्लबाजों का संग्रह।
- आप की कक्षा के सभी बालकों का संग्रह।

- (v) 100 से कम सभी प्राकृत संख्याओं का संग्रह।
- (vi) लेखक प्रेमचन्द द्वारा लिखित उपन्यासों का संग्रह।
- (vii) सभी सम पूर्णाकों का संग्रह।
- (viii) इस अध्याय में आने वाले प्रश्नों का संग्रह।
- (ix) विश्व में सबसे अधिक खतरनाक जानवरों का संग्रह।

उत्तर-

- (i) **j से शुरू होने वाले महीनों के नाम-** जनवरी, जून व जुलाई। अतः यह एक समुच्चय है।
- (ii) प्रतिभाशाली लेखक को परिभाषित नहीं किया जा सकता। इसीलिए यह एक समुच्चय नहीं है।
- (iii) सर्वश्रेष्ठ बल्लेबाज को परिभाषित नहीं कर सकते। अतः यह एक समुच्चय नहीं है।
- (iv) कक्षा के सभी विद्यार्थियों की संख्या निश्चित होती है। अतः यह एक समुच्चय है।
- (v) 100 से कम प्राकृत संख्याएँ 1, 2, 3, _____ 99 हैं।
- (vi) लेखक प्रेमचन्द्र द्वारा लिखित उपन्यासों का संग्रह गबन, गोदान आदि द्वारा परिभाषित हैं।
अतः यह एक समुच्चय है।
- (vii) समपूर्णाक{-6, -4, 2, 4, 6, _____ } हैं। इसलिए यह एक समुच्चय है।
- (viii) इस अध्याय के प्रश्न परिभाषित हैं। अतः यह एक समुच्चय है।
- (ix) संसार के सबसे अधिक खतरनाक पशुओं के संग्रह को परिभाषित नहीं किया जा सकता।
इसलिए यह एक समुच्चय नहीं है।

प्रश्न 2 मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ रिक्त स्थान में उपयुक्त प्रतीक \in अथवा \notin भरिए।

- (i) $5 \underline{\hspace{1cm}} A$
- (ii) $8 \underline{\hspace{1cm}} A$
- (iii) $0 \underline{\hspace{1cm}} A$
- (iv) $4 \underline{\hspace{1cm}} A$
- (v) $2 \underline{\hspace{1cm}} A$
- (vi) $10 \underline{\hspace{1cm}} A$

उत्तर-

- (i) $5 \in A$
- (ii) $8 \notin A$

- (iii) $0 \notin 4$
- (iv) $4 \in A$
- (v) $2 \in A$
- (vi) $10 \notin A$

प्रश्न 3 निम्नलिखित समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखिए-

- (i) $A = \{x : x \text{ एक पूर्णांक है और } -3 < x < 7\}$
- (ii) $B = \{x : x \text{ संख्या 6 से कम एक प्राकृत संख्या है।}\}$
- (iii) $C = \{x : x \text{ दो अंको की ऐसी प्राकृत संख्या है जिसके अंकों का योगफल 8 है।}\}$
- (iv) $D = \{x : x \text{ एक अभाज्य संख्या है जो 60 की भाजक है।}\}$
- (v) $E = \text{TRIGONOMETRY शब्द के सभी अक्षरों का समुच्चय।}$
- (vi) $F = \text{BETTER शब्द के सभी अक्षरों का समुच्चय।}$

उत्तर-

- (i) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- (ii) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (iii) $C = \{17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80\}$
- (iv) $D = \{2, 3, 5\}$
- (v) $E = \{T, R, I, G, O, N, M, E, Y\}$
- (vi) $F = \{B, E, T, T, E, R\}$

प्रश्न 4 निम्नलिखित समुच्चय को समुच्चय निर्माण रूप में व्यक्त कीजिए-

- (i) $\{3, 6, 9, 12\}$
- (ii) $\{2, 4, 8, 16, 32\}$
- (iii) $\{5, 25, 125, 625\}$
- (iv) $\{2, 4, 6, ___\}$
- (v) $\{1, 4, 9, ___\ 100\}$

उत्तर-

- (i) $\{x : x = 3n \{x : x = 3n \text{ और } 1 \leq n \leq 4\}$
- (ii) $\{x : x = 2n \{x : x = 2n \text{ और } 1 \leq n \leq 5\}$
- (iii) $\{x : x = 5 \{x : x = 5 \text{ और } 1 \leq n \leq 4\}$
- (iv) $\{x : x \text{ एक सम प्राकृत संख्या है।}\}$
- (v) $x : x = n^2, 1 \leq n \leq 10$

प्रश्न 5 निम्नलिखित समुच्चय के सभी अवयव (सदस्य) को सूचीबद्ध कीजिए।

- (i) $A = \{x : x \text{ एक विषम प्राकृत संख्या है।}\}$
- (ii) $B = \{x : x \text{ एक पूर्णांक है, } \frac{-1}{2} < x < \frac{9}{2}\}$
- (iii) $C = \{x : x \text{ एक पूर्णांक है, } x^2 \leq 4\}$
- (iv) $D = \{x : x, \text{ LOYAL शब्द का एक अक्षर है।}\}$
- (v) $F = \{x : x \text{ वर्ष का एक ऐसा महीना है, जिसमें 31 दिन नहीं होते हैं।}\}$
- (vi) $F = \{x : x \text{ अंग्रेजी वर्णमाला का एक व्यंजन है, जो k से पहले आता है।}\}$

उत्तर-

- (i) $A = \{1, 3, 5, 7, ___\}$
- (ii) $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- (iii) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- (iv) $D = \{L, O, Y, A\}$
- (v) $E = \{\text{फरवरी, अप्रैल, जून, सितम्बर, नवम्बर}\}$
- (vi) $F = \{b, c, d, f, g, h, j\}$

प्रश्न 6 बाईं ओर रोस्टर रूप में लिखित और दाईं ओर समुच्चय निर्माण रूप में वर्णित समुच्चयों का सही मिलान कीजिए-

क्रम.		क्रम.	
1.	$\{1, 2, 3, 6\}$	(a)	$\{x : x \text{ एक अभाज्य संख्या है और 6 की भाजक है।}\}$

2. {2, 3}	(b) {x : x संख्या 10 से कम एक विषम प्राकृत संख्या है।}
3. {M, A, T, H, E, I, C, S}	(c) {x : x एक प्राकृत संख्या है और 6 की भाजक है।}
4. {1, 3, 5, 7, 9}	(d) {x : x MATHEMATICS शब्द का एक अक्षर है।}

उत्तर-

क्रम.		क्रम.	
1.	{1, 2, 3, 6}	(c)	{x : x एक प्राकृत संख्या है और 6 की भाजक है।}
2.	{2, 3}	(a)	{x : x एक अभाज्य संख्या है और 6 की भाजक है।}
3.	{M, A, T, H, E, I, C, S}	(d)	{x : x MATHEMATICS शब्द का एक अक्षर है।}
4.	{1, 3, 5, 7, 9}	(b)	{x : x संख्या 10 से कम एक विषम प्राकृत संख्या है।}

प्रश्नावली 1.2 (पृष्ठ संख्या 9-10)

प्रश्न 1 निम्नलिखित में से रिक्त समुच्चय के उदाहरण है?

- (i) 2 से भाज्य विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय।
- (ii) सम अभाज्य संख्याओं का समुच्चय
- (iii) {x : x एक प्राकृत संख्या है, x < 5 और साथ ही साथ x > 7}
- (iv) {y : y किन्हीं भी दो समांतर रेखाओं का उभयनिष्ठ बिन्दु है।}

उत्तर-

- (i) 2 से भाज्य कोई भी विषम प्राकृत संख्याएँ नहीं हैं। अतः यह एक रिक्त समुच्चय है।
- (ii) सम अभाज्य संख्या का समुच्चय {2} है। यह एक रिक्त समुच्चय नहीं है।
- (iii) x < 5 और x > 7 कोई प्राकृत संख्या नहीं है। अतः यह एक रिक्त समुच्चय है।
- (iv) समांतर रेखाएँ कहीं भी नहीं मिलती हैं। अतः यह एक रिक्त समुच्चय है।

प्रश्न 2 निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन परिमित और कौन अपरिमित हैं?

- (i) वर्ष के महीनों का समुच्चय।
- (ii) {1, 2, 3,}
- (iii) {1, 2, 3,99, 100}

- (iv) 100 से बड़े धन पूर्णाकों का समुच्चय।
- (v) 99 से छोटे अभाज्य पूर्णाकों का समुच्चय।

उत्तर-

- (i) वर्ष में 12 महीने होते हैं। अतः यह एक परिमित समुच्चय है।
- (ii) समुच्चय $\{1, 2, 3, \dots\}$ में अनंत अवयव हैं। अतः यह एक अपरिमित समुच्चय है।
- (iii) समुच्चय $\{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ में कुल 100 अवयव हैं। अतः यह एक परिमित समुच्चय है।
- (iv) 100 से बड़े पूर्णाकों का समुच्चय $\{101, 102, 103, \dots\}$ है जिसमें अनंत अवयव हैं। अतः यह एक अपरिमित समुच्चय है।
- (v) 99 से छोटे अभाज्य पूर्णाकों का समुच्चय $\{2, 3, 5, 7, \dots, 97\}$ है जिसमें अवयवों की संख्या निश्चित है। अतः यह एक परिमित समुच्चय है।

प्रश्न 3 निम्नलिखित समुच्चय में बताइए परिमित है या अपरिमित है?

- (i) x-अक्ष के समांतर रेखाओं का समुच्चय।
- (ii) अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों का समुच्चय।
- (iii) उन संख्याओं का समुच्चय जो 5 के गुणज हैं।
- (iv) पृथ्वी पर रहने वाले जानवरों का समुच्चय।
- (v) मूल बिन्दु (0, 0) से होकर जाने वाले वृत्तों का समुच्चय।

उत्तर-

- (i) x-अक्ष के समांतर अनंत रेखाएँ खींची जा सकती हैं। अतः यह एक अपरिमित समुच्चय है।
- (ii) अंग्रेजी वर्णमाला में कुल 26 अक्षर होते हैं। इन अक्षरों से बनने वाला समुच्चय परिमित होगा।
- (iii) 5 से विभाजित होने वाली संख्याओं का समुच्चय $\{5, 10, 15, 20, \dots\}$ है, जिसमें अनंत अवयव हैं। अतः यह एक अपरिमित समुच्चय है।
- (iv) पृथ्वी पर रहने वाले जानवरों का समुच्चय परिमित होगा।
- (v) मूल बिन्दु को केन्द्र मानकर अनन्त वृत्त चे जा सकते हैं। अतः यह अपरिमित होगा।

प्रश्न 4 निम्नलिखित में बताइए कि $A = B$ है अथवा नहीं है।

- (i) $A = \{a, b, c, a\}$, $B = \{a, c, b, a\}$
- (ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$, $B = \{8, 4, 16, 18\}$
- (iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{x : x \text{ सम धन पूर्णांक है और } x \leq 10\}$
- (iv) $A = \{x : x \text{ संख्या 10 का एक गुणज है}\}$, $B = \{10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$

उत्तर-

(i) A और B दोनों समुच्चयों के अवयव a, b, c, d हैं।

अतः $A = B$

(ii) A में अवयव 12 है परन्तु B में नहीं है।

अतः $A \neq B$

(iii) A और B दोनों समुच्चयों में अवयव 2, 4, 6, 8 और 10 हैं।

अतः $A = B$

(iv) $A = \{10, 20, 30, 40, \dots\}$, $B = \{10, 15, 25, 30, \dots\}$ 10 के गुणजों में 5, 15, 25 नहीं आता है।

अतः $A \neq B$

प्रश्न 5 क्या निम्नलिखित समुच्चय युग्म समान हैं ? कारण सहित बताइए।

(i) $A = \{2, 3\}$

$B = \{x : x \text{ समीकरण } x^2 + 5x + 6 = 0 \text{ का एक हल है}\}$

(ii) $A = \{k : k \text{ शब्द 'FOLLOW' का एक अक्षर है}\}$

$B = \{y : y \text{ शब्द 'WOLF' का एक अक्षर है}\}$

उत्तर-

(i) $A = \{2, 3\}$, $B = x : x \text{ समीकरण } x^2 + 5x + 6 = 0\} = \{-2, -3\}$

स्पष्ट है कि समुच्चय A और B के अवयव भिन्न हैं।

अतः $A \neq B$.

(ii) $A = \{F, O, L, W\}$, $B = \{W, O, L, F\}$ समुच्चय A और B के अवयव समान हैं।

अतः $A = B$.

प्रश्न 6 नीचे दिए गए समुच्चयों में से समान समुच्चयों का चयन कीजिए-

$A = \{2, 4, 8, 12\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$C = \{4, 8, 12, 14\}$

$D = \{3, 1, 4, 2\}$

$E = \{-1, 1\}$

$F = \{0, a\}$

$G = \{1, -1\}$

$H = \{0, 1\}$

उत्तर- यहाँ समुच्चय B और D के अवयव 1, 2, 3, 4, हैं।

$B = D$

तथा समुच्चय E और G में -1, 1 अवयव समान हैं।

$$E = G$$

प्रश्नावली 1.3 (पृष्ठ संख्या 14-16)

प्रश्न 1 रिक्त स्थानों में प्रतीक \subset या $\not\subset$ को भर कर सही कथन बनाइए-

- (i) $\{2, 3, 4\}$ _____ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (ii) $\{a, b, c\}$ _____ $\{b, c, d\}$
- (iii) $\{x : x \text{ आपके विद्यालय की कक्षा XI का एक विद्यार्थी है}\}$ _____ $\{x : x \text{ आपके विद्यालय का एक विद्यार्थी है।}\}$
- (iv) $\{x : x \text{ किसी समतल में स्थित एक वृत्त है।}\}$ _____ $\{x : x \text{ एक समान समतल में एक वृत्त है। जिसकी त्रिज्या 1 इकाई है।}\}$
- (v) $\{x : x \text{ किसी समतल में स्थित एक त्रिभुज है}\}$ _____ $\{x : x \text{ किसी समतल में स्थित एक आयत है।}\}$
- (vi) $\{x : x \text{ किसी समतल में स्थित एक समबाहु त्रिभुज है}\}$ _____ $\{x : x \text{ किसी समतल में स्थित एक त्रिभुज है।}\}$
- (vii) $\{x : x \text{ एक सम प्राकृत संख्या है}\}$ _____ $\{x : x \text{ एक पूर्णांक है}\}$ ।

उत्तर-

- (i) अवयव $2, 3, 4 \in 1, 2, 3, 4, 5$

अतः $2, 3, 4 \subset 1, 2, 3, 4, 5$

- (ii) a, b, c का अवयव $a \notin b, c, d$

अतः $a, b, c \not\subset b, c, d$

- (iii) जो विद्यार्थी विद्यालय की कक्षा XI में हैं वे विद्यालय में भी हैं। अतः $\{x : x \text{ विद्यालय की कक्षा XI का विद्यार्थी}\} \subset \{x : x \text{ आपके विद्यालय का विद्यार्थी}\}$

- (iv) समुच्चय $\{x : x \text{ समतल में एक वृत्त}\}$ के एक अवयव वृत्त की त्रिज्या 1 से भिन्न हो सकती है।
अतः $\{x : x \text{ समतल में वृत्त}\} \neq \{x : x \text{ वृत्त की त्रिज्या 1 इकाई है।}\}$
- (v) त्रिभुजों का समुच्चय आयतों के समुच्चय से बिल्कुल भिन्न है। अतः $\{x : x \text{ समतल में एक त्रिभुज}\} \neq \{x : x \text{ समतल में एक आयत}\}$
- (vi) त्रिभुजों का समुच्चय आयतों के समुच्चय से बिल्कुल भिन्न है। अतः $\{x : x \text{ समतल में एक त्रिभुज}\} \neq \{x : x \text{ समतल में एक आयत।}\}$
- (vii) प्रत्येक सम प्राकृत संख्या एक पूर्णांक है। अतः $\{x : x \text{ एक सम प्राकृत संख्या}\} \subset \{x : x \text{ एक पूर्णांक}\}$

प्रश्न 2 जाँचिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य हैं-

- (i) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$
- (ii) $a, e \subset x : x \text{ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है।}\}$
- (iii) $1, 2, 3 \subset 1, 3, 5$
- (iv) $a \subset a, b, c$
- (v) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$
- (vi) $\{x : x \text{ संख्या 6 से कम एक सम प्राकृत संख्या है।}\} \subset \{x : x \text{ एक प्राकृत संख्या है, जो संख्या 36 को विभाजित करती है।}\}$

उत्तर-

(i) असत्य

समुच्चय $\{a, b\}$ के अवयव a, b दासमुच्चय $\{b, c, a\}$ में है। $\{a, b \neq b, c, a\}$

अतः उपरोक्त कथन असत्य है।

(ii) सत्य

a, e दोनों ही स्वर हैं। $\{a, e = x : x, \text{ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है।}\}$

अतः यह कथन सत्य है।

(iii) असत्य

समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ और $1, 3, 5$ में अवयव 2 समुच्चय $\{1, 3, 5\}$ नहीं है।

$\{1, 2, 3 \subset 1, 3, 5\}$ कथन असत्य है।

(iv) सत्य

$a \in a, b, c \{a\} \subset a, b, c$ यह कथन सत्य है।

(v) असत्य

$\{4\}$ समुच्चय है, अवयव नहीं है।

$\{a\} \in \{a, b, c\}$ कथन असत्य है।

(vi) सम प्राकृत संख्या 2, 4 संख्या 6 से कम है तथा 36 को विभाजित करती है। $\{x : x \text{ एक सम प्राकृत संख्या है जो } 6 \text{ से कम है}\} \subset \{x : x \text{ एक सम प्राकृत संख्या } 36 \text{ को विभाजित करती है}\}$ । अतः यह कथन सत्य है।

प्रश्न 3 मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, निम्नलिखित में कथन सही है या नहीं और क्यों?

(i) $\{3, 4\} \subset A$

(ii) $\{3, 4\} \in A$

(iii) $\{\{3, 4\}\} \subset A$

(iv) $1 \in A$

(v) $1 \subset A$

(vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$

(vii) $\{1, 2, 5\} \in A$

(viii) $\{1, 2, 3\} \subset A$

(ix) $\phi \in A$

- (x) $\phi \subset A$
 (xi) $\{\phi\} \subset A$

उत्तर-

- (i) सही नहीं है। समुच्चय $\{3, 4\}$ एक अवयव है।
 (ii) सही है। क्योंकि $\{3, 4\}$ समुच्चय A का एक अवयव है।
 (iii) सही है। A के अवयव $\{3, 4\}$ का एक उपसमुच्चय है।
 (iv) $1 \in A$, सही है।
 (v) $1 \subset A$ सही नहीं है क्योंकि 1 एक समुच्चय नहीं है।
 (vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$ सही है। समुच्चय $\{1, 2, 5\}$ के अवयव $1, 2, 5$ समुच्चय A में है।
 (vii) $\{1, 2, 5\} \in A$ सही नहीं है। $\{12, 5\}$ अवयव नहीं है। यह एक समुच्चय है।
 (viii) $\{1, 2, 3\} \subset A$ सही नहीं है। अवयव 3 समुच्चय में नहीं है।
 (ix) $\phi \in A$, सही नहीं है। ϕ एक समुच्चय है, अवयव नहीं है।
 (x) $\phi \subset A$ सही है। सभी समुच्चयों का उपसमुच्चय है।
 (xi) $\{\phi\} \subset A$ सही नहीं है। $\{\phi\}$ समुच्चय का समुच्चय है।

प्रश्न 4 निम्नलिखित समुच्चय के सभी उपसमुच्चय लिखिए।

- (i) $\{a\}$
 (ii) $\{a, b\}$
 (iii) $\{1, 2, 3\}$
 (iv) ϕ

उत्तर-

- (i) $\phi, \{a\}$
 (ii) $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$
 (iii) $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$
 (iv) ϕ

प्रश्न 5 P (A) के कितने अवयव हैं, यदि $A = \phi$?

उत्तर- $A = \phi$, $P(A) = \phi$ इस प्रकार P (A) को $2^0 = 12^0 = 1$ अवयव है।

प्रश्न 6 निम्नलिखित को अंतराल रूप में लिखिए-

- (i) $\{x : x \in \mathbb{R}, -4 < x \leq 6\}$
- (ii) $\{x : x \in \mathbb{R}, -12 < x < -10\}$
- (iii) $\{x : x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 7\}$
- (iv) $\{x : x \in \mathbb{R}, 3 \leq x \leq 4\}$

उत्तर-

(i) वांछित अंतराल इस प्रकार हैं-

$(-4, 6)$

(ii) वांछित अंतराल इस प्रकार हैं-

$(-12, -10)$

(iii) वांछित अंतराल इस प्रकार हैं-

$[0, 7]$

(iv) वांछित अंतराल इस प्रकार हैं-

$[3, 4]$

प्रश्न 7 निम्नलिखित अंतरालों को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए-

- (i) $(-3, 0)$
- (ii) $[6, 12]$
- (iii) $(6, 12]$
- (iv) $[-23, 5)$

उत्तर-

- (i) $(-3, 0) = \{x : x \in \mathbb{R}, -3 < x < 0\}$
- (ii) $[6, 12] = \{x : x \in \mathbb{R}, 6 \leq x \leq 12\}$
- (iii) $(6, 12] = \{x : x \in \mathbb{R}, 6 < x \leq 12\}$
- (iv) $[-23, 5) = \{x : x \in \mathbb{R}, -23 \leq x < 5\}$

प्रश्न 8 निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए आप कौन सा सार्वत्रिक समुच्चय प्रस्तावित करेंगे?

- i. समकोण त्रिभुजों का समुच्चय
- ii. समद्विबाहु त्रिभुजों का समुच्चय

उत्तर- दोनों समुच्चयों के लिए सार्वत्रिक समुच्चय- $\{x : x \text{ समतल में स्थित एक त्रिभुज}\}$

प्रश्न 9 समुच्चय $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ और $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ प्रदत्त हैं। इन तीनों समुच्चयों A, B और C के लिए निम्नलिखित में से कौन सा (से) सार्वत्रिक समुच्चय लिए जा सकते हैं?

- i. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ii. ϕ
- iii. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- iv. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

उत्तर-

- iii. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ समुच्चय,

तीनों समुच्चय A, B, C के लिए $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ सार्वत्रिक समुच्चय हैं।

प्रश्नावली 1.4 (पृष्ठ संख्या 20-22)

प्रश्न 1 निम्नलिखित में समुच्चय युग्म का सम्मिलन ज्ञात कीजिए-

- (i) $X = \{1, 3, 5\}$
- (ii) $Y = \{1, 2, 3\}$
- (iii) $A = \{a, e, i, o, u\}, B = \{a, b, c\}$
- (iv) $A = \{x : \text{एक प्राकृत संख्या है और 3 का गुणज है।}\}$
- (v) $B = \{x : x \text{ संख्या 6 से कम एक प्राकृत संख्या है।}\}$
- (vi) $A = \{x : x \text{ एक प्राकृत संख्या है और } 1 < x < 6\}$
- (vii) $B = \{x : x \text{ एक प्राकृत संख्या है और } 6 < x < 10\}$
- (viii) $A = 1, 2, 3, B = \phi$

उत्तर-

- (i) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 5\}$
- (ii) $A \cup B = \{a, e, i, o, u\} \cup \{a, b, c\}$
 $= \{a, b, c, e, i, o, u\}$
- (iii) $A \cup B = \{3, 6, 9, \dots\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $= \{1, 2, 4, 5, 6, 9, \dots\}$ या संख्या 3 का गुणज
- (iv) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{7, 8, 9\}$

Fukey Education

$A \cup B = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

अर्थात् $x : 1 < x < 10, x \in N$

(v) $A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \phi = 1, 2, 3$

प्रश्न 2 मान लीजिए कि $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}$ क्या $A \subset B$? $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}$ समुच्चय A के अवयव a, b समुच्चय B में भी है।

$A \subset B = A \cup B = B$ और $A \cup B = \{a, b\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$

प्रश्न 3 यदि A और B दो ऐसे समुच्चय हैं कि $A \subset B$, तो $A \cup B$ क्या है?

उत्तर- $A \subset B$ समुच्चय A के सभी अवयव समुच्चय B में हैं। $A \cup B = B$

प्रश्न 4 यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$ और $D = \{7, 8, 9, 10\}$,

तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए-

- (i) $A \cup B$
- (ii) $A \cup C$
- (iii) $B \cup C$
- (iv) $B \cup D$
- (v) $A \cup B \cup C$
- (vi) $A \cup B \cup D$
- (vii) $B \cup C \cup D$

उत्तर-

$$(i) A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(ii) A \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$(iii) B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\}$$

$$= \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$(iv) B \cup D = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10\} B \cup D = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10\}$$

$$= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(v) A \cup B \cup C = (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\}) \cup \{5, 6, 7, 8\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(vi) } A \cup B \cup D &= (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\}) \cup \{7, 8, 9, 10\} \\
 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10\} \\
 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(vii) } B \cup C \cup D &= (\{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\}) \cup \{7, 8, 9, 10\} \\
 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{7, 8, 9, 10\} \\
 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}
 \end{aligned}$$

प्रश्न 5 प्रश्न 1 में दिए प्रत्येक समुच्चय युग्म का सर्वनिष्ठ समुच्चय ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

- i. $X \cap Y = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$
- ii. $A \cap B = \{a, e, i, o, u\} \cap \{a, b, c\} = \{a\}$
- iii. $A \cap B = \{3, 6, 9 \dots\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3\}$
- iv. $A \cap B = \{2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{7, 8, 9\} = \phi$
- v. $A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \phi = 0$

प्रश्न 6 यदि $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{7, 9, 11, 13\}$, $C = \{11, 13, 15\}$ और $D = \{15, 17\}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए-

- (i) $A \cap B$
- (ii) $B \cap C$
- (iii) $A \cap C \cap D$
- (iv) $A \cap C$
- (v) $B \cap D$

$$(vi) A \cap (B \cup C)$$

$$(vii) A \cap D$$

$$(viii) A \cap (B \cup D)$$

$$(ix) (A \cap B) \cap (B \cup C)$$

$$(x) (A \cup D) \cap (B \cup C)$$

उत्तर-

$$(i) A \cap B = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13\} = \{7, 9, 11\}$$

$$(ii) B \cap C = \{7, 9, 11, 13\} \cap \{11, 13, 15\} = \{11, 13\}$$

$$(iii) A \cap C \cap D = (\{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{11, 13, 15\}) \cap \{15, 17\}$$

$$= \{11\} \cap \{15, 17\} = \phi$$

$$(iv) A \cap C = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{11, 13, 15\} = \{11\}$$

$$(v) B \cap D = \{7, 9, 11, 13\} \cap \{15, 17\} = \phi$$

$$(vi) A \cap (B \cup C) = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap (\{7, 9, 11, 13\} \cup \{11, 13, 15\})$$

$$= \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13, 15\} = \{7, 9, 11\}$$

$$(vii) A \cap D = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{15, 17\} = \phi$$

$$(viii) A \cap (B \cup D) = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap (\{7, 9, 11, 13\} \cup \{15, 17\})$$

$$= \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13, 15, 17\} = \{7, 9, 11\}$$

$$(ix) A \cap B = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13\} = \{7, 9, 11\}$$

$$B \cup C = \{7, 9, 11, 13\} \cup \{11, 13, 15\} = \{7, 9, 11, 13, 15\}$$

$$(A \cap B) \cap (B \cup C) = \{7, 9, 11\} \cap \{7, 9, 11, 13, 15\} = \{7, 9, 11\}$$

$$(x) A \cup D = \{3, 5, 7, 9, 11\} \cup \{15, 17\} = \{3, 5, 7, 9, 11, 15, 17\}$$

$$B \cup C = \{7, 9, 11, 13\} \cup \{11, 13, 15\} = \{7, 9, 11, 13, 15\}$$

$$(A \cup D) \cap (B \cup C) = \{3, 5, 7, 9, 11, 15, 17\} \cap \{7, 9, 11, 13, 15\}$$

$$= \{7, 9, 11, 15\}$$

प्रश्न 7 यदि $A = \{x : x \text{ एक प्राकृत संख्या है}\}$, $B = \{x : x \text{ एक सम प्राकृत संख्या है}\}$ $C = \{x : x \text{ एक विषम प्राकृत संख्या है}\}$, $D = \{x : x \text{ एक अभाज्य संख्या है}\}$ तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए-

- (i) $A \cap B$
- (ii) $A \cap C$
- (iii) $A \cap D$
- (iv) $B \cap C$
- (v) $B \cap D$
- (vi) $C \cap D$

उत्तर-

$$(i) A = \{x : x \text{ एक प्राकृत संख्या है}\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} B = \{x : x \text{ एक सम प्राकृत संख्या है}\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\} C = \{x : x \text{ एक विषम प्राकृत संख्या है}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\} D = \{x : x \text{ एक अभाज्य संख्या है}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

$$(ii) A \cap C = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \cap \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = C$$

$$(iii) A \cap D = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \cap \{2, 3, 5, 7, \dots\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\} = D$$

$$(iv) B \cap C = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \cap \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \phi$$

$$(v) B \cap D = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \cap \{2, 3, 5, 7, \dots\} = \{2\}$$

$$(vi) C \cap D = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

$$= \{3, 5, 7, 11, 13, \dots\} = \{x : x = \{3, 5, 7, 11, 13, \dots\}\} = \{x : x \text{ एक विषम अभाज्य संख्या}\}$$

प्रश्न 8 निम्नलिखित समुच्चय युग्मों में से कौन से युग्म असंयुक्त हैं?

- (i) $\{1, 2, 3, 4\}$ तथा $\{x : x \text{ एक प्राकृत संख्या है और } 4 \leq x \leq 6\}$
- (ii) $\{a, e, i, o, u\}$ तथा $\{c, d, e, f\}$
- (iii) $\{x : x \text{ एक सम पूर्णांक है। और } \{x : x \text{ एक विषम पूर्णांक है।}$

उत्तर-

- (i) मान लीजिए $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $F = \{x : x \text{ एक प्राकृत संख्या और } 4 \leq x \leq 6\} = \{4, 5, 6\}$ अवयव 4, E और F दोनों समुच्चयों में है। अतः दोनों युग्म असंयुक्त नहीं हैं।
- (ii) दिये हुए समुच्चयों में अवयव उभयनिष्ठ है। अतः यह असंयुक्त समुच्चय नहीं है।
- (iii) मान लीजिए $A = \{x : x \text{ एक सम पूर्णांक है।} = \{\dots -4, -2, 0, 2, 4\dots\}$ $B = \{x : x \text{ एक विषम पूर्णांक है}\} = \{\dots -5, -3, -1, 1, 3, 5 \dots\}$ A और B समुच्चयों में कोई भी अवयव उभयनिष्ठ नहीं है। अतः यह समुच्चय असंयुक्त है।

प्रश्न 9 यदि $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, $D = \{5, 10, 15, 20\}$, तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए-

- (i) $A - B$
- (ii) $A - C$
- (iii) $A - D$
- (iv) $B - A$
- (v) $C - A$
- (vi) $D - A$
- (vii) $B - C$
- (viii) $B - D$
- (ix) $C - B$
- (x) $D - B$
- (xi) $C - D$
- (xii) $D - C$

उत्तर-

- (i) $A - B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\} - \{4, 8, 12, 16, 20\} = \{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$
- (ii) $A - C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\} - \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} = \{3, 9, 15, 18, 21\}$
- (iii) $A - D = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\} - \{5, 10, 15, 20\} = \{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$
- (iv) $B - A = \{4, 8, 12, 16, 20\} - \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\} = \{4, 8, 16, 20\}$
- (v) $C - A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} - \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\} = \{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$
- (vi) $D - A = \{5, 10, 15, 20\} - \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\} = \{5, 10, 20\}$
- (vii) $B - C = \{4, 8, 12, 16, 20\} - \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} = \{20\}$
- (viii) $B - D = \{4, 8, 12, 16, 20\} - \{5, 10, 15, 20\} = \{4, 8, 12, 16\}$
- (ix) $C - B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} - \{4, 8, 12, 16, 20\} = \{2, 6, 10, 14\}$
- (x) $D - B = \{5, 10, 15, 20\} - \{4, 8, 12, 16, 20\} = \{5, 10, 15\}$
- (xi) $C - D = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} - \{5, 10, 15, 20\} = \{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\}$
- (xii) $D - C = \{5, 10, 15, 20\} - \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} = \{5, 15, 20\}$

प्रश्न 10 यदि $X = \{a, b, c, d\}$ और $Y = \{f, b, d, g\}$ तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए-

- (i) $X - Y$
 (ii) $Y - X$
 (iii) $X \cap Y$

उत्तर-

- (i) $X - Y = \{a, b, c, d\} - \{f, b, d, g\} = \{a, c\}$
 (ii) $Y - X = \{f, b, d, g\} - \{a, b, c, d\} = \{f, g\}$
 (iii) $X \cap Y = \{a, b, c, d\} \cap \{f, b, d, g\} = \{b, d\}$

प्रश्न 11 यदि R वास्तविक संख्याओं और Q परिमेय संख्याओं के समुच्चय हैं, तो $R - Q$ क्या होगा?

उत्तर- $R = \{x : x \text{ एक वास्तविक संख्या है।}\}$ $p = \{x : x \text{ एक परिमेय संख्या है।}\}$

$R - Q = \{x : x \text{ एक अपरिमेय संख्या है।}\}$ अतः यह अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय है।

प्रश्न 12 बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सत्य है या असत्य? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

- (i) $\{2, 3, 4, 5\}$ तथा $\{3, 6\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।
- (ii) $\{a, e, i, o, u\}$ तथा $\{a, b, c, 4\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।
- (iii) $\{2, 6, 10, 14\}$ तथा $\{3, 7, 11, 15\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।
- (iv) $\{2, 6, 10\}$ तथा $\{3, 7, 11\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

उत्तर-

(i) असत्य

यह कथन सत्य नहीं है क्योंकि समुच्चय $\{2, 3, 4, 5\}$ और $\{3, 6\}$ में अवयव 3 उभयनिष्ठ है।

(ii) असत्य

यह कथन सत्य नहीं है क्योंकि समुच्चय $\{a, e, i, o, u\}$ और $\{a, b, c, d\}$ में अवयव a उभयनिष्ठ है।

(iii) सत्य

यह कथन सत्य है क्योंकि समुच्चय $\{2, 6, 10, 14\}$ और $\{3, 7, 11, 15\}$ में कोई अवयव उभयनिष्ठ नहीं है। अतः यह समुच्चय असंयुक्त है।

(iv) सत्य

यह कथन सत्य है क्योंकि समुच्चय $\{2, 6, 10\}$ और $\{3, 7, 11\}$ में कोई अवयव उभयनिष्ठ नहीं है। अतः यह समुच्चय असंयुक्त है।

प्रश्नावली 1.5 (पृष्ठ संख्या 24-25)

प्रश्न 1 मान लीजिए कि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

और $C = \{3, 4, 5, 6\}$ तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए-

- (i) A'
- (ii) B'
- (iii) $(A \cup C)'$
- (iv) $(A \cup B)'$
- (v) $(A')'$
- (vi) $(B - C)'$

उत्तर-

- (i) $A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
- (ii) $B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- (iii) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\therefore (A \cup C)' = \{7, 8, 9\}$$

- (iv) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$(A \cup B)' = \{5, 7, 9\}$$

$$(v) (A) = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7, 8, 9\} (A') =$$

$$U - A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(vi) B - C = \{2, 4, 6, 8\} - \{3, 4, 5, 6\} = \{2, 8\} (B - C) = U - (B - C)' = \{1, 2, 3,$$

$$4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 8\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$$

प्रश्न 2 If $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, तो निम्नलिखित समुच्चय के पूरक ज्ञात कीजिए-

$$(i) A = \{a, b, c\}$$

$$(ii) B = \{d, e, f, g\}$$

$$(iii) C = \{a, c, e, g\}$$

$$(iv) D = \{f, g, h, a\}$$

उत्तर-

$$(i) A' = U - A$$

$$\Rightarrow \{a, b, c, d, e, f, g, h\} - \{a, b, c\}$$

$$\Rightarrow \{d, e, f, g, h\}$$

$$(ii) B' \Rightarrow U - B$$

$$\Rightarrow \{a, b, c, d, e, f, g, h\} - \{d, e, f, g\}$$

$$\Rightarrow \{a, b, c, h\}$$

$$(iii) C = U - C$$

$$\Rightarrow \{a, b, c, d, e, f, g, h\} - \{a, c, e, g\}$$

$$\Rightarrow \{b, d, f, h\}$$

$$(iv) D' \Rightarrow U - D$$

$$\Rightarrow \{a, b, c, d, e, f, g, h\} - \{f, g, h, a\}$$

$$\Rightarrow \{b, c, d, e\}$$

प्रश्न 3 प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय मानते हुए, निम्नलिखित समुच्चय के पूरक लिखिए-

- (i) $\{x : x \text{ एक प्राकृत सम संख्या है।}\}$
- (ii) $\{x : x \text{ एक प्राकृत विषम संख्या है।}\}$
- (iii) $\{x : x \text{ संख्या 3 को एक धन गुणज है।}\}$
- (iv) $\{x : x \text{ एक अभाज्य संख्या है।}\}$
- (v) $\{x : x, 3 \text{ और } 5 \text{ से विभाजित होने वाली एक संख्या है।}\}$
- (vi) $\{x : x \text{ एक पूर्ण वर्ग संख्या है।}\}$
- (vii) $\{x : x \text{ एक पूर्ण घन संख्या है।}\}$
- (viii) $\{x : x + 5 = 8\}$
- (ix) $\{x : 2x + 5 = 9\}$
- (x) $\{x : x \geq 7\}$
- (xi) $= \{x : x \in \mathbb{N} = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ और } 2x + 1 > 10\}$

उत्तर-

- (i) $\{x : x \text{ एक विषम प्राकृत संख्या है।}\}$
- (ii) $\{x : \text{ एक सम संख्या है।}\}$
- (iii) $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ और } x \text{ संख्या 3 का धन गुणज नहीं है।}\}$
- (iv) $\{x : x = 1 \text{ और } x \text{ एक धन भाज्य संख्या है।}\}$
- (v) $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ और } x, \text{ संख्या 3 व } 5 \text{ किसी से भी विभाजित नहीं होती।}\}$
- (vi) $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ तथा } x \text{ एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।}\}$
- (vii) $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ तथा } x \text{ एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।}\}$
- (viii) $= \{x : x \in \mathbb{N} \text{ तथा } x \neq 3\}$

$$(ix) = \{x : x \in N \text{ तथा } x \neq 2\}$$

$$(x) = \{x : x \in N \text{ तथा } x < 7\}$$

$$(xi) = \{x : x \in N \text{ तथा } x < \frac{9}{7}\}$$

प्रश्न 4 यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{2, 3, 5, 7\}$, तो सत्यापित कीजिए कि-

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

उत्तर-

(i) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$

बायाँ पक्ष-

$$(A \cup B)' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}' = \{1, 9\}$$

दायाँ पक्ष-

$$A' \cap B' = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 4, 6, 8, 9\} = \{1, 9\}$$

(ii) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$

बायाँ पक्ष-

$$(A \cap B)' = \{2\}' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

दायाँ पक्ष-

$$A' \cup B' = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 4, 6, 8, 9\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

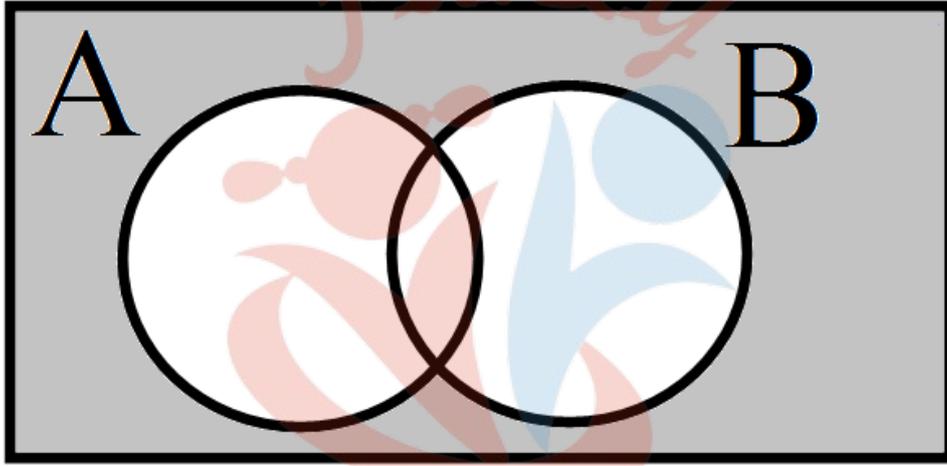
अतः $(A \cap B)' = A' \cup B'$

प्रश्न 5 निम्नलिखित में उपयुक्त वेन आरेख खींचिए।

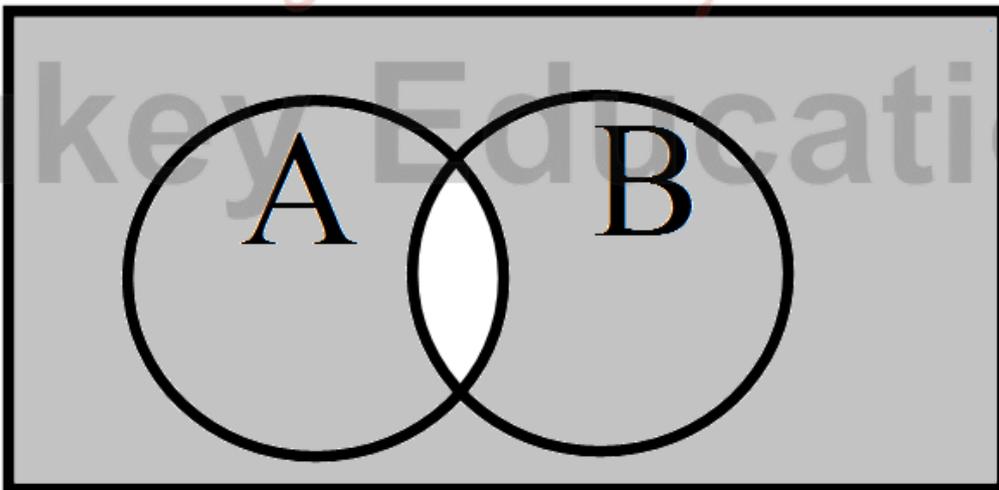
- (i) $(A \cup B)'$
- (ii) $A' \cap B'$
- (iii) $(A \cap B)'$
- (iv) $A' \cup B'$

उत्तर-

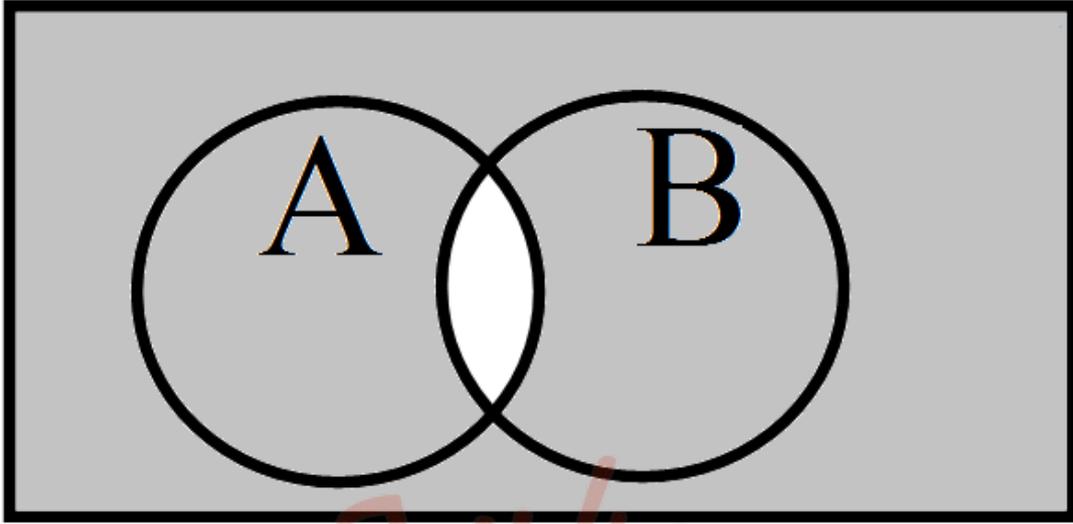
(i)



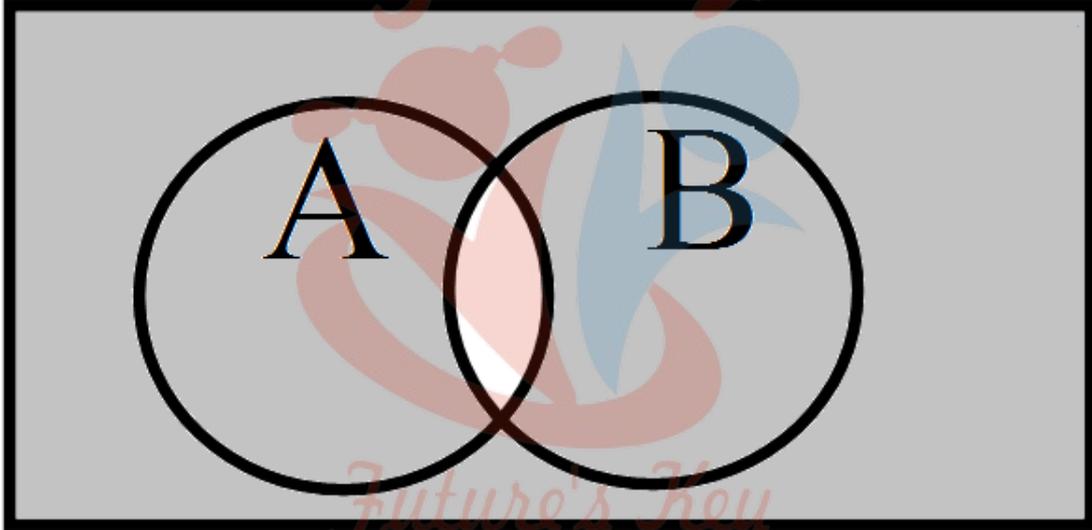
(ii)



(iii)



(iv)



प्रश्न 6 मान लीजिए कि किसी समतल में स्थित सभी त्रिभुजों का समुच्चय सार्वत्रिक समुच्चय U है। यदि A उन सभी त्रिभुजों का समुच्चय है जिनमें कम से कम एक कोण 60° से भिन्न है, तो A' क्या है?

उत्तर- $U = \{x : \text{समतल में एक त्रिभुज है}\}$

$A = \{x : x \text{ एक त्रिभुज जिसका कम से कम एक कोण } 60^\circ \text{ का न हो}\}$

$A' = \{\text{सभी समबाहु त्रिभुजों का समुच्चय है}\}$

प्रश्न 7 निम्नलिखित कथन को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थान भरिए-

- (i) $A \cup A' = \dots$
- (ii) $\Phi' \cup A = \dots$
- (iii) $A \cup A' = \dots$
- (iv) $U' \cap A = \dots$

उत्तर-

- (i) $A \cup A' = U$
- (ii) $\Phi' \cup A = U \cap A = A$
- (iii) $A \cup A' = \Phi$
- (iv) $U' \cap A = \Phi \cap A = \Phi$

प्रश्नावली 1.6 (पृष्ठ संख्या 28-29)

प्रश्न 1 यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $n(X) = 17$, $n(Y) = 23$ तथा $n(X \cup Y) = 38$, तो $n(X \cap Y)$.

उत्तर-

दिया है-

$$n(X) = 17, n(Y) = 23, n(X \cup Y) = 38$$

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$$

$$\therefore 38 = 17 + 23 - n(X \cap Y)$$

$$\Rightarrow n(X \cap Y) = 40 - 38 = 2$$

प्रश्न 2 यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $X \cup Y$ में 18, X में 8 और Y में 15 अवयव हों तो $X \cap Y$ में कितने अवयव होंगे?

उत्तर-

$$n(X) = 8, n(Y) = 15, n(X) = 8, n(Y) = 15$$

हम जानते है की,

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$$

$$18 = 8 + 15 - n(X \cap Y)$$

$$23 - n(X \cap Y)$$

$$n(X \cap Y) = 23 - 18 = 5$$

प्रश्न 3 400 व्यक्तियों के समूह में, 250 हिन्दी तथा 200 अंग्रेजी बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति हिन्दी तथा अंग्रेजी दोनों बोल सकते हैं?

उत्तर-

: मान लीजिए कि H और E क्रमशः हिन्दी व अंग्रेजी बोलने वालों के समुच्चय हों, तब

$$n(H) = 250, n(E) = 200 \text{ और}$$

$$n(H \cup E) = 400$$

$$n(H \cup E) = n(H) + n(E) - n(H \cap E)$$

$$\therefore 400 = 250 + 200 - n(H \cap E)$$

$$\Rightarrow 400 = 450 - n(H \cap E)$$

$$\Rightarrow n(H \cap E) = 450 - 400$$

$$\therefore n(H \cap E) = 50$$

प्रश्न 4 यदि S और T दो ऐसे समुच्चय हैं कि S में 21, T में 32 और $S \cap T$ में 11 अवयव हों तो $S \cup T$ में कितने अवयव होंगे?

उत्तर-

$$n(S) = 21, n(T) = 32, n(S \cap T) = 11$$

$$n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$$

$$\therefore n(S \cap T) = 21 + 32 - 11 = 42$$

प्रश्न 5 यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि X में 40, $X \cup Y$ में 60, और $X \cap Y$ में 10 अवयव हों, तो? में कितने अवयव होंगे?

उत्तर-

$$n(X) = 40, n(X \cup Y) = 60$$

$$n(X \cap Y) = 10$$

$$n(Y) = ?$$

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$$

$$60 = 40 + n(Y) - 10$$

$$n(Y) = 60 - 40 + 10 = 30.$$

प्रश्न 6 व्यक्तियों के समूह में 37 कॉफी, 52 चाय पसंद करते हैं और प्रत्येक व्यक्ति दोनों में से कम से कम एक पेय पसंद करता है, तो कितने व्यक्ति कॉफी और चाय दोनों पसंद करते हैं?

उत्तर-

मान लिया C, कॉफी पीने वाले लोगों के समुच्चय को और T, चाय पीने वाले लोगों के समुच्चय हों, तब

$$n(C \cup T) = 70, n(C) = 37, n(T) = 52$$

$$n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T)$$

$$70 = 37 + 52 - n(C \cap T)$$

$$n(C \cap T) = 37 + 52 - 70 = 89 - 70 = 19$$

प्रश्न 7 65 व्यक्तियों के समूह में, 40 व्यक्ति क्रिकेट और 10 व्यक्ति क्रिकेट तथा टेनिस दोनों को पसंद करते हैं, तो कितने व्यक्ति केवल टेनिस को पसंद करते हैं किंतु क्रिकेट को नहीं? कितने व्यक्ति टेनिस को पसंद करते हैं?

उत्तर-

मान लीजिए C, क्रिकेट पसंद करने वाले लोगों का समुच्चय है और T टेनिस पसंद करने वालों का समुच्चय हो, तब

$$n(C \cup T) = 65, n(C) = 40, n(C \cap T) = 10$$

हम जानते हैं कि-

$$n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T)$$

$$65 = 40 + n(T) - 10 = 30 + n(T)$$

$$n(T) = 65 - 30 = 35$$

$$\text{केवल टेनिस पसंद करने वालों की संख्या} = n(T - C) = 35 - 10 = 25$$

इस प्रकार टेनिस पसंद करने वालों की संख्या जो क्रिकेट पसंद नहीं करते = 25

अतः टेनिस पसंद करने वाले लोगों की संख्या = 35

प्रश्न 8 एक कमेटी में, 50 व्यक्ति फ्रेंच 20 व्यक्ति स्पेनिश और 10 व्यक्ति स्पेनिश और फ्रेंच दोनों ही भाषाओं को बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति इन दोनों ही भाषाओं में से कम से कम एक भाषा बोल सकते हैं?

उत्तर- मान लीजिए फ्रांसीसी बोलने वाले लोगों के समुच्चय को F से तथा स्पैनिश बोलने वाले लोगों के समुच्चय का S से निरूपित किया हो, तब

$$n(F) = 50, n(S) = 20, n(F \cap S) = 10$$

$$\begin{aligned} \text{अब, } n(F \cup S) &= n(F) + n(S) - n(F \cap S) \\ &= 50 + 20 - 10 = 60 \end{aligned}$$

कम से कम एक भाषा बोलने वाले लोगों की संख्या = 60.

विविध प्रश्नावली (पृष्ठ संख्या 31-32)

प्रश्न 1 निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन किसका उपसमुच्चय है, इसका निर्णय कीजिए: $x : x \in \mathbb{R}$ तथा $x^2 - 8x + 12 = 0$ को संतुष्ट करने वाली सभी वास्तविक संख्याएं = x , $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, $D = \{6\}$.

उत्तर- $x : x \in \mathbb{R}$, x समीकरण $x^2 - 8x + 12 = 0$ को संतुष्ट करता है। अर्थात्

$$A = \{2, 6\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$D = \{6\}$$

i. समुच्चय A के अवयव 2, 6 समुच्चय B में भी हैं।

$$A \subset B$$

ii. इस प्रकार समुच्चय A के अवयव 2, 6 समुच्चय C में भी है।

$$A \subset C$$

iii. समुच्चय B के अवयव 2, 4, 6 समुच्चय C में हैं।

$$B \subset C$$

iv. समुच्चय D का अवयव 6, समुच्चय A, B और C तीनों में हैं,

$$D \subset A, D \subset B, D \subset C$$

प्रश्न 2 ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में कथन सत्य है या असत्य है। यदि सत्य है, तो उसे सिद्ध कीजिए। यदि असत्य है तो एक उदाहरण दीजिए।

- (i) यदि $x \in A$ तथा $A \in B$ तो $x \in B$
- (ii) यदि $A \subset B$ तथा $B \in C$, तो $A \in C$
- (iii) यदि $A \subset B$ तथा $B \subset C$, तो $A \subset C$
- (iv) यदि $A \notin B$ तथा $B \notin C$ तो $A \notin C$
- (v) यदि $x \in A$ तथा $A \notin B$ तो $x \in A$
- (vi) यदि $A \subset B$ तथा $x \notin B$, तो $x \notin A$

उत्तर-

(i) असत्य

मान लीजिए $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$ स्पष्ट है कि $1 \in A$, $A \in B$ परंतु $1 \in$ समुच्चय B क्योंकि $1 \notin B$ में नहीं है। इस प्रकार दिया हुआ कथन सत्य नहीं है।

(ii) असत्य

मान लीजिए $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ और $C = \{\{1, 2\}, 3\}$ समुच्चय A का अवयव समुच्चय B में हैं $A \in B$

अवयव $\{1, 2\}$ समुच्चय में हैं $B \in C$

परंतु $A = \{1\}$ समुच्चय में नहीं है।

कथन $A \in C$ सत्य नहीं है।

(iii) सत्य,

$A \subset B$ यदि $x \in A$ तथा $x \in B$ परंतु $B \subset C =$ यदि $x \in B$ तब $x \in C$ यदि $x \in A$ तब $x \in A$ तब $x \in C \Rightarrow A \subset C$

(iv) असत्य,

मान लीजिए $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 2, 5\}$ समुच्चय A के सभी अवयव $1, 2$ समुच्चय B में नहीं हैं। $A \not\subset C$ समुच्चय B के सभी अवयव $2, 3$ समुच्चय में नहीं हैं। $A \subset C$ परंतु समुच्चय A के सभी अवयव $1, 2$ समुच्चय C में हैं। $A \subset C$ इस प्रकार दिया कथन सत्य नहीं है।

(v) असत्य,

समुच्चय $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ समुच्चय A का अवयव $1, 2$ समुच्चय B में नहीं है। $A \not\subset B$ समुच्चय A का अवयव 1 समुच्चय B में नहीं है। $x \in B$ इस प्रकार दिया गया कथन सत्य नहीं है।

(vi) सत्य,

$A \subset B \Rightarrow$ यदि $x \in A$ तब $x \in B$ यदि $x \notin B$ तथा $x \notin A$ इस प्रकार कथन $A \subset B, x \notin B$ तब $x \notin A$ सत्य हैं।

प्रश्न 3 मान लीजिए A, B और C ऐसे समुच्चय हैं कि $A \cup B = A \cup C$ तथा $A \cap B = A \cap C$, तो दर्शाइए कि $B = C$.

उत्तर-

दिया है-

$$A \cup B = A \cup C$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap C = C [(A \cup C) \cap C = C]$$

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = C$$

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) = C \dots (i) [A \cap C = A \cap B \text{ दिया है}]$$

$$A \cup B = A \cup C$$

$$(A \cup B) \cap B = (A \cup C) \cap B$$

$$B = (A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B)$$

$$\text{या } (A \cap B) \cup (B \cap C) = B \dots (ii)$$

(i) और (ii) से $B = C$ प्राप्त होता है।

प्रश्न 4 दिखाइए कि निम्नलिखित चार प्रतिबन्ध तुल्य हैं-

i. $A \subset B$

ii. $A - B = \phi$

iii. $A \cup B = B$

iv. $A \cap B = A$

उत्तर-

$A \subset B$ अर्थात् समुच्चय A के सभी अवयव B में हैं।

$A - B = \phi$ अर्थात् (i) \Leftrightarrow (ii)

(ii) $A - B = \phi \Leftrightarrow$ समुच्चय A के सभी अवयव B में हैं।

$A \cup B = B$

अर्थात (ii) \Leftrightarrow (iii)

(iii) $A \cup B = B \Leftrightarrow$ समुच्चय A के सभी अवयव B में है।

समुच्चय A और B में समुच्चय A के अवयव उभयनिष्ठ है।

$$A \cap B = A$$

इससे स्पष्ट है सभी कथन समान हैं।

प्रश्न 5 दिखाइए कि यदि $A \subset B$ तो $C - B \subset C - A$.

उत्तर-

मान लीजिए $x \in C - B \Rightarrow x \in C$ परंतु $x \notin B$

दिया है- $A \subset B \Rightarrow$ यदि $x \notin B \Rightarrow x \notin A$

अर्थात, $x \in C$ और $x \notin A \Rightarrow x \in C - A$

यहाँ हम पाते हैं कि

यदि $x \in C - B$ तब $x \in C - A$

$$\Rightarrow C - B \subset C - A.$$

प्रश्न 6 मान लीजिए कि $P(A) = P(B)$, सिद्ध कीजिए कि $A = B$.

उत्तर-

मान लीजिए कि $P(A) = P(B)$, सिद्ध कीजिए कि $A = B$.

मान लीजिए x , समुच्चय A का कोई अवयव है।

तब एक उपसमुच्चय X (मान लो) ऐसा होगा जिसमें $x \in A$ जिसके अनुसार

$$x \subset A \Rightarrow x \in P(A)$$

$$x \in P(B) [P(A) = P(B)]$$

$$x \subset B \text{ या } x \in B$$

अर्थात यदि

$$x \in A \text{ तब } x \in B \Rightarrow A \in B \dots (i)$$

y समुच्चय B का कोई अवयव हो, तब

समुच्चय B का कोई उपसमुच्चय Y (मान लो) होगा जिससे $y \in Y$

$$Y \subset B \Rightarrow Y \in P(B)$$

$$Y \in P(A) [P(A) = P(B)]$$

$$Y \subset A \text{ यदि } y \in B \text{ तब } y \in A$$

$$B \subset A \dots (ii)$$

समीकरण (i) और (ii) से, हम पाते हैं।

$$A = B.$$

प्रश्न 7 किन्हीं भी समुच्चयों A तक B के लिए क्या यह सत्य है कि $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$? अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

उत्तर-

$$A = \{a\}, B = \{b\}, \text{ और } A \cup B = \{a, b\}$$

$$P(A) = \{\phi, a\}, P(B) = \{\phi, b\}$$

$$P(A) \cup P(B) = \{\phi, \{a\}, \{b\}\} \dots (i)$$

$$\text{अब } A \cup B = \{a, b\}$$

$$P(A \cup B) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

समी. (i) और (ii) से हम देखते हैं कि

$$\text{अतः } P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$$

प्रश्न 8 किन्हीं दो समुच्चयों A तथा B के लिए सिद्ध कीजिए कि $A = (A \cap B) \cup (A - B)$ और $A \cup (B - A) = (A \cup B)$

उत्तर-

दायाँ पक्ष = $(A \cap B) \cup (A - B)$

$A = (A \cap B) \cup (A - B)$ [$A - B = A \cap B'$]

= $(A \cap (B \cup B'))$ (वितरण गुण से)

= $A \cap U$ (यहाँ U सार्वत्रिक समुच्चय)

= A

अतः $(A \cap B) \cup (A - B) = A.$

(ii) बायाँ पक्ष = $A \cup (B - A)$

= $A \cup (B \cap A')$ [$B - A = B \cap A'$]

= $(A \cup B) \cap (A \cup A')$ (वितरण गुण से)

= $(A \cup B) \cap U$ [यहाँ U सार्वत्रिक समुच्चय]

= $A \cup B$

अतः : $A \cup (B - A) = A \cup B$

प्रश्न 9 समुच्चयों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि-

(i) $A \cup (A \cap B) = A$

(ii) $A \cap (A \cup B) = A$

उत्तर-

(i)

$$\begin{aligned}
 \text{बायों पक्ष} &= A \cup (A \cap B) \\
 &= (A \cup A) \cap (A \cup B) \text{ (वितरण गुण से)} \\
 &= A \cap (A \cup B) \text{ (} A \cup A = A \text{)} \\
 &= A[A \subset A \cup B] \\
 A \cup (A \cap B) &= A.
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \text{बायों पक्ष} &= A \cap (A \cup B) \\
 &= (A \cap A) \cup (A \cap B) \text{ [वितरण गुण से]} \\
 &= A \cup (A \cap B) \text{ [} A \cap A = A \text{]} \\
 &= A[A \cap B \subset A] \\
 \text{अतः } A \cap (A \cup B) &= A.
 \end{aligned}$$

प्रश्न 10 दिखलाइए कि $A \cap B = A \cap C$ का तात्पर्य $B = C$ आवश्यक रूप से नहीं होता।

उत्तर-

मान लीजिए $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 7\}$ तथा $C = \{1, 4\}$ हो, तब

$$A \cap B = 1, 2 \cap 1, 7 = 1$$

$$A \cap C = 1, 2 \cap 1, 4 = 1$$

$$A \cap B = A \cap C$$

$$B \neq C$$

यदि $A \cap B = A \cap C$ तो आवश्यक नूह है कि $B = C$.

प्रश्न 11 मान लीजिए कि A और B समुच्चय हैं। यदि किसी समुच्चय X के लिए $A \cup X = B \cup X$ तथा $A \cap X = B \cap X$ तो सिद्ध कीजिए कि $A = B$.

(संकेत- $A = A \cap (A \cup X)$, $B = B \cap (B \cup X)$) और वितरण नियम का प्रयोग कीजिए)

उत्तर-

दिया है-

$A \cup X = B \cup X$, जब कि X कोई समुच्चय है।

$$A \cap (A \cup X) = A \cap (B \cup X) \quad [A \subset A \cup X, A \cap (A \cup X) = A]$$

$$A = A \cap (B \cup X)$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap X) \quad [\text{वितरण गुण से}]$$

$$= (A \cap B) \cup \phi \quad \text{दिया है, } A \cap X = \phi$$

$$= A \cap B$$

$$A \subset B \dots (i)$$

$$A \cup X = B \cup X$$

$$B \cap (A \cup X) = B \cap (B \cup X)$$

$$B \cap (A \cup X) = B \quad [B \subset B \cup X]$$

$$(B \cap A) \cup (B \cap X) = B \quad [\text{वितरण गुण से}]$$

$$(B \cap A) \cup \phi = B \quad [\text{दिया है- } B \cap X = \phi]$$

$$(B \cap A) = B$$

$$B \subset A \dots (ii)$$

समी. (i) और (ii) से, हम पाते हैं कि $A = B$.

प्रश्न 12 ऐसे समुच्चय A, B और C ज्ञात कीजिए ताकि $A \cap B$, $B \cap C$ तथा $A \cap C$ आरिक्त समुच्चय हों और $A \cap B \cap C = \phi$

उत्तर-

मान लीजिए $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$

$$A \cap B = 1, 2 \cap 2, 3 = 2,$$

$$B \cap C = 2, 3 \cap 1, 3 = 3$$

$$C \cap A = 1, 3 \cap 1, 2 = 1$$

अतः $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ रिक्त समुच्चय नहीं हैं।

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = 2 \cap 1, 3 = \phi \text{ इति सिद्धम्}$$

प्रश्न 13 किसी विद्यालय के 600 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण से ज्ञात हुआ कि 150 विद्यार्थी चाय, 225 विद्यार्थी कॉफी तथा 100 विद्यार्थी चाय और कॉफी दोनों पीते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो चाय पीते हैं और न कॉफी पीते हैं।

उत्तर- मान लीजिए T और C चाय तथा कॉफी पीने वाले विद्यार्थियों के समुच्चय हों, तब

$$n(U) = 600, n(T) = 150, n(C) = 225, n(T \cap C) = 100$$

$$n(T' \cup C') = n(T) + n(C) - n(T \cap C)$$

$$= 150 + 225 - 100 = 275$$

= उन विद्यार्थियों की संख्या जो चाय या कॉफी पीते हैं या चाय और कॉफी दोनों पीते हैं।

विद्यार्थियों की कुल संख्या = 600

उन विद्यार्थियों की संख्या जो चाय या कॉफी कुछ भी नहीं पीते = $600 - 275 = 325$.

प्रश्न 14 विद्यार्थियों के समूह में, 100 विद्यार्थी हिन्दी, 50 विद्यार्थी अंग्रेजी तथा 25 विद्यार्थी दोनों भाषाओं को जानते हैं। विद्यार्थियों में से प्रत्येक या तो हिन्दी या अंग्रेजी जानता है। समूह में कुल कितने विद्यार्थी हैं?

उत्तर-

पाना तथा क्रमशः हिन्दी और अंग्रेजी जानने वालों के समुच्चय हों,

तब-

$$n(H) = 100, n(E) = 50, n(H \cap E) = 25$$

$$= 100 + 50 - 25 = 125$$

उन विद्यार्थियों की संख्या जो हिन्दी या अंग्रेजी जानते हैं = 125.

प्रश्न 15 60 लोगों के सर्वेक्षण में पाया गया कि 25 लोग समाचार पत्र H, 26 लोग समाचार पत्र T, 26 लोग समाचार पत्र I, 9 लोग H तथा I दोनों, 11 लोग H तथा T दोनों, 8 लोग T तथा I दोनों और 3 लोग तीनों ही समाचार पत्र पढ़ते हैं, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए-

- i. कम से कम एक समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या।
- ii. ठीक ठीक केवल एक समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या।

उत्तर- कुल लोगों की संख्या जिनका सर्वेक्षण किया गया = 60

H समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या, $n(H) = 25$

T समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या, $n(T) = 26$

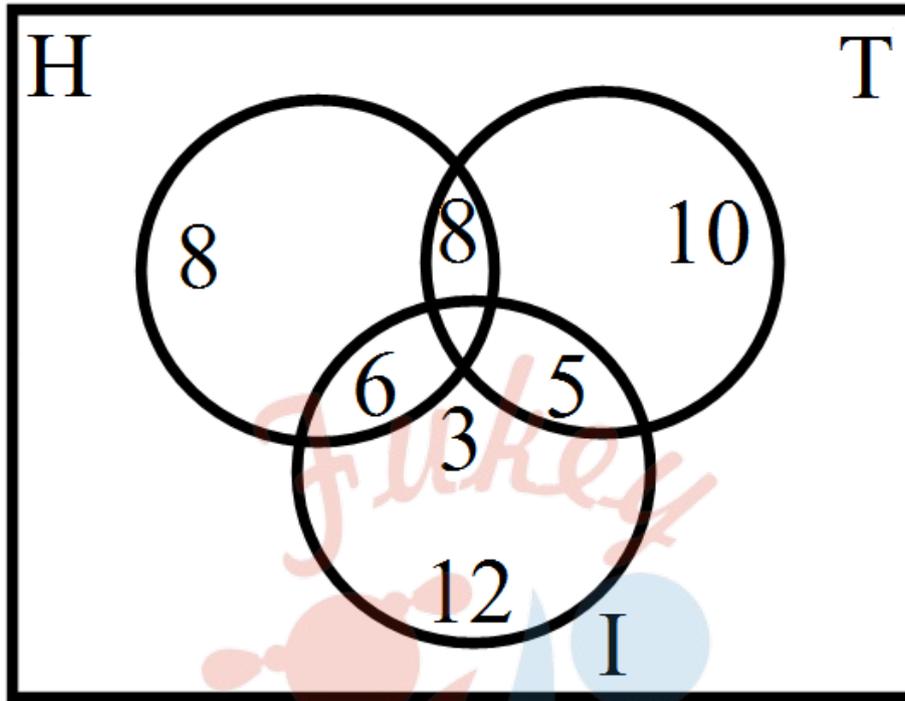
I समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या, $n(I) = 26$

H और I समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या, $n(H \cap I) = 9$

H और T समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या, $n(H \cap T) = 11$

T और I समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या, $n(T \cap I) = 8$

तीनों समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या, $n(H \cap T \cap I) = 3$



i. H और I समाचार पत्र पढ़ने वाले तथा T समाचार पत्र न पढ़ने वालों की संख्या = $9 - 3 = 6$

H और T समाचार पत्र पढ़ने वाले तथा I समाचार पत्र न पढ़ने वालों की संख्या = $11 - 3 = 8$

T और I समाचार पत्र पढ़ने वाले तथा H समाचार पत्र न पढ़ने वालों की संख्या = $8 - 3 = 5$

केवल H समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या = $25 - 8 - 6 - 3 = 8$

केवल T समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या = $26 - 8 - 3 - 5 = 10$

केवल I समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या = $26 - 6 - 3 - 5 = 12$

कम से कम एक समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या = केवल एक समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या + केवल दो समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या + तीनों समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या

$$= (8 + 10 + 12) + (8 + 6 + 5) + 3$$

$$= 30 + 19 + 3 = 52$$

वैकल्पिक विधि-

$$n(A \cap B \cap C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 25 + 26 + 26 - 11 - 8 - 9 + 3$$

$$= 77 - 28 + 3 = 80 - 28 = 52$$

ii. केवल H और T समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या = $11 - 3 = 8$

केवल T और 1 समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या = $8 - 3 = 5$

केवल 1 और H समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या = $9 - 3 = 6$

तीनों समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या = 3

केवल एक समाचार पत्र पढ़ने वालों की संख्या = $52 - (8 + 5 + 6 + 3) = 52 - 22 = 30$.

प्रश्न 16 एक सर्वेक्षण में पाया गया कि 21 लोग उत्पाद A, 26 लोग उत्पाद B, 29 लोग उत्पाद C पसंद करते हैं। यदि 14 लोग उत्पाद A तथा B, 12 लोग उत्पाद C तथा A, 14 लोग उत्पाद B तथा C और 8 लोग तीनों ही उत्पादों को पसंद करते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने लोग केवल उत्पाद C को पसंद करते हैं?

उत्तर-

दिया है-

$$n(A) = 21,$$

$$n(B) = 26,$$

$$n(C) = 29$$

$$n(A \cap B) = 14,$$

$$n(A \cap C) = 12$$

$$n(B \cap C) = 14,$$

$$n(A \cap B \cap C) = 8$$

$$n(A \cap C) = 12,$$

$$P(A \cap B \cap C) = 8$$

$$n(\text{केवल } C) = n(C) - n(\text{केवल } A \text{ और } C) - n(\text{केवल } B \text{ और } C)$$

$$- n(A \cap B \cap C) = 29 - 4 - 6 - 8 = 29 - 18 = 11.$$

Future's Key

Fukey Education